

## Електричне машине – решења првог колоквијума

### 1. задатак – решење:

- а) Сва неопходна извођења су приказана на слајдовима на странама 15-17, доступним на интернет страници предмета. У оквиру њих треба, полазећи од простопериодичног струјног плашта на ротору, извести изразе за:
- радијалну компоненту поља ротора уз површину ротора:

$$H_r^R(\theta) = \frac{R}{\delta} J_{R0} \sin(\theta - \theta_m)$$

- тангенцијалну компоненту поља ротора:

$$H_\theta^R(\theta) = -J_{R0} \cos(\theta - \theta_m)$$

- радијалну компоненту поља статора уз површину статора:

$$H_r^S(\theta) = H_r^S(0) + \frac{R}{\delta} J_{S0} \sin \theta = \frac{R}{\delta} J_{S0} \sin \theta$$

- тангенцијалну компоненту поља статора:

$$H_\theta^S(\theta) = J_{S0} \cos \theta$$

На крају је неопходно, занемарујући тангенцијалне компоненте поља и акумулисану енергију у феромагнетском материјалу, одредити магнетску енергију присутну у зазору (деталји извођења су дати на слајду 18):

$$W_m = \frac{\mu_0 R^3 L}{2\delta} \int_0^{2\pi} (J_{R0}^2 \sin^2(\theta - \theta_m) + J_{S0}^2 \sin^2(\theta) + 2J_{R0}J_{S0} \sin(\theta - \theta_m) \sin(\theta)) d\theta$$

↑  
const.

↑  
const.

↑  
 $f(\theta_m)$

- б) Диференцирањем изрази за енергију магнетског поља по угаоном положају ротора, долази се до изрази за електромагнетски момент:

$$M = -\frac{\mu_0 \pi R^3 L}{\delta} J_{R0} J_{S0} \sin(\theta_m)$$

Идентификујући у претходном изразу чланове који представљају максимални флуks једног навојака статора и ротора,

$$\Phi_{S1} = \frac{2\mu_0 LR^2}{\delta} J_{S0} \quad \Phi_{R1} = \frac{2\mu_0 LR^2}{\delta} J_{R0}$$

може се показати да се израз за момент да приказати као:

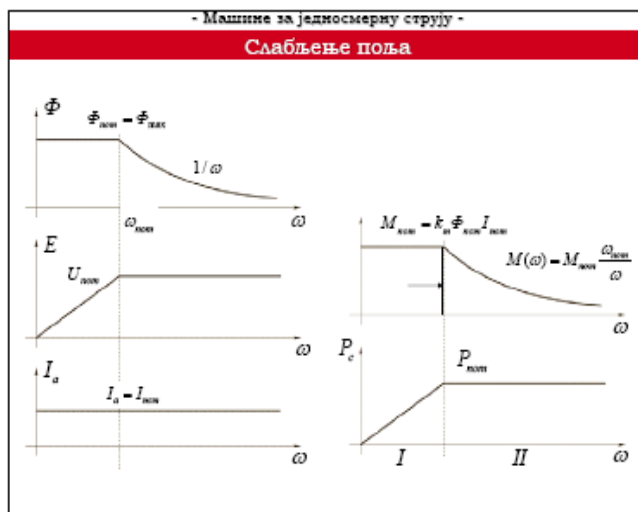
$$M_{S \rightarrow R}^{em} = k |\vec{\Phi}_S \times \vec{\Phi}_R|$$

О детаљима овог извођења погледати такође на слајду 18 одговарајућег документа.

## 2. задатак – решење:

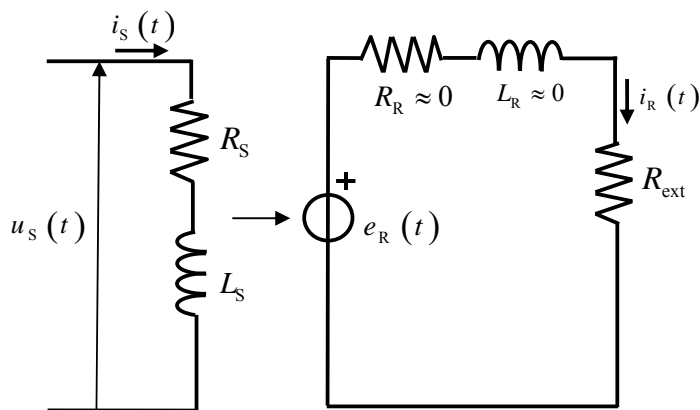
а) Као одговор на ово питање, неопходно је у обиму не већем од 1,5 стране навести дефиницију сваке од тражених величина везана за њен значај и везу са карактеристикама и радним режимима машине. Оцењиваће се дефиниције, образложења и примери следећих величина и карактеристика: номиналне струје, номиналног напона, номиналног момента, номиналне брзине, номиналне снаге и номиналног флукса.

