Слободан Н. Вукосавић

Листа корекција је дата у дну PDF датотеке

ЕЛЕКТРИЧНЕ МАШИНЕ

Рецензенти:
Проф. др Милош Петровић
Проф. др Драгитин Саламон

Универзитет у Београду
Електротехнички факултет
Академска мисао

Београд, 2010.

ЕЛЕКТРИЧНЕ МАШИНЕ

Електромеханичко претварање енергије.
Анализа и модели електромеханичких система.
Магнетска кола, флуксеви и магнетопобудне силе. Магнетски моменат.
Навојци, секције, концентрисани намотаји и расподељени намотаји.
Електромоторне силе намотаја. Магнетопобудне силе намотаја.
Машине за једносмерну струју. Асинхроне машине. Синхроне машине.
Обртне трансформације и динамички модел електричних машина.
Устаљена стања, заменске шеме и механичке карактеристике.
Губици у намотајима, у магнетском колу и губици услед обртања.
Напајање и управљање. Прелазне појаве у електричним машинама.

Рецензенти:

Проф. др Милош Петровић
Проф. др Драгутин Саламон

ELECTRIC MACHINES

Electromechanical energy conversion. Modeling of electromechanical systems. Magnetic circuits, magnetic flux and magnetomotive forces. Electromagnetic torque. Winding turns and sections. Concentrated and distributed windings. Electromotive forces and magnetomotive forces of windings.DC current machines. Induction machines. Synchronous machines. Coordinate transformations, dynamic model of electric machines.Steady state operation, equivalent circuits and mechanical characteristics. Power losses. Copper and iron losses. Mechanical losses. Machines power supply and controls. Transient phenomena in electric machines.

Предговор

Овај уџбеник је прилагођен студентима Електротехничког факултета који се први пут сусрећу са електричним машинама, али га могу користити и студенти завршних година четворогодишњих студија. Уџбеник се ослања на петнаестогодишње искуство аутора у предавању Електричних машина на Електротехничком факултету у Београду. Поред градива које се предаје у оквиру предмета Електричне машине, уџбеник садржи додатни материјал потребан за проширивање знања и примену електричних машина. Пре свега намењен студентима на Одсеку за енергетику, уџбеник се препоручује и студентима других одсека Електротехничког факултета који проучавају примене електричних машина или се баве проблемима напајања и управљања.

Праћење излагања тражи познавање математике, физике и основа електротехнике у обиму који је примерен првој години наставе на електротехничким факултетима. Учињен је напор да градиво буде доступно читаоцу који нема вештину у раду са просторним изводима, али је потребно познавати електростатичка и магнетска поља, кола сталних и наизменичних струја и имати вештину у раду са комплексним бројевима и фазорима. Начин и обим излагања смањује потребу за коришћењем референтне литературе. У сваком одељку постоје питања и задаци на местима где је потребно начинити рекапитулацију. Изложено градиво представља практичну примену знања из математике, физике и електротехнике која студенти стичу на првој години студија.

Књига садржи основна знања о електричним машинама која су потребна будућим електроинжењерима. Приступ излагању полази од основне улоге и функције машине. Анализирају се карактеристике електричних и механичких приступа машине и одређују математички модел, заменске шеме и механичке карактеристике. У мери која је неопходна за разумевање принципа рада, напајања и управљања, књига се бави и елементима конструкције машина, проблемима загревања и одвођења топлоте, као и специфичним несавршеностима магнетског кола и намотаја. У књизи се изучавају обртни електромеханички претварачи, док су трансформатори изостављени. Анализирају се машине за једносмерну струју, асинхроне и синхроне машине. Друге врсте електричних машина нису детаљније разматране. Технике формирања намотаја и пројектовања магнетског кола су остављени су за даље усавршавање.

Драгоцену помоћ су пружили рецензенти, професор Милош Петровић и професор Драгутин Саламон. Аутор се захваљује професору Јожефу Варги на великој помоћи и подршци током израде ове књиге. Аутор се такође захваљује колеги Петру Матићу и професору Милићу Стојићу на корисним сугестијама и примедбама. Коментари и савети рецензената и наведених колега су помогли аутору у настојању да приступ излагању градива буде усклађен са предзнањем студената на другој години Електротехничког факултета као и да коришћени термини буду у складу са традицијом. Аутор се посебно захваљује својим сарадницима Николи Попову, Драгану Михићу и Игору Цветковићу на несебичној помоћи у припреми и техничкој обради рукописа.

PREFACE

This textbook is intended for engineering students taking their first course in electrical machines. It is also recommended for students preparing a capstone project where they need to understand, model, supply, control and specify electric machines. The book is primarily written for Electrical Engineering students. At the same time, it can be used as a valuable reference for other engineering disciplines involved with electric actuators, electric generators and drives. The book is self-contained and it comprises questions and answers and solved problems wherever the learning process requires an overview.

This book comes out of the fifteen years of authors experience teaching Electrical Machines at the Department of Electrical Engineering, University of Belgrade. Introductory Chapters are suited for second year students with a rather limited background in mathematics, physics, engineering fundamentals, circuit theory and electromagnetics. Prerequisites do not include spatial derivatives and field theory. Necessary background includes elementary electrostatics and magnetics, DC and AC current circuits and some elementary skill with complex numbers and phasors.

The scope of this textbook is the set of basic knowledge and skills in Electrical Machines the prospective engineers should acquire. The approach starts with basic functionality and the role of electrical machines in their typical applications, their electrical and mechanical connections and characteristics. Mathematical models of electrical machines are developed by using coordinate transforms. Before applying Clarke and Park transforms, the need for them is emphasized and the benefits are discussed, along with available options. The

effort of applying transforms is justified by obtaining a more intuitive, concise and easy-to-use model. Steady state operation is described by equivalent circuits and mechanical characteristics. Design and construction of practical machines is discussed in the extent needed to understand the principles of operation, the power losses and cooling, and the problems of power supply and control of electric machines. Details such as the slot shape and the disposition of permanent magnets are discussed as far as they affect the machine parameters and performance. The book covers DC machines, induction machines and synchronous machines. Design of magnetic circuits, windings and mechanical elements are left out of the scope.

The authors wishes to thank the reviewers, Prof. Miloš Petrović and Prof. Dragutin Salamon for their valuable comments and suggestions. In addition the author would like to thank Prof. Jožef Varga, renown expert in design of electrical machines. Particular contributions of Assistant Prof. Petar Matić and Prof. Milić R. Stojić made a significant improvements in this book consistency and value. The author owes special thanks to assistants Nikola Popov, Dragan Mihić, and Igor Cvetković for their help and devoted efforts in technical preparation of this manuscript.

Универзитет у Београду
електротехнички факултет
Булевар Револуције 73
Пошт. фах 816
11000 БЕОГРАД

Р Е Ц Е Н З И Ј А

рукописа проф.др Слободана Вукосавића
под насловом "Електричне машине"

Ова корисна и добро написана књига подељена је на четири поглавља
Електромеханичка конверзија (130 страна),
Машине за једносмерну струју (48 страна),
Асинхроне машине (95 страна),
Синхроне машине (65 страна).

Илустрована је великим бројем слика које доприносе разумевању текста, језик је правилан а терминологија у највећој мери усклађена са оном која се традиционално користила на Катедри за електричне машине ЕТФ у Београду.

На истој је у току протеклих 60 год. написан прилично велики број уџбеника-скрипата из дате области, који су углавном служили у директној настави и за припремање испита. Ово је, међутим, прва права књига из Електричних машина, чији значај превазилази потребе наставе, тј. предмета који аутор предаје у IV семестру Енергетског одсека. То свакако није недостатак ове одличне књиге, већ напротив представља њен квалитет. Другим речима она може да послужи и за усавршавање оних који више нису студенти а баве се овом проблематиком.

У текст је укључен знатан број "питања" на која се дају исцрпни одговори, чиме се доприноси разумевању материје али и подстиче читалац да креативно размишља и да се припреми на слична при провери знања.

Рукопис се препоручује за штампање у форми књиге.

"Електричне машине" С.Вукосавића доживеће више издања. Претпостављам да ће побудити интересовање и у другим срединама и да ће се, поред овог домаћег, појавити и латинично издање као и верзија на енглеском језику.

У Београду, 14.7.2009. год.

Милош Петровић

М. Петровић

RECENZIJA RUKOPISA

"ELEKTRIČNE MAŠINE"

Autor : prof. dr Slobodan Vukosavić

U razmatranom, vrlo obimnom, rukopisu dat je vrlo detaljan prikaz materije o električnim mašinama i, po saznanjima recenzenta, predstavlja prvo ovakvo delo na našim prostorima u kome je na jednom mestu data celopkupna materija iz oblasti opšte teorije električnih mašina i najčešće primenjivanih vrsta električnih mašina.

Celokupna materija je izložena na oko 400 strana teksta, sa literaturom koja obuhvata veliki broj osnovnih referenci iz ove oblasti sa svih jezičkih područja.

Zbog obimnosti materije u ovoj recenziji nije dat detaljan prikaz sadržaja rukopisa po pojedinim poglavljima i podpoglavljima, nego je dat samo pregled po osnovnoj podeli materije na pojedine oblasti koje su u njima tretirane.

Izložena materija je podeljena na četiri osnovne oblasti

- elektromehaničko pretvaranje energije,
- mašine jednosmerne struje,
- asinhrone mašine,
- sinhrone mašine.

U okviru poglavlja o elektromehaničkom pretvaranju energije prikazani su principi pretvaranja električne energije u mehaničku i obratno. Data je opšta analiza gubitaka u mašini za različite režime rada. Izvedeni su opšti izrazi za elektromagnetni momenat i indukovanu elektromotornu silu i prikazani su principi dobijanja sinusoidalnih elektromotornih sila podešavanjem oblika magnetnog polja ili koraka namotaja. Data je opšta teorija nastanka obrtnog polja za različite varijante napajanja namotaja rotora i statora.

U poglavlju o jednosmernim mašinama dat je prikaz primene opšte teorije na jednosmerne mašine i izvedeni su izrazi za elektromotornu silu i elektromagnetni momenat. Izveden je opšti matematički model mašine, prikazan postupak određivanja pogonskih karakteristika mašina. Na vrlo savremen način su prikazani principi upravljanja radom mašina primenom savremenih rešenja energetske elektronike.

U poglavlju o asinhronim mašinama također je dat prikaz primene opšte teorije mašina na asinhrone mašine. Pored opisa elemenata konstrukcije mašina, izveden je matematički model mašine u stacionarnom i rotirajućem koordinatnom sistemu. Analiziran je rad mašine u ustaljenom stanju, prikazana je analiza mehaničkih karakteristika mašine u pojedinim režimima rada i izvršena je analiza gubitaka u mašini. Na vrlo savremen način su prikazane mogućnosti upravljanja radom mašine u uslovima konstantnog i promenjivog napona napajanja i konstantne i promenljive učestanosti. Ukazano je i na specifičnosti konstrukcija asinhronih mašina koje rade sa promenljivom učestanosti.

U poglavlju o sinhronim mašinama analizirana je konstrukcija mašine, različite vrste pobudnih sistema, uključujući i pobudu u vidu stalnih magneta i objašnjen je princip nastanka obrtnog polja. Formiran je matematički model mašine, uvedena je dvoosna

α,β,o, a potom i Parkova d,q,o transformacija. Objašnjena je razlika između mašine sa cilindričnim rotorom i mašine sa rotorom sa isturenim poovima. Analiziran je rad mašine u stacionarnom stanju, sa izvođenjem vektorskih dijagrama i izvedene su jednačine za momenat mašine i definisane mehaničke karakteristike. Analiziran je i rad mašine priključene na krutu mrežu u stacinarnom i nestacionarnom stanju. Definisane su vremenske konstante, objašnjena pojava njihanja mašine i uloga prigušenja i prigušnog namotaja mašine. Dat je izraz za struju trofaznog kratkog spoja i analiziran uticaj pobude i prigušnog namotaja na ovu struju. Na kraju je analiziran rad sinhrone mašine napajane iz izvora promenjive učestanosti.

Izložena materija je ilustrovana velikim brojem slika i dijagrama koji dodatno doprinose njenom razumevanju. Jezik izlaganja je pravilan, a terminologija usklađena sa najnovijim standardima iz ove oblasti.

Dodatni kvalitet knjige je veliki broj primera koji prate izloženu materiju, a realizuju se kroz postavljena pitanja u vezi sa izloženm materijom i veoma obrazložene odgovore na ta pitanja, tako da se kroz nji dodatno objašnjava izložena materija.

Rukopis je namenjen prvenstveno studentima redovnih i master studija energetike na elektrotehničkim fakultetima, ali može veoma korisno poslužiti i inženjerima pri rešavanju problema vezanih za električne mašine sa kojima se susreću u svakodnevnoj praksi. Knjiga pored izražene edukativne ima i određenu naučnu namenu posebno istaknutu u prikazanim rešenjima koja se primenjuju za upravljanje pogonom pojedinih vrsta mašina.

Kao zaključak, recenzent smatra da se rukopis bavi značajnom oblašću električnih mašina na jedan vrlo savremen, ali i edukativan način i da će njegovo objavljivanje u velikoj meri pomoći studentima energetike na elektrotehničkim fakultetima u savladavanju ove materije. Istovremno, ova knjiga će će predstavljati i sastavni deo literature naučnih i stručnih radnika koji se bave problematikom vezanom za oblast električnih mašina.

Zato svega navedenog recenzent predlaže da se ovaj rukopis publikuje u formi knjige. Jedina dilema recenzenta je, s obzirom na obim materije, da li knjigu štampati u jednom ili više delova. Odluku o ovom pitanju recenzent sa zadovoljstvom prepušta autoru.

U Beogradu, 11. februara 2010.

Recenzent

Prof. Dragutin Salamon, dipl. inž.

САДРЖАЈ

1 УВОД 1
1.1 Енергетски претварачи и електричне машине 1
1.1.1 Обртни енергетски претварачи 1
1.1.2 Статички енергетски претварачи 2
1.1.3 Улога електромеханичког претварања енергије 2
1.1.4 Принципи рада 3
1.1.5 Магнетска и струјна кола 3
1.1.6 Обртне електричне машине 4
1.1.7 Реверзибилне машине 5
1.2 Значај и примена електричних машина 6
1.3 Величине и релације обртног кретања 11
1.3.1 Означавање величина и систем јединица 13
1.4 Циљана знања и начин излагања 15
1.4.1 Циљана знања о електричним машинама 16
1.4.2 Заменске шеме 16
1.4.3 Механичка карактеристика 16
1.4.4 Прелазни процеси у електричним машинама 17
1.4.5 Математички модел 18
1.5 Приступ анализи и редослед излагања 18
1.5.1 Потребна предзнања 20
1.5.2 Напомене о пројектовању електричних машина 21

2 Електромеханичко претварање енергије 27
2.1 Лоренцова сила 27
2.2 Узајамно дејство паралелних проводника 29
2.3 Електромоторна сила у покретном проводнику 30
2.4 Генераторски режим 32
2.5 Релуктантни моменат 34
2.6 Релуктантна сила 35
2.7 Дејство сила на проводнике у електричном пољу 36
2.8 Промена пермитивности 37
2.9 Пиезоелектрични ефекат 41
2.10 Магнетострикција 42

2.11 Претварачи са електричним спрежним пољем 43
2.11.1 Наелектрисање, капацитивност и енергија 43
2.11.2 Рад извора, механички рад и промена енергије 45
2.11.3 Израз за силу 46
2.11.4 Циклус претварања 48
2.11.5 Густина енергије поља и величина претварача 50
2.11.6 Пренос енергије путем поља 51
2.12 Претварач са магнетским спрежним пољем 52
2.12.1 Линеарни претварач 53
2.12.2 Обртни претварач 55
2.12.3 Контра-електромоторна сила 58
2.13 Магнетско коло 60
2.13.1 Анализа магнетских кола 61
Закон о конзервацији магнетског флукса 62
Уопштени облик Амперовог закона 62
Конститутивна веза магнетског поља и индукције 63
2.13.2 Вектор флукса 64
2.13.3 Карактеристике магнетисања феромагнетика 64
2.13.4 Магнетска отпорност кола 65
2.13.5 Енергија у магнетском колу 69
2.13.6 Референтни смер магнетског кола 70
2.14 Губици у магнетским колима 72
2.14.1 Губици услед хистерезиса 72
2.14.2 Губици услед вихорних струја 73
2.14.3 Укупни губици у магнетском колу 75
2.14.4 Начини за смањење губитака у гвожђу 75
2.14.5 Процена ефеката ламинације феромагнетика 77
2.15 Обртне електричне машине 80
2.15.1 Магнетско коло обртних машина 81
2.15.2 Механички прилаз 82
2.15.3 Намотаји 83
2.15.4 Жлебови у магнетском колу 85
2.15.5 Положај и ознаке оса намотаја 87
2.15.6 Губици у претварању 89
2.15.7 Поље у ваздушном зазору и у магнетском колу 92
2.15.8 Расположиви моменат, енергија поља 94
2.16 Моделирање електричних машина 98
2.16.1 Потреба за моделирањем 99
Проблеми моделирања 100
2.16.2 Занемарења 102
Занемарење ефеката расподељених параметара 102
Занемарење паразитних капацитивности 103