б) У овој тачки се као одговор очекује анализа и објашњење рада машине у области слабљења поља, када се повећање брзине ротора постиже на рачун смањења флукса побуде. Као део одговора треба приказати зависност тражених величина од брзине ротора као што је то приказано на слајду испод. Оцењиваће се исправна дефиниција и објашњења.



## 3. задатак – решење:

Модел који нам може помоћи у описивању рада ове машине је приказан на слици испод:



а)

### **Одређивање сопствене индуктивности статорског намотаја:**

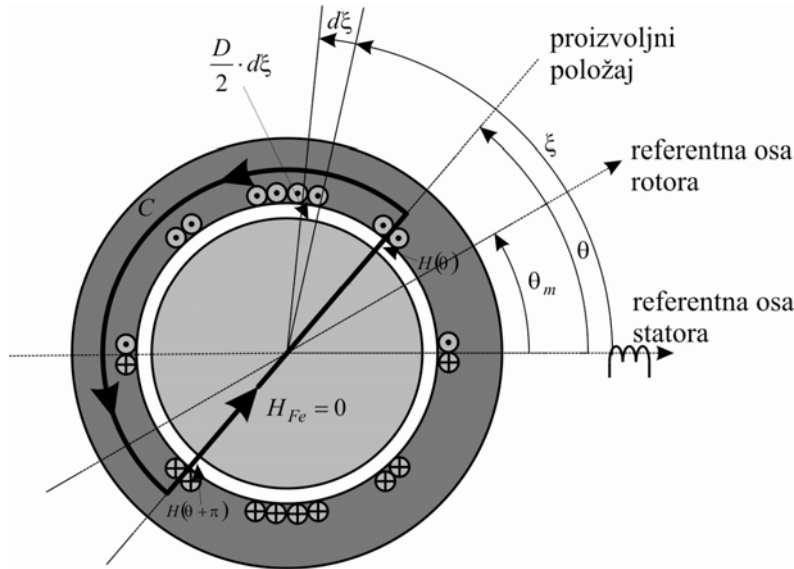
Поступак: претпоставимо постојање константне струје  $I_s$  у статорском намотају, одредимо поље које та струја ствара у зазору, а затим и флукс који то поље узрокује у самом статорском намотају. Количник израчунатог флукса и вредности статорске струје представља тражену индуктивност.

Применимо сада уопштени Амперов закон на контуру С, која својим највећим делом пролази кроз феромагнетски материјал и два пута пролази радијално кроз зазор ширине  $\delta$ , на угаоним положајима  $\theta$  и  $\theta + \pi$ . Користећи чињеницу да је феромагнетски материјал бесконачне магнетске пермеабилности, добијамо:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = I_C$$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = H(\theta) \cdot \delta - H(\theta + \pi) \cdot \delta = H(\theta) \cdot \delta + H(\theta) \cdot \delta = 2 \cdot \delta \cdot H(\theta)$$

$$I_C = \int_{\theta}^{\theta+\pi} N'_s(\xi) \cdot I_s \cdot \frac{D}{2} d\xi = \int_{\theta}^{\theta+\pi} N'_{s,\max} \cdot \sin(\xi) \cdot I_s \cdot \frac{D}{2} d\xi = D \cdot N'_{s,\max} \cdot I_s \cdot \cos(\theta).$$



У претходном изразу  $I_C$  је вредност криволинијског интеграла по затвореној контури  $C$ ,  $\xi$  представља произвољни угаони положај у интервалу интеграције, а  $N'_{s,\max} = 25m^{-1}$  је максимална подужна густина проводника статорског намотаја.