Занемарење губитака у гвожђу 103
Занемарење нелинеарности средине 103
2.16.3 Снага извора ... 104
2.16.4 Електромоторна сила ... 105
2.16.5 Једначине равнотеже напона ... 106
2.16.6 Флукс расипања ... 108
2.16.7 Енергија спрежног поља ... 112
2.16.8 Снага претварача ... 113
2.16.9 Израз за моменат ... 116
2.16.10 Механички подсистем ... 119
2.16.11 Губици у механичком подсистему ... 120
2.16.12 Кинетичка енергија ... 121
2.16.13 Модел механичког подсистема ... 122
2.16.14 Биланс снаге у електромеханичком претварачу ... 124
2.16.15 Једначине математичког модела ... 126
2.17 Једнострано и двострано напајани претварачи ... 127
2.17.1 Анализа једнострано напајаног претварача ... 129
2.17.2 Промена сопствене индуктивности ... 130
2.17.3 Израз за снагу и моменат ... 132
2.17.4 Анализа двострано напајаног претварача ... 135
2.17.5 Промена међусобне индуктивности ... 136
2.17.6 Израз за моменат ... 138
Средња вредност момента 139
Услови за развијање момента 140
2.17.7 Магнетски полови ... 141
2.17.8 Машине за једносмерну и наизменичну струју ... 142
2.17.9 Одређивање момента из векторског производа ... 143
2.17.10 Положај вектора флукса код обртних машина ... 146
2.17.11 Обртно поље ... 150
2.17.12 Врсте електричних машина ... 152
Машине за једносмерну струју 152
Асинхроне машине 153
Синхроне машине 153
2.18 Анализа магнетског поља у зазору ... 154
2.18.1 Статорски намотај са расподељеним навојцима ... 155
2.18.2 Простопериодично расподељени струјни плашт ... 158
2.18.3 Компоненте статорског поља ... 160
Аксијална компонента поља 161
Тангенцијална компонента поља 163
Радијална компонента поља 166
2.18.4 Преглед компоненти магнетског поља статора ... 170
2.18.5 Конвенција о представљању поља вектором ... 172

2.18.6 Компоненте роторског поља 177
Аксијална компонента поља 180
Тангенцијална компонента поља 180
Радијална компонента поља 182
Преглед компоненти магнетског поља ротора 184
2.18.7 Конвенција о представљању поља вектором..... 185
2.18.8 Интеракција статорског и роторског поља..... 187
2.18.9 Енергија магнетског поља у зазору 189
2.18.10 Електромагнетски моменат..... 193
Израз електромагнетски моменат 194
2.18.11 Флукс навојка и флукс намотаја 196
Флукс кроз један навојак статора 198
Флукс кроз један навојак ротора 199
Флукс намотаја 201
Вектор флукса намотаја 205
2.18.12 Положај осе намотаја и правац вектора флукса. 206
2.18.13 Векторски производ флукса статора и ротора 207
2.18.14 Услови за стварање константног момента 210
2.18.15 Веза момента и димензија машине..... 213
2.18.16 Обртно магнетско поље 215
Систем са два ортогонална намотаја 215
Систем са три намотаја 220
2.19 Електромоторне силе индуковане у намотајима 223
2.19.1 Подела електромоторних сила..... 224
2.19.2 Електромоторна сила навојка..... 224
Израчунавање првог извода флукса у навојку 225
Збрајање електромоторних сила проводника 226
Равнотежа напона у навојку 227
Облик електромоторне силе 228
Ефективна вредност електромоторне силе 229
2.19.3 Електромоторна сила намотаја 229
Концентрисани намотај 230
Расподељени намотај 230
Тетивни навојни сачинилац 231
Појасни навојни сачинилац 236
Навојни појас и елиминација виших хармоника 238
2.19.4 Електромоторна сила у сложеном намотају..... 242
2.20 Виши хармоници..... 243
2.20.1 Електромоторна сила у идеалном намотају..... 244
Одређивање флукса у једном навојку 246
Простопериодично расподељени намотај 247
Флукс намотаја са произвољном расподелом 249

2.20.2 Одређивање виших хармоника 250
2.20.3 Електромоторна сила намотаја 252
Елиминација виших хармоника 252
Флукс намотаја 252
Електромоторна сила 253

3 Машине за једносмерну струју 257
3.1 Конструкција и принцип рада 259
3.2 Конструкција статора 259
3.3 Машине са независном побудом 260
3.4 Струја у проводницима ротора 261
3.5 Механички комутатор 262
3.6 Намотај ротора 264
3.7 Комутација 269
3.8 Функција комутатора 272
3.9 Начин формирања намотаја ротора 273
3.10 Проблеми са комутацијом 278
3.11 Реакција индукта 282
3.12 Струјна и магнетска кола 284
3.13 Магнетска кола 285
3.14 Струјна кола 285
3.15 Директна и попречна оса машине 289
Векторски приказ флуксева појединих намотаја. 290
Резултантни флуксеви статора и ротора 290
Резултантни флукс машине 290
3.16 Електромоторна сила и моменат 292
3.17 Електромоторна сила арматурног намотаја 292
3.18 Стварање електромагнетског момента 295
3.19 Изрази за моменат и електромоторну силу 296
Одређивање електромоторне силе E_a 298
Одређивање момента M_{em} 299
3.20 Математички модел машине за једносмерну струју 300
3.21 Једначина равнотеже напона у намотају побуде 301
3.22 Једначина равнотеже напона у намотају ротора 303
3.23 Промена угаоне брзине обртања 305
3.24 Математички модел 306
3.25 Модел машине са сталним магнетима 307
3.26 Графички приказ математичког модела 307
3.27 Управљање моментом 309
3.28 Заменска шема за устаљена стања 310
3.29 Механичка карактеристика 312
Стабилна равнотежа 315

3.30 Стрмина карактеристике и брзина празног хода 316
3.31 Промена брзине обртања 317
3.32 Генератор за једносмерну струју 320
3.33 Напајање мотора за једносмерну струју..... 322
3.33.1 Утврђивање карактеристика извора за напајање арматуре..... 322
3.33.2 Четири квадранта у *M* - Ω и *U* - *I* дијаграму 324
I квадрант: 324
II квадрант: 325
III квадрант: 325
IV квадрант: 325
3.33.3 Четвороквадрантни енергетски претварач..... 325
3.33.4 Промена арматурног напона применом ширинске модулације 329
Потреба за променом арматурног напона. 330
Ширинска модулација 331
Средња вредност поворке импулса 331
Наизменичне компоненте напона 332
Нископропусна природа електричних машина 332
3.33.5 Валовитост струје 333
3.33.6 Топологије енергетских претварача..... 338
3.34 Основне карактеристике 341
3.34.1 Номинални напон..... 341
3.34.2 Механичка карактеристика..... 342
3.34.3 Природна карактеристика 342
3.34.4 Номинална струја 342
3.35 Термички модел машине и интермитенција..... 343
3.36 Номинални флукс 348
3.37 Номинална брзина 348
3.38 Слабљење поља 349
Рад са брзинама већим од номиналне 349
Промена момента и снаге у зони слабљења поља 350
Промена флукса у зони слабљења поља 351
Електромоторна сила у зони слабљења поља 351
Промена струје у зони слабљења поља 352
Промена момента у зони слабљења поља 352
Промена снаге у зони слабљења поља 352
Потреба за радом у зони слабљења поља 352
3.39 Транзијентна карактеристика 353
3.40 Експлоатациона карактеристика 353
3.41 Губици и биланс снаге 354
Снага извора 354

Губици у бакру побудног намотаја 355
Губици у бакру арматурног намотаја 355
Снага електромеханичког претварања 355
Губици у гвожђу 355
Губици у механичком систему (P_F) 355
Губици услед обртања (P_{Fe}+P_F) 356
Механичка снага 356
3.42 Номиналне и називне величине 358
3.43 Подаци који стоје на натписној плочици машине..... 358

4 Асинхроне машине 361
4.1 Елементи конструкције и принципи рада..... 363
4.2 Магнетско коло 364
4.3 Струјно коло 365
4.4 Кавезни и намотани ротор 367
4.5 Трофазни намотај статора..... 368
4.6 Обртно магнетско поље 370
4.7 Принципи развијања момента 372
4.8 Зависност момента од клизања и флукса 374
4.9 Моделирање трофазних асинхроних машина..... 375
4.10 Структура модела..... 376
4.11 Трофазне и двофазне машине..... 377
4.12 Кларкина трансформација 381
4.12 Двофазни еквивалент 383
4.13 Инваријантност 385
4.13.1 Кларкина трансформација са K = 1 389
4.13.2 Кларкина трансформација са $K = (2/3)^{0,5}$ 389
4.13.3 Кларкина трансформација са K = 2/3 390
4.14 Свођење на двофазни еквивалент 390
4.15 Модел статора 392
4.16 Једначине равнотеже напона у намотајима статора.... 393
4.17 Моделирање роторског кавеза..... 394
4.18 Једначине равнотеже напона у намотају ротора..... 396
4.19 Матрица индуктивности 397
4.20 Флукс расипања и међусобни флукс 397
4.21 Спрега статора и ротора..... 399
4.22 Елементи матрице индуктивности 400
4.23 Свођење роторских величина на страну статора 401
4.24 Једначине модела 403
4.25 Недостаци модела..... 404
4.26 Модел машине у синхроном координатном систему.... 407
4.27 Паркова обртна трансформација 408

4.28 Матрица обртне трансформације 410
4.29 Трансформисање роторских величина у *dq* систем 411
4.30 Представљање вектора комплексним бројем 413
Упрошћени запис обртне трансформације 413
4.31 Матрица индуктивности у *dq* систему 414
4.32 Једначине равнотеже напона у *dq* систему 416
4.33 Једначине модела у *dq* систему 417
4.34 Улазна снага 419
4.35 Израз за момент 419
4.36 Релативно клизање 420
4.37 Губици и механичка снага 420
4.38 Рад асинхроних машина у устаљеном стању 422
4.39 Аналогија са обртним трансформатором 425
4.40 Одређивање струја и момента из заменске шеме 427
4.41 Одређивање момента у устаљеном стању 429
4.42 Рад са релативним вредностима 432
4.43 Сведена вредност динамичког момента 436
4.44 Одређивање параметара заменске шеме 438
Мерење отпорности ротора 443
4.45 Анализа механичке карактеристике 445
4.46 Рад у области малих клизања 448
4.47 Рад у области великих клизања 450
4.48 Полазак мрежом напајане машине 451
4.49 Превални моменат и превално клизање 451
4.50 Клосов образац 453
4.51 Стабилна и лабилна равнотежа 454
4.52 Област трајног рада 456
4.53 Губици у асинхроним машинама и биланс снаге 457
4.54 Губици у асинхроним машинама 458
4.55 Снага обртног поља и унутрашња механичка снага 458
4.56 Веза напона и флуксева 460
4.57 Биланс снаге у моторном режиму рада 460
4.58 Промена брзине мрежом напајане машине 462
4.59 Ефекти промене амплитуде статорског напона 463
4.60 Машине са намотаним ротором 465
4.61 Промена броја полова 468
Утицај броја пари полова на изразе за брзину и м 471
4.62 Предности и мане вишеполних машина 471
Вишеполне машине напајане из статичких прет 472
Мрежом напајане вишеполне машине 473
Недостаци вишеполних машина 473
4.63 Двобрзински намотај статора 476

4.64 Ознаке за брзину и учестаност 478
4.65 Напајање из извора променљиве учестаности 479
4.66 Карактеристике извора променљиве учестаности 480
4.67 Топологија енергетског претварача 481
4.68 Импулсно ширинска модулација 481
4.69 Промена средње вредности фазног напона 482
4.70 Простопериодична промена напона 483
4.71 Импулсна природа напона 484
4.72 Валовитост струје код импулсног начина напајања 486
4.73 Фреквенцијски регулисане машине 488
4.74 Слабљење поља 490
4.75 Експлоатационе и транзијентне карактеристике 492
4.76 Граничне вредности величина у трајном раду 493
RI компензација 495
Критична брзина 496
4.77 Конструкција асинхроних машина 498
4.77.1 Мрежно напајане машине 498
4.77.2 Машине за рад са променљивом учестаношћу 501

5 Синхроне машине 503
5.1 Елементи конструкције и принципи рада 504
5.2 Намотаји статора 504
5.3 Обртно поље 505
5.4 Флукс побуде 508
5.5 Конструкција синхроних машина 511
5.6 Магнетско коло статора 511
5.7 Конструкција ротора 513
5.8 Напајање побудног намотаја са стране статора 514
5.9 Напајање побуде помоћу обртног трансформатора 515
5.10 Ротор са сталним магнетима 516
5.11 Основне карактеристике сталних магнета 518
5.12 Магнетска кола са сталним магнетима 520
5.13 Утицај начина уградње магнета на параметре машине 521
5.14 Утицај начина уградње магнета на карактеристике 523
5.15 Моделирање синхроних машина 524
5.16 Магнетопобудна сила статора 525
5.17 Двофазни еквивалент 527
5.18 Кларкина 3Ф/2Ф трансформација 528
5.19 Матрица индуктивности и равнотежа напона 531
5.20 Обртна трансформација 532
5.21 Матрица индуктивности 534

5.22 Приказивање вектора комплексним бројем 536
5.23 Једначине равнотеже напона..... 536
5.24 Модел електричног подсистема изотропне машине 538
5.25 Моменат изотропне синхроне машине 540
5.26 Синхроне машине са анизотропним ротором 541
5.27 Релуктантни момент..... 543
5.28 Релуктантни мотор 544
5.29 Анализа рада синхроне машине у устаљеном стању .. 546
5.30 Једначине равнотеже напона у устаљеном стању..... 546
5.31 Заменска шема 548
5.32 Вршне и ефективне вредности струја и напона..... 549
5.33 Фазорски дијаграм изотропне синхроне машине..... 551
5.34 Фазорски дијаграм анизотропне синхроне машине..... 555
5.35 Моменат анизотропне синхроне машине 556
5.36 Промена момента у функцији угла снаге 557
5.37 Механичка карактеристика синхроне машине 558
5.38 Рад синхроне машине напајане из круте мреже..... 559
5.39 Рад синхроног генератора у устаљеном стању 560
Увећање снаге турбине 561
Увећање мрежне учестаности 561
Промена реактивне снаге и напона 562
Промена угла снаге 562
5.40 Временске константе електричног и механичког подсистема..... 565
5.41 Њихање синхроне машине 565
5.42 Пригушење осцилација *LC* кола..... 568
5.43 Пригушење осцилација синхроне машине 571
5.44 Пригушни намотај 571
5.45 Кратак спој синхоне машине..... 573
Једносмерна компонента 574
Одређивање струје I_{SK1} 575
Одређивање струје I_{SK2} 576
Одређивање струје I_{SK3} 579
5.46 Одређивање струје квара коришћењем матрице $\underline{L}$ 580
5.47 Транзијентне и субтранзијентне појаве 583
Интервал 1 583
Интервал 2 583
Интервал 3 583
5.48 Машине напајане из извора променљиве учестаности 584
5.49 Принципи управљања моментом..... 585
5.50 Топологија претварача за напајање 586
5.51 Промена струје статора 587

5.52 Рад синхроне машине у области слабљења поља 589
5.53 Експлоатациона и транзијентна карактеристика 591

Литература 595

1 УВОД

1.1 Енергетски претварачи и електричне машине

Електричне машине су енергетски претварачи, направе које претварају један вид енергије у други. Енергетски претварачи стварају механички рад користећи електричну енергију, претварају електричну енергију система са једносмерним струјама у електричну енергију система са наизменичним струјама, претварају механички рад у електричну енергију, или трансформишу електричну енергију једног система напона и струја у енергију другог система.

1.1.1 Обртни енергетски претварачи

Електричне машине које претварају електричну енергију у механички рад називају се *електричним моторима* или електромоторима. Машине које претварају механички рад у електричну енергију називају се *електричним генераторима*. Механички рад се најчешће јавља у виду обртног кретања, тако да се електрични мотори и генератори називају и *обртни енергетски претварачи* или обртне електричне машине. Процес претварања електричне енергије у механички рад назива се *електромеханичко претварање* или *електромеханичка конверзија*. За разлику од обртних претварача, *енергетски трансформатори* су електричне машине које немају покретних делова и који претварају електричну енергију једног система наизменичних струја у енергију другог система наизменичних струја. Два система имају струје једнаке учестаности, али је напонски ниво другачији услед трансформације. У оквиру ове књиге проучавају се обртне електричне машине, електрични генератори и мотори, док су енергетски трансформатори дати у другим уџбеницима.

Електричне машине имају струјна кола, које чине изоловани проводници, као и магнетска кола, начињена од феромагнетских материјала. Машине стварају механички рад захваљујући дејству електромагнетских сила на проводнике и феромагнетике који се налазе у магнетском пољу. Услед

промене магнетског поља долази до индуковања електромоторних сила у проводницима, што омогућује да се генерише електрична енергија. Рад енергетских трансформатора заснива се на електромагнетској спрези примарних и секундарних намотаја који обухватају исто магнетско коло

1.1.2 Статички енергетски претварачи

Поред електричних машина, постоје и енергетски претварачи чији рад није базиран на електромагнетској спрези нити на спрезању струјних кола уз помоћ магнетског кола. Претварачи који садрже полупроводничке прекидаче снаге познати су под именом *статички енергетски претварачи* или уређаји енергетске електронике. Један од примера је диодни исправљач, који има четири снажне полупроводничке диоде повезане у мост. Напајан наизменичним напоном, диодни исправљач на својим излазним прикључцима даје напон који има једносмерну компоненту. Дакле, диодни исправљач обавља претварање електричне енергије наизменичних струја у електричну енергију једносмерних струја. Претварање електричне енергије једносмерних струја у електричну енергију система наизменичних струја врше инвертори, статички претварачи који садрже полупроводничке прекидаче у виду транзистора или тиристора начињених за велике струје и напоне. Статички енергетски претварачи су уско повезани са електричним машинама, али се не изучавају у оквиру ове књиге.

У страној и домаћој литератури сусрећу се изрази *конверзија енергије*, *енергетски конвертори*, *конверзија снаге* и *конвертори снаге*.

1.1.3 Улога електромеханичког претварања енергије

Електромеханичко претварање има кључну улогу у производњи и употреби електричне енергије. Електрични генератори производе електричну енергију, док су мотори потрошачи који значајан део електричне енергије претварају у механички рад, потребан за производне процесе, саобраћај и друге примене. Захваљујући електромеханичком претварању, енергија се преноси до удаљених потрошача путем електричних проводника. Електрични пренос је веома поуздан, није повезан са емитовањем гасова или других штетних супстанци, и обавља се уз врло мале губитке енергије.