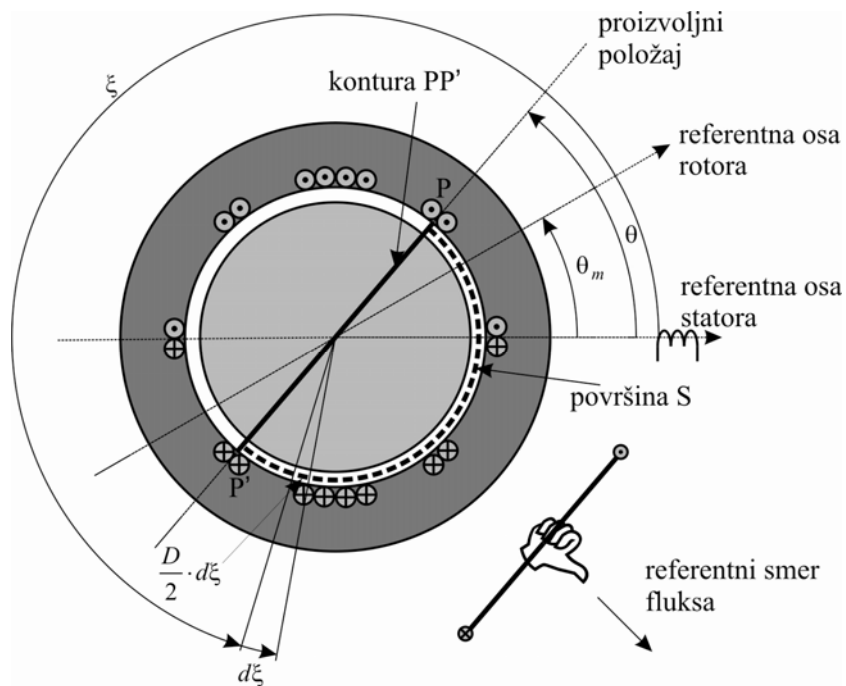
$$H(\theta) = \frac{D \cdot N'_{s,\max} \cdot I_s \cdot \cos(\theta)}{2 \cdot \delta}.$$

Магнетска индукција у зазору машине је функција угла  $\theta$ , статорске струја и параметара машине:

$$B(\theta) = \mu_0 \cdot H(\theta) = \mu_0 \cdot \frac{D \cdot N'_{s,\max} \cdot I_s \cdot \cos(\theta)}{2 \cdot \delta}$$

Следећи корак представља одређивање флукса у једном навојку статорског намотаја који се налази на позицији  $\theta$ .

$P$  и  $P'$  је пар проводника на угаоном растојању  $\pi$  који чине један навојку статора. Референтни смер контуре је показан на слици.



Флуks у једном навојку статорског намотаја, који се налази на положају  $\theta$ , одређује се као површински интеграл магнетске индукције кроз полукружну површину која се простира дуж ваздушног зазора и ослоњена је на контуру, од угаоног положаја  $\theta - \pi$  до угаоног положаја  $\theta$ .

$$\Phi(\theta) = \int_{\theta-\pi}^{\theta} B(\xi) \cdot L \cdot \frac{D}{2} d\xi = \int_{\theta-\pi}^{\theta} \frac{\mu_0 \cdot D \cdot N'_{s,\max} \cdot I_s}{2 \cdot \delta} \cdot L \cdot \frac{D}{2} \cdot \cos(\xi) d\xi = \frac{\mu_0 \cdot L \cdot D^2 \cdot I_s}{2 \cdot \delta} \cdot N'_{s,\max} \cdot \sin(\theta).$$

Укупни флуks статорског намотаја добија се интеграцијом  $d\Psi_s = \Phi(\theta) \cdot dN_s$ , при чему је  $dN_s = N'_s(\theta) \cdot \frac{D}{2} d\theta$ .

$$\Psi_s = \int_0^{\pi} \Phi(\theta) \cdot N'_s(\theta) \cdot \frac{D}{2} d\theta = \int_0^{\pi} \frac{\mu_0 \cdot L \cdot D^2 \cdot I_s}{2 \cdot \delta} \cdot N'_{s,\max} \cdot \sin(\theta) \cdot N'_{s,\max} \cdot \sin(\theta) \cdot \frac{D}{2} d\theta$$

$$\Psi_s = \frac{\mu_0 \cdot \pi \cdot L \cdot D^3 \cdot N'^2_{s,\max} \cdot I_s}{8 \cdot \delta}.$$

Сопствене индуктивности статорског намотаја се одређује као:

$$L_s = \frac{\Psi_s}{I_s} = \frac{\mu_0 \cdot \pi \cdot L \cdot D^3 \cdot N'^2_{s,\max}}{8 \cdot \delta}.$$

За дате параметре машине вредност сопствене индуктивности статорског намотаја је  $L_s = 0.0193H$ .

**б) Амплитуда статорске струје се одређује као:**

$$I_{s,\max} = \frac{U_{s,\max}}{\sqrt{R_s^2 + (\omega_s L_s)^2}} = \frac{10}{\sqrt{1^2 + (40 \cdot 0.0193)^2}} = 7,92 \text{ A}, \text{ при чему је учестаност статорске струје једнака}$$

учестаности напајања статорског намотаја, тј.  $\omega_s = 40 \text{ rad/s}$ .