Парне и водене турбине у електранама дају механички рад, који се предаје електричним генераторима. Унутар генератора одвија се процес претварања механичког рада у електричну енергију, која је доступна на прикључцима генератора у виду трофазног система наизменичних струја и напона. Далеководи високог напона преносе електричну енергију до индустријских центара и насеља, где каблови и водови дистрибутивне мреже

омогућују снабдевање потрошача, смештених у производним халама, транспортним средствима, канцеларијама и домаћинствима. Током преноса и дистрибуције, напон се више пута трансформише коришћењем енергетских трансформатора. Електрични генератори, електрични мотори и енергетски трансформатори су најзначајније компоненте *електроенергетског система*.

1.1.4 Принципи рада

Електромеханичко претварање енергије се може остварити применом различитих принципа физике. Рад електричних машина се најчешће ослања на магнетско поље које спреже струјна кола и покретне делове машине. На проводнике и делове феромагнетика у магнетском спрежном пољу делују електромагнетске силе, док промена флукса у струјним колима доводи до индуковања електромоторне силе. Основни физички закони који одређују електромеханичко претварање енергије у машинама са магнетским спрежним пољем су

- Фарадејев закон електромагнетске индукције, који дефинише везу промене магнетског флукса и индуковане електромоторне силе,
- Амперов закон, који описује стварање магнетског поља од стране проводника са електричном струјом,
- Лоренцов закон, који одређује силу што делује на покретна наелектрисање у магнетском и електричном пољу и
- Кирхофови закони, који дају везе напона и струја у струјним колима, као и везе флуксева и магнетопобудних сила у магнетским колима.

1.1.5 Магнетска и струјна кола

Процес електромеханичког претварања енергије у електричним машинама заснован је на интеракцији магнетског спрежног поља и проводника у којима постоји електрична струја. Магнетски флукс се усмерава магнетским колима, начињеним од феромагнетика. Електрична струја постоји у проводницима струјних кола. Магнетска кола се формирају слагањем гвоздених лимова међу којима стоји танак слој изолације, док се струјна кола израђују од изолованих бакарних проводника. Три најважније врсте електричних машина, машине за једносмерну струју, асинхроне машине и синхроне машине разликују се у конструкцији и начину успостављања маг-

нетског поља и струја у проводницима. Обртне електричне машине имају непокретни део, *статор*, и покретни део, *ротор*, који се може обртати око осе машине. Магнетска и струјна кола се могу налазити и на статору и на ротору. Поред магнетских и струјних кола, електричне машине имају и друге делове, као што је кућиште, вратило, лежајеви или прикључци струјних кола.

1.1.6 Обртне електричне машине

Механички рад код електричних машина може бити везан са обртним кретањем или транслацијом. Електричне машине су већином ротациони електромеханички претварачи који дају обртно кретање а њихов ротор има најчешће цилиндрични облик, какав је показан на слици 1.1. Електричне машине које стварају линеарно кретање зовемо *линеарни мотори*. Линеарни мотори су заступљени у малом броју.

Слика 1.1. Обртна електрична машина са цилиндричним ротором, доступним преко вратила, статором који има облик шупљег цилиндра, коаксијалног са ротором.

Струјна кола машине, то јест *намотаји*, могу се повезати са спољашњим електричним изворима или електричним потрошачима. Крајеви намотаја су доступни у виду електричних прикључака. На слици 1.1, прикључци намотаја k су означени словима A и B. Електрични прикључци представљају *електрични прилаз* машине. Будући да електричне машине обављају електромеханичко претварање, оне имају електрични и механички прилаз. Преко електричних прикључака, машина може примати електричну енергију из спољашњих електричних извора, или снабдевати електричне потрошаче у електричним колима изван машине. У случају када машина има N намотаја, снага електричног прилаза машине дата је једначином (1.1).

$$p_e = \sum_{k=1}^{N} u_k i_k \tag{1.1}$$

Ротор се налази унутар шупљег, цилиндричног статора. Дуж осе ротора налази се челично вратило, доступно на крајевима машине. Угаона брзина обртања ротора и вратила означена је ознаком Ω_m. Преко једног од крајева вратила, приказаног у десном делу слике 1.1, електрична машина може давати или узимати механички рад. Вратило представља *механички прикључак* машине. Оно преноси *обртни моменат* електричне машине спољашњим изворима и потрошачима механичког рада.

Електрични мотор претвара електричну енергију у механички рад који се путем вратила предаје радној машини. Мотор делује на радну машину кретним моментом M_{em}, док се радна машина противи кретању отпорним моментом M_m. У случају када је кретни моменат једнак отпорном, угаона брзина обртања Ω_m се не мења. Снага коју електрични мотор предаје радној машини одређена је производом брзине обртања и момента.

$$p_m = \Omega_m M_m \tag{1.2}$$

Електрични генератор претвара механички рад у електричну енергију. Он преузима механички рад од водене или парне турбине, тако да снага p_m има негативну вредност. Обртни моменат турбине M_m тежи да покрене ротор, док се моменат M_{em}, који ствара електрична машина, противи кретању. Усвајајући референтне смерове дате у десном делу слике 1.1, наведени моменти имају негативне вредности. Величина p_e, дата једначином (1.1), дефинише електричну снагу коју машина узима из спољашњих електричних кола, то јест снагу узету из електричне мреже. Будући да електрични генератор претвара механички рад у електричну енергију коју предаје електричној мрежи, код генератора снага p_e има негативну вредност.

1.1.7 Реверзибилне машине

Електричне машине су већином *реверзибилне*. Реверзибилна електрична машина може узети улогу генератора и претварати механички рад у електричну енергију, као и улогу мотора, када претвара електричну енергију у механички рад. Прелазак из генераторског у моторни режим рада је праћен променом електричних и механичких величина међу којима су напон, струја, моменат и брзина обртања. При промени режима рада реверзибилне машине није потребно чинити измене у конструкцији машине, нису потребне промене у везама струјних кола, нити треба мењати начин спреге

вратила и радне машине. Пример реверзибилне електричне машине је асинхрони мотор. При угаоним брзинама обртања ротора које су мање од *синхроне брзине*, асинхрона машина ради у моторном режиму. Ако се брзине обртања ротора повећа преко синхроне брзине, асинхрона машина се супротставља кретању, претвара механички рад у електричну енергију и ради у генераторском режиму.

Реверзибилно претварање енергије је приказано на слици 1.2. Смер слева надесно узима се као референтни смер за токове енергије и снаге. Снаге p_e и p_m, које постоје на електричном и механичком прикључку машине имају позитивне вредности у моторном режиму рада, док су у генераторском режиму ове вредности негативне. Претварање енергије је праћено губицима у струјним колима, у магнетским колима, као и механичким губицима енергије који су последица различитих трења услед обртања. Услед губитака, не постоји једнакост снага на електричном и механичком прикључку машине. У моторном режиму рада, добијена механичка снага p_m је нешто мања од уложене електричне снаге p_e услед губитака претварања. У генераторском раду, добијена електрична снага ($-p_e$) је нешто мања од уложене механичке снаге ($-p_m$) услед губитака.

Слика 1.2. Дијаграм реверзибилног обртног електромеханичког претварача.

1.2 Значај и примена електричних машина

Електрична енергија се производи радом електричних генератора. Произведена енергија се преноси и дистрибуира потрошачима, који су већином

електрични мотори и који стварају контролисано кретање у оквиру савремених производних машина, индустријских аутомата, робота, електричних возила и транспортних система.

Улога електричних машина у процесу производње, преноса, дистрибуције и употребе електричне енергије је на слици 1.3. За сваку од појединих фаза дат је кратак опис.

(A)

Електрична енергија се може добити коришћењем потенцијалне енергије воде сакупљене у акумулационом језеру, коришћењем енергије угља, природног гаса и других фосилних горива, коришћењем енергије ветра, плиме и осеке, коришћењем нуклеарне фисије, топлоте подземних вода, енергије сунца као и на друге начине. Наведени ресурси су *примарни енергетски извори*.

(B)

Примарна енергија се у електранама најпре претвара у механички рад. Сагоревањем фосилних горива, коришћењем термалних извора или нуклеарног реактора добија се топлота која се користи за загревање воде и производњу прегрејане водене паре. Прегрејана пара делује на лопатице парне турбине која се обрће брзином Ω_m, стварајући тако кретни моменат M_m. У хидроелектранама, ток воде се усмерава на лопатице водене турбине.

(C)

Добијена механичка снага $P_m = \Omega_m M_m$ се предаје електричном генератору, машини која обавља претварање механичког рада у електричну енергију.

(D)

У електранама се најчешће користе синхрони генератори снаге од 0,5 MW до 1000 MW. Статор генератора има три непомична *фазна намотаја*. На ротору постоји *побудни намотај* који одређује флукс ротора. Роторски флукс је непомичан у односу на сам ротор. Будући да се ротор обрће, то се и магнетско поље ротора обрће у односу на намотаје статора. Дакле, обртање ротора проузрокује промену флукса у намотајима. Услед промене флукса у намотајима се индукује електромоторна сила, а на крајевима статорског намотаја јављају се наизменични напони $u(t)$. Машина је повезана са преносном мрежом која има улогу електричног пријемника. У фазама статорског намотаја јављају се наизменичне струје које зависе од потрошача повезаних са генератором преко преносне мреже. Електрична снага добијена на прикључцима машине једнака је $p_e = \Sigma ui$. У садејству струја које постоје у проводницима статора и магнетског поља у генератору, јављају се електромагнетске силе које делују на ротор и које резултују електромагнетским моментом M_{em}. Електромагнетски моменат је мера механичке интеракције статора и ротора. Будући да је статор непомичан (учвр-

шћен), електромагнетски моменат делује на ротор. Код машине која ради као генератор, моменат M_m, добијен радом парне или водене турбине, тежи да покрене и убрза ротор, док се електромагнетски моменат M_{em} противи кретању. Уложена механичка снага је већа од добијене електричне снаге услед постојања снаге губитака у електричној машини. Поред губитака у самом генератору, један део произведене електричне енергије утроши се и на сопствену потрошњу електране. Савремене електране су опремљене трофазним синхроним генераторима[1].

(Е)

Електрична снага добијена на прикључцима генератора одређена је напонима и струјама. Систем наизменичних напона који постоји на крајевима статорског намотаја генератора има ефективну вредност напона од 6 kV до 25 kV, док је фреквенција у Европи 50 Hz док је у Америци 60 Hz. Генератор се повезује са *блок трансформатором* на чијем излазу се добија напон чији ниво одговара напону на далеководима преносног система[2].

---

[1] Крајем 19. века, производња, пренос, дистрибуција и употреба електричне енергије била је везана за једносмерне струје и напоне. Електране (*електричне централе*) су грађене у средишту насеља или у близини индустријских потрошача, и у њима су радили генератори једносмерне струје. Електрични мотори су такође били машине за једносмерну струју. Производња и употреба електричне енергије се тада ослањала на машине за једносмерну струју у улози генератора, као и у улози потрошача - електричних мотора за једносмерну струју. У то време нису постојали енергетски претварачи који би претварали низак једносмерни напон генератора у виши, повољнији за пренос. Стога је пренос енергије био праћен великом јачином струје и великим губицима енергије. Савремене преносне мреже користе трофазни систем наизменичних напона. Напонски ниво се може релативно лако мењати применом енергетских трансформатора. *Блок трансформатор* трансформише напон генератора на ниво високог напона који постоји на далеководима преносне мреже. Низ преносних и дистрибутивних трансформатора своди напон на ниво од 400 V, којим се напаја већина потрошача. У случају монофазних потрошача има се фазни напон од 231 V. Коришћењем трофазног система наизменичних струја може се остварити пренос електричне енергије на растојањима од неколико стотина километара, тако да савремене електране могу бити удаљене од потрошача.

[2] Код преноса електричне енергије далеководима на врло великим растојањима, већим од хиљаду километара, пренос наизменичним системом напона и струја се може заменити једносмерним преносом, то јест далеководима са сталним струјама и напонима. На почетку врло дугачке преносне линије користе се статички енергетски претварачи који енергију наизменичног система претварају у енергију једносмерног система. На крају линије постоји истоветан претварач који енергију једносмерног система претвара у енергију наизменичног система. На описани напон се умање пад напона на серијској реактанси далековода и значајно увећава снага коју далековод може пренети.

Ови напони се данас крећу до 750 kV, а ради се на увођењу напона од 1000 kV.

(F)

Далеководи високог напона преносе електричну енергију од електрана до градова, насеља, индустријских зона и саобраћајних чворишта у којима су груписани потрошачи електричне енергије. Дистрибуција електричне енергије се врши водовима нижег напона. Фабрике и стамбени блокови се најчешће напајају електричним водовима од 10(20) kV, који се помоћу трансформатора 10(20)/0,4 kV/kV своди на напонски ниво од 400 V и фазни напон од 231 V, којим се напаја већина потрошача. Пренос и дистрибуција електричне енергије су праћени губицима у водовима, као и преносним и дистрибутивним трансформаторима.

(G)

Код индустријских потрошача електрични мотори се налазе у оквиру стругова, преса, ваљаоница, глодалица, индустријских робота, манипулатора, конвејера, млинова, пумпи за потискивање флуида, вентилатора, елеватора, бушилица, виљушкара, као и других уређаја и направа у оквиру производних система и процеса. У домаћинству су мотори у оквиру уређаја за климатизацију, фрижидера, веш машина и машина за прање суђа, мотори у оквиру замрзивача, миксера, млинова, блендера, грамофона, CD/DVD уређаја, рачунара и рачунарске опреме. Око 8% укупне потрошње електричне енергије се утроши за напајање мотора у транспортним средствима као што је железница, градски саобраћај и електрични аутомобили.

(H)

У развијеним земљама, око 70% произведене електричне енергије се утроши у електричним машинама чија је намена да остваре контролисано кретање у индустрији, саобраћају, канцеларијама и домаћинствима. Дакле, може се закључити да се највећи део електричне енергије која се производи у генераторима, електричним машинама које претварају механички рад у електричну енергију, опет утроши у електричним машинама, електричним моторима, у којима се та енергија поново претвара у механички рад. Електрични мотори су спрегнути механички са радном машином, направом која користи механички рад и обавља производне радње, врши транспорт, потискује флуиде или обавља друге корисне радње. Ако брзину обртања електричног мотора и његов електромагнетски моменат треба мењати континуално, потребно је користити енергетске претвараче који прилагођавају напон напајања по амплитуди и учестаности потребама електричног мотора.

Слика 1.3. Улога електричних машина у производњи и потрошњи електричне енергије.

1.3 Величине и релације обртног кретања

Електричне машине су углавном обртне направе које поседују непокретни статор унутар кога се обрће цилиндрични ротор око осе која је заједничка за статорски и роторски цилиндар. У оси машине се налази челично вратило, којим се добијени механички рад може пренети радној машини. Постоје и линеарне електричне машине које стварају транслаторно кретање, али је њихова употреба ограничена на специјалне врсте транспорта и мањи број примена у роботици.

Положај (позиција) ротора се исказује углом израженим у радијанима и означава ознаком θ_m. Извод угла представља механичку брзину обртања, $\mathrm{d}\theta_m/\mathrm{d}t = \Omega_m$, изражену у радијанима у секунди. Знак брзине Ω_m зависи од усвојеног референтног смера. За позитиван смер обртања узима се смер супротан од казаљке на сату. У оквиру књиге, разматраће се и брзина обртања магнетског поља, као и других величина.

Брзина обртања сваке од посматраних величина ће се означавати великим грчким словом Ω, док ће мало слово ω бити резервисано за означавање електричне кружне учестаности. Бројна вредност брзине и учестаности се најчешће изражава у јединицама SI система, s^{-1}, то јест у радијанима у секунди. Ознака $f = \omega/2\pi$ представља фреквенцију изражену бројем циклуса у секунди (Hz). Брзина обртања ротора се може изразити и у обртајима у минуту,

$$n = \frac{60}{2\pi}\Omega_m \approx 9{,}54\,\Omega_m\,. \tag{1.3}$$

Моменат M_{em} који настаје у интеракцији магнетског спрежног поља и струје у проводницима намотаја називамо *електромагнетски моменат*. Електромагнетски моменат електричног мотора зове се и *кретни моменат*. Моменат M_{em} представља меру механичке интеракције статора и ротора. Позитивна вредност момента M_{em} наводи ротор на покретање у смеру супротном од кретања казаљке на сату. Моменат који је последица дејства силе на један од проводника одређен је производом силе F, која делује на проводник, и крака силе, одређеног у односу на осу ротације. На слици 1.4 је дата контура на коју делује спрег сила момента $M_{em} = FD$, где је $R = D/2$ крак сила које делују на дијаметрално супротно постављене проводнике.

На слици 1.4 је дата контура на коју делује спрег сила момента $M_{em} = FD$, где је $R = D/2$ крак сила које делују на дијаметрално постављене проводнике.

Електромагнетском моменту M_{em} се противи моменат оптерећења M_m, којим се механичко оптерећење или радна машина супротставља кретању. У случају да електромагнетски моменат превладава, то јест да је $M_{em} > M_m$, брзина обртања се увећава. У противном, брзина се смањује. Промена брзине обртања је одређена Њутновом једначином (1.4).

$$J\frac{\mathrm{d}\Omega_m}{\mathrm{d}t} = Ja = M_{em} - M_m \tag{1.4}$$

Слика 1.4 . Проводна контура на коју делује спрег сила које дају моменат.

Угаоно убрзање $a = \mathrm{d}\Omega_m/\mathrm{d}t$ се исказује у радијанима у секунди на квадрат [rad/s^2] и може се израчунати из Њутнове једначине. У устаљеном стању, угаоно убрзање је једнако нули. Тада је електромагнетски моменат M_{em} уравнотежен са моментом оптерећења M_m.