Статорска струја због индуктивне природе статорског намотаја фазно касни за напонам за угао:

$$\varphi_0 = \arctg \frac{\omega_s L_s}{R_s} = 37,7^\circ = 0,657 \text{ rad}.$$

Временски облик простопериодичне струје статорског намотаја је  $i_s(t) = I_{s,\max} \cos(\omega_s t - \varphi_0)$ .

в)

Флукс који се индукује у роторском намотају који се састоји од два проводника, тј. једног навојка је последица непокретног али временски променљивог поља статора:

$$B(\theta) = \mu_0 \cdot \frac{D \cdot N'_{s,\max} \cdot i_s(t) \cdot \cos(\theta)}{2 \cdot \delta}$$

и може се израчунати као:

$$\Psi_R(t) = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} B(\theta) L \frac{D}{2} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \mu_0 \frac{DN'_{s,\max} i_s(t)}{2\delta} L \frac{D}{2} \cos(\theta) d\theta = \frac{\mu_0}{4\delta} LD^2 N'_{s,\max} i_s(t) = \frac{\mu_0}{4\delta} LD^2 N'_{s,\max} I_{s,\max} \cos(\omega_s t - \varphi_0).$$

Индукована електромоторна сила у роторском намотају износи:

$$e_R(t) = -\frac{d\Psi_R(t)}{dt} = \frac{\mu_0}{4\delta} LD^2 N'_{s,\max} I_{s,\max} \omega_s \sin(\omega_s t - \varphi_0)$$

Стога је ефективна вредност електромоторне силе која се индукује у роторском намотају машине:

$$E_R = \frac{\mu_0}{4\sqrt{2}\delta} LD^2 N'_{s,\max} I_{s,\max} \omega_s = 0,22 \text{ V}.$$

Средња снага губитака у екстерном отпорнику износи:

$$P_{\gamma,\text{ext}} = \frac{E_R^2}{R_{\text{ext}}} = 24,2 \text{ mW}.$$

#### **4. задатак – решење:**

Комбинујући израз за електромагнетски момент:

$$M_{em} = k_m \Phi_p I_a$$

и једначину напонске равнотеже за описани мотор:

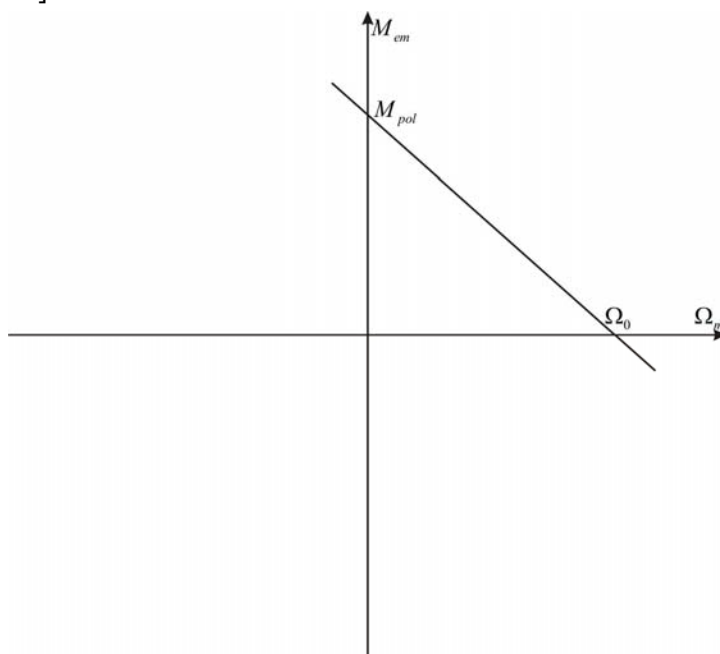
$$U_a = k_e \Phi_p \Omega_m + R_a I_a$$

добија се израз за механичку карактеристику мотора:

$$M_{em} = \frac{k_m \Phi_p U_a}{R_a} - \frac{k_e k_m \Phi_p^2}{R_a} \Omega_m.$$

Заменом нумеричких података наведених у задатку добија се израз за механичку карактеристику овог мотора при номиналном напајању:

$$M_{em} = 27.5 - 0.0625 \Omega_m [Nm]$$



На основу претходног израза се одређује полазни момент који представља момент при нулој вредности роторске брзине:

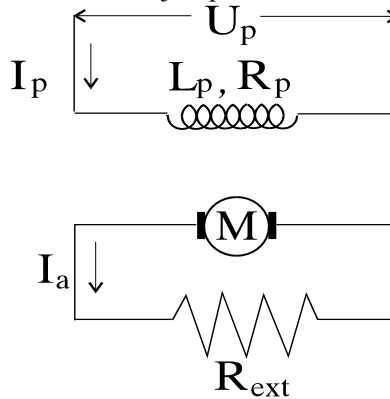
$$M_{pol} = M_{em}(\Omega_m = 0) = 27,5 Nm.$$

Такође се може одредити и брзина идеалног празног хода као вредност роторске брзине при нулој вредности електромагнетског момента:

$$\Omega_o = \Omega_m(M_{em} = 0) = 440 \frac{rad}{s}.$$

б)

Након уклањања једносмерног извора којим се напаја роторски намотај и повезивањем екстерног отпорника  $R_{ext}$  између А и Б прикључака ротора започиње процес динамичког (отпорничко) кочење. У овом радном режиму ће шема кола бити као што је приказано на наредној слици:



Анализирајући једначину напонског баланса, уз претпоставку да је побудни напон остао непромењен, добија се израз за нову механичку карактеристику:

$$U_a = R_a \cdot I_a + E; \quad E = k_e \cdot \Phi_p \cdot \Omega_m; \quad U = -R_{ext} \cdot I_a$$

$$\Phi_p = \frac{L_p}{N_p} \cdot I_p = \dot{L}_p \cdot I_p; \quad U_p = const; \quad R_p = const \Rightarrow I_p = const \Rightarrow \Phi_p = const$$

$$M_{em} = k_m \cdot \Phi_p \cdot I_a \Rightarrow I_a = \frac{M_{em}}{k_m \Phi_p}$$

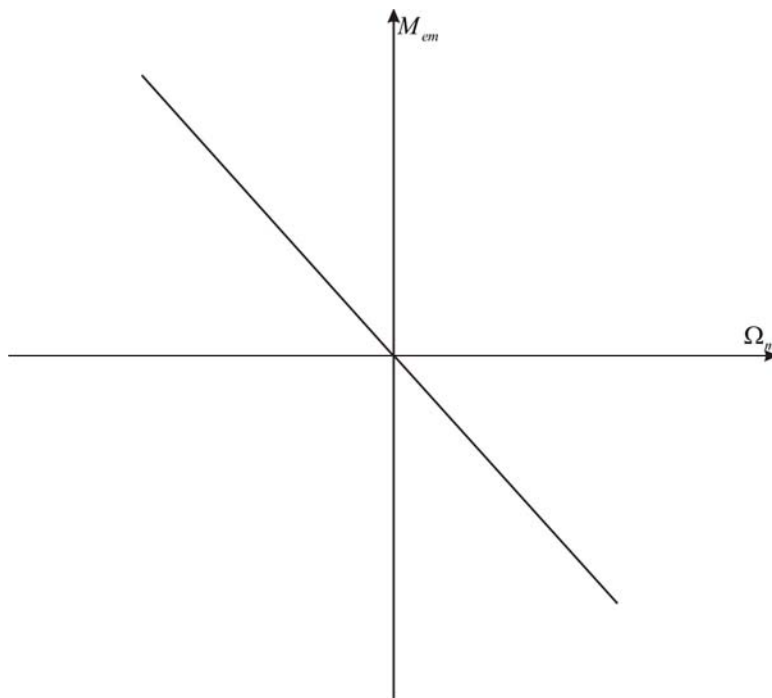
$$E = -(R_a + R_{ext}) \cdot I_a \Rightarrow k_e \cdot \Phi_p \cdot \Omega = -(R_a + R_{ext}) \cdot \frac{M_{em}}{\Phi_p \cdot I_a}$$

$$\Omega_m = -\frac{(R_a + R_{ext})}{k_e \cdot k_m \cdot \Phi_p^2} \cdot M_{em} = -const \cdot M_{em}$$

Заменом нумеричких вредности се добија коначни израз:

$$M_{em} = -\frac{k_e k_m \Phi_p^2}{R_a + R_e} \omega = -0,025 \Omega_m.$$

То се може и графички приказати:



Номинална вредност електромагнетског момента је:

$$M_{nom} = k_m \Phi_p I_n = 2,5 \text{ Nm} .$$

Стога је момент оптерећења једнак

$$M_{opt} = 2M_{nom} = 5 \text{ Nm} .$$

Брзина окретања ротора при овом оптерећењу се одређује на основу израза за механичку карактеристику:

$$\Omega_m = \Omega(M_{em} = 5 \text{ Nm}) = -200 \frac{\text{rad}}{\text{s}} .$$