Моменат инерције J зависи од масе и облика свих обртних делова. У случају када је вратило ротора електричне машине круто спрегнуто са обртним масама радне машине, укупни моменат инерције $J = J_R + J_{RM}$ једнак је збиру момената инерције ротора J_R и обртних маса радне машине J_{RM}. На слици 5 приказана је радна машина спрегнута са електричним мо-

тором. Претпостављено је да обртне масе радне машине имају цилиндрични облик, полупречника R и масе m. Моменат инерције пуног цилиндра може се одредити према изразу $J = ½\ mR^2$.

Питање (1.1):

Радна машина има обртне масе у облику веома танког прстена полупречника R и масе m. Одредити моменат инерције радне машине.

Одговор (1.1):

$J_{RM} = mR^2$.

Слика 1.5. Електрични мотор (А) спрегнут са радном машином (В). Слово (С) означава побудни намотај мотора за једносмерну струју.

1.3.1 Означавање величина и систем јединица

У оквиру књиге, тренутне вредности посматраних величина се означавају малим словима (u_p, i_p, $p_p = u_p\ i_p$) док се устаљене вредности у режиму сталних струја и ефективне вредности у устаљеном простопериодичном режиму означавају великим словима (U_p, I_p, $P_p = U_p\ I_p$), у складу са препорукама међународне електротехничке комисије (IEC). Од препорука се одступа једино у означавању силе F, момента M и брзине обртања Ω. Великим словом M се означавају и тренутна и устаљена вредност момента стога што се мало слово m често користи за представљање других релевантних величина енергетских претварача. Брзина обртања се означава великим грчким словом Ω, док се малим словом ω означава кружна учестаност. Обе величине се изражавају у радијанима у секунди, односно јединицом s^{-1}. Релевантни вектори обртних машина су представљени у цилиндричном координатном систему. Вектори најчешће леже у равни јер им је z компонента једнака нули. Увођењем комплексне равни, сваки вектор се може преставити комплексним бројем чији реални и имагинарни део одговарају

пројекцијама раванског вектора на осе координатног система[3]. На пример, вектори напона и струје се означавају са $\underline{u}_S$ и $\underline{i}_S$. Треба уочити да наведене величине нису константе, тако да величине $\underline{u}_S$ и $\underline{i}_S$ нису фазори напона и струје. Наиме, њихови реални и имагинарни делови се током прелазних процеса могу независно мењати. У устаљеном стању величине $\underline{u}_S$ и $\underline{i}_S$ као и други вектори у комплексном запису постају комплексне константе. Њихове вредности тада постају фазори и означавају се ознакама какве су $\underline{U}_S$ или $\underline{I}_S$. Стационарне матрице се могу означавати са [A] или $\underline{\mathrm{A}}$. Све варијабле које могу узимати различите вредности бележе се *курзивом* (*италик*). Оператори sin, cos, rot, div, mod, оператор диференцирања d и други, као и мерне јединице, не могу се писати курзивом.

Вектор магнетске индукције, вектор магнетског поља, вектор силе и други вектори се у оквиру једначина означавају на уобичајени начин, са $\vec{B}$, $\vec{H}$, $\vec{F}$ и тако даље. При помињању вектора у тексту, овде се за вектор магнетске индукције пише B, за вектор магнетског поља H, за вектор силе F и тако даље.

Спрег магнетских сила се у оквиру књиге зове *електромагнетски моменат*. У оквиру уводних предмета електротехнике, силе које делују на проводнике у магнетском пољу се зову *магнетске силе*. Назив *магнетски моменат* је одговарајући, али литература у области електричних машина већином користи назив *електромагнетски моменат* па је он усвојен и у овој књизи.

У оквиру књиге, користи се интернационални систем јединица (SI) који је уведен 1954. године. Систем је усвојен у свим земљама света осим САД. Предност SI система је у томе што омогућује израчунавања без потребе за коришћењем нарочитих фактора скале. Дакле, применом SI система се губи потреба за памћењем и коришћењем нарочитих коефицијената којима се множи добијени резултат. На пример, прорачун рада W који начини сила F, делујући дуж пута l, обавља се тако што се помноже сила и пређени пут[4]. У случају да се користи SI систем, рад се одређује према изразу W[J] = F[N] l[m], без потребе за увођењем додатних коефицијената скале, јер је

[3] Представљање раванског вектора комплексним бројем се широко користи у стручној литератури о електричним машинама. На енглеском језику је уобичајен назив *space vector*. Сусреће се и назив *полифазор*. Овде се комплексни запис користи без посебне одреднице. У тексту се помиње "вектор $\underline{V}$" и подразумева да су у формалним запису јединични вектори правоуглог координатног система замењени реалном и имагинарном јединицом.

[4] Рад силе је $W = Fl$ под условом да је сила константна, да је померај праволи нијски и да се се правац и смер вектора силе поклапа са померајем.

1 J = 1 N × 1 m. У случају када се сила мери у килопондима, растојање у инчима или стопама, резултат *Fl* је неопходно помножити фактором скале како би се добио рад било у џулима или калоријама. Листа коришћених јединица је дата у прилогу. При анализи електричних машина, треба проверити јесу ли резултати исказани у коректним јединицама. При томе је од користи познавати везу основних и изведених јединица. Неке од корисних релација су V·s = Wb, Nm·rad/s = W, Nm·rad = J, A·Ω=V, A·H = Wb = V·s, итд.

1.4 Циљана знања и начин излагања

Познавање електричних машина је основ за успешан рад електроинжењера. Велики број уређаја и система које пројектује или користи електроинжењер у себи садрже једну или више електричних машина. Карактеристике уређаја и система су најчешће одређене перформансама електричних машина, њиховом величином, масом, степеном корисног дејства, остваривим моментом и брзином обртања, као и управљачким карактеристикама и брзином одзива. Стога је потребно стећи знања и вештине потребне за разумевања основних принципа рада електричних машина, основних механичких и електричних карактеристика машине, за решавање проблема напајања и управљања, као и основна знања о структури и природи губитака енергије у електричној машини и начинима хлађења.

Најзначајнији изазови у раду са електричним машинама су пројектовање магнетског кола и намотаја, решење проблема напајања и одређивање закона управљања. Машине треба пројековати тако да имају што мање димензије и масу, што мање губитке енергије, као и да и буду што јефтиније и робусније. Напајање и управљање машинама се данас обавља уз употребу статичких енергетских претварача и дигиталних сигналних контролера. Неки од циљева управљања генераторима су смањење губитака, смањење електромагнетског и механичког напрезања материјала, као и увећање количника између снаге и масе машине (то јест *специфичне снаге*). Управљање моторима треба да обезбеди што већу тачност и брзину у достизању кретног момента који је потребан за остваривање жељеног кретања радне машине.

Књига садржи основна знања о електричним машинама која су потребна будућим електроинжењерима. Приступ излагању полази од основне улоге и функције машине. Анализирају се карактеристике електричних и механичких приступа машине и одређују математички модел, заменске шеме и механичке карактеристике. У мери која је неопходна за разумева-

ње принципа рада, напајања и управљања, књига се бави и елементима конструкције машина, проблемима загревања и одвођења топлоте, као и специфичним несавршеностима магнетског кола и намотаја. У књизи се изучавају обртни електромеханички претварачи, док су трансформатори изостављени.

1.4.1 Циљана знања о електричним машинама

У свим применама електричних машина, потребно је имати представу о величини, маси, конструкцији, поузданости и губицима у електричној машини која одговара постављеном задатку. Пројектовање система који у себи садрже електричне машине, решење проблема напајања и управљања, пројектовање заштите и надзора, пројектовање регулатора серво мотора у роботици, као и регулација синхроних генератора у електропривреди захтева базична знања из електричних машина. Познавање електричних машина је неопходно код свих ситуација и задатака који могу бити постављени пред електроинжењера у индустрији, енергетици, аутоматизацији производње и роботици.

1.4.2 Заменске шеме

Пројектовање или избор напајања за одабрану електричну машину тражи утврђивање везе између напона и струја који постоје у намотајима. Поменута веза се представља заменском шемом, то јест заменским колом за устаљена стања. Заменска шема машине је електрично коло у коме постоје отпорници, реактивни елементи (калемови и кондензатори) и електромоторне силе. При раду у устаљеном стању, при константној брзини обртања и константној амплитуди и учестаности напајања, заменска шема омогућује израчунавање струја у намотајима. На основу величина које се одређују из заменске шеме, могуће је одредити флукс, моменат, снагу претварања и снагу губитака у машини која ради у устаљеном стању.

1.4.3 Механичка карактеристика

Одређивање брзине обртања и развијеног момента у устаљеном стању, при раду са механичким оптерећењем познатих карактеристика, потребно је познавати механичку карактеристику машине. Механичка карактеристика даје везу електромагнетског момента и брзине обртања ротора у устаљеном стању. Механичку карактеристику је могуће исказати функцијом $M_{em}(\Omega_m)$ и графички представити у M_{em}-Ω_m равни. Одређивање меха-

ничке карактеристике могуће је извршити коришћењем математичког модела машина.

1.4.4 Прелазни процеси у електричним машинама

Заменска шема и механичка карактеристика могу се користити у анализи електричних машина које раде у устаљеном стању, то јест у режиму у коме нема брзих промена момента, флукса, брзине обртања, струја и напона. Постоји велики број примена у којима је потребно остварити брзе промене момента и брзине обртања. У поменутим применама, неопходно је имати математичку представу електричне машине која одражава њено понашање у прелазним процесима. Оваква представа се зове *математички модел*. При одређивању математичког модела машине није могуће поћи од претпоставке да машина ради у устаљеном стању. Стога се овакав модел назива и *динамички модел*. Пример примене електричних машина у којој је неопходно користити динамички модел је управљање кретањем робота, електричних возила или производних машина. Управљање кретањем подразумева промену брзине и позиције алата, предмета обраде, возила или једног екстремитета индустријског робота по унапред дефинисаној путањи. У случају да дође до одступања вођеног тела са жељене путање, потребно је остварити релативно брзе промене силе (момента). Задатак регулатора брзине и позиције је да прорачуна силу (моменат) који треба применити да би се отклонило уочено одступање. Задатак електричног мотора је да оствари потребни моменат што брже и тачније. При раду робота потребно је остварити веома брзе промене момента како би се отклонио утицај који променљиви отпори кретању имају на брзину и позицију управљаног тела. Анализа рада електричне машине која се користи као погонски мотор у применама управљања кретањем захтева познавање прелазних процеса у машини.

Математички модел је потребан и за спровођење анализе прелазних процеса у синхроним генераторима који раде у електранама. У преносној мрежи догађају се нагла увећања и смањења оптерећења генератора, укључења и искључења потрошача, а не ретко и кратки спојеви. Анализа промене струје синхроног генератора током прелазних процеса се не може обавити коришћењем заменске шеме за устаљена стања, већ је неопходно располагати математичким моделом који је валидан и током прелазних процеса.

1.4.5 Математички модел

Математички модел је представљен скупом алгебарских и диференцијалних једначина које описују понашање електричне машине током прелазних процеса и устаљених стања. Једначине равнотеже напона у намотајима имају облик $u = Ri + \mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t$, док је промена брзине обртања одређена Њутновом диференцијалном једначином $J\,\mathrm{d}\Omega_m/\mathrm{d}t = M_{em} - M_m$. Величине J и R представљају параметре, док варијабле Ω_m и Ψ представљају променљиве које описују стање машине (*променљиве стања*). Модел електричне машине је потребан електроинжењеру ради анализе процеса претварања енергије, анализе губитака, сагледавања потреба за напајањем и управљањем, као и за решавање проблема који се могу јавити током примене машина. Стога је потребно да модел буде релативно једноставан и интуитиван, како би на сажет и прегледан начин приказао процесе и стања машине. *Добар модел* треба да буде темељан и компактан сажетак релевантних појава у електричној машини, погодан за доношење закључака и одлука везаних за напајање, управљање и коришћење електричних машина.

Постоје аспекти и појаве које нису од већег значаја, јер у веома малој мери утичу на рад електричне машине. Називамо их *секундарним* ефектима и најчешће занемарујемо, како би математички модел био прегледнији. На пример, у математичким моделима машина са магнетским спрежним пољем, енергија која постоји услед присуства електричног поља E се занемарује стога што је за неколико редова величине мања од енергије магнетског кола. Приликом моделирања, усвајају се и друга оправдана занемарења, и тако добија упрошћена представа која још увек одговара сврси. Добрим моделом сматрамо најједноставнији модел примерен проблему који се решава. Оправдана занемарења секундарних ефеката доводе до једноставнијих, прегледнијих модела веће употребне вредности.

У електротехници, модел је најчешће сет диференцијалних једначина које описују понашање неког система. Модел електричних машина и трансформатора се може свести на заменску шему која описује рад у устаљеним стањима. На основу модела, могуће је одредити механичку карактеристику електричне машине.

1.5 Приступ анализи и редослед излагања

Градиво изложено у књизи генерално је намењено студентима електротехнике. Основна знања из математике, физике и електротехнике налазе практичну примену у проучавању електричних машина, са којима се многи студенти сусрећу по први пут. Усвојен је приступ од општег ка поједи-

начном, како би полазници најпре сагледали изглед и сврху електричних машина, начине и места примене, спољашње карактеристике, начине напајања и управљања, као и губитке и проблеме у експлоатацији. Пажња је усмерена ка машинама за једносмерну струју, асинхроним и синхроним машинама. Друге врсте електричних машина нису детаљније разматране, као ни проблематика пројектовања електричних машина. Технике формирања намотаја, детаљи пројектовања магнетског кола, анализа секундарних аспеката динамике, специфични губици и детаљније познавање конструкције остављени су за даље усавршавање. Главни циљ књиге је упознавање са улогом електричних машина и проучавање њихових електричних и механичких својстава и карактеристика, како би се стекла способност за специфицирање, напајање, управљање и коришћење електричних мотора и генератора.

Проучавање електричних машина почиње упознавањем са основним принципима рада и сагледавањем функције електричних генератора и мотора у најчешћим применама. Излагање укључује анализу принципа електромеханичке конверзије и проучавање процеса конверзије на примеру електростатичке машине. Дефинисана је енергија спрежног електричног поља и спроведена анализа процеса размене енергије између поља, механичког приступа машине и електричног извора. Приказан је и анализиран једноставан електромеханички претварач са магнетским спрежним пољем. Дат је опис конструкције и улоге магнетског кола и намотаја машине, а потом наведени основни губици у машини. Анализа је потом усмерена ка ротационим електромеханичким претварачима са магнетским спрежним пољем, то јест обртним електричним машинама које су главни предмет проучавања. Дефинисани су концентрисани и расподељени намотаји, отпорност магнетског кола, дат је начин за прорачун флукса у навојку и намотају, а потом дефинисане сопствене, међусобне и расуте индуктивности. Објашњене су и анализиране магнетопобудне силе намотаја, као и електромоторне силе индуковане у концентрисаним и расподељеним намотајима. Анализирано је поље у ваздушном зазору и моделиран процес електромеханичког претварања у цилиндричној машини. Одређен је израз за моменат и снагу претварања у функцији векторског производа флукса и магнетопобудне силе статора и ротора. Анализирано је обртно магнетско поље и извршена подела на машине за једносмерну и наизменичну струју. Изведен је математички модел цилиндричне машине са N намотаја и дати изрази за електричну, механичку снагу као и снаге губитака у намотајима, магнетском колу и механичком подсистему. Уведена су и образложена уобичајена занемарења која се усвајају у анализи и моделирању електричних машина, и указано на примене и услове рада када се нека од наведених занемарења не могу применити.

После уводних, следе поглавља која се баве машинама за једносмерну струју (МЈСС), асинхроним (АМ) и синхроним машинама (СМ). Излагање започиње описом принципа рада предметне машине, стицањем увида у најзначајније аспекте њене конструкције, описом њених предности, недостатака и најчешћих примена Изводе се изрази за магнетопобудну силу, флукс, електромоторну силу, моменат и снагу претварања. Изводи се математички модел који описује понашање машине током прелазних процеса. У случају машина за наизменичну струју, моделирање машине укључује образложење и примену трофазно-двофазне трансформације и обртне трансформације релевантних величина.

На основу анализе рада у устаљеном стању, изводи се заменска шема која омогућује одређивање струја, напона, флукса, момента и снаге у устаљеним стањима, у којима су напон напајања и брзина обртања познати и непромењиви. Поред тога, математички модел се користи за добијање механичке карактеристике, која даје зависност устаљене вредности брзине обртања од момента који машина развија на вратилу. За сваку од машина, дата је анализа режима који се могу одржати у трајном раду, као и режима који се могу достићи у краћим интервалима.

Анализирана је снага губитака у намотајима и магнетском колу и проучени процеси загревања и хлађења. Дефинисане су највеће јачине струје, највеће снаге и највећи моменти које машина може остварити у трајном раду као и номиналне[5] односно трајно дозвољене вредности свих преосталих величина. Указано је на потребу за радом у области слабљења поља, и изведене релевантне релације и карактеристике.

Анализом промене трајно остваривог момента и краткотрајно достижног момента у функцији брзине, одређене су експлоатациона и транзијентна карактеристика машине. За сваку од машина, дате су основне информације о напајању и управљању, и приказане најчешће коришћене топологије енергетских претварача који се користе у напајању.

1.5.1 Потребна предзнања

Праћење излагања датог у оквиру књиге, усвајање знања и решавање постављених проблема тражи познавање математике, физике и основа електротехнике у обиму који је примерен првој години наставе на електротех-

[5] Трајно дозвољене вредности струје, напона, снаге, брзине и момента називају се *номиналним*. Вредности записане на натписној плочици уређаја или у произвођачкој спецификацији називају се *назначеним* или (ређе) *називним*. Назначене и номиналне вредности су најчешће једнаке. У ретким случајевима, произвођач може декларисати назначене вредности које су мање од номиналних.

ничким факултетима. Потребно је познавати основне законе кретања и практичне релације везане за обртно и транслаторно кретање. Од користи су знања о устаљеном електричном и магнетском пољу, као и познавање основних карактеристика и граничних услова за диелектрике и феромагнетике. У поглављу *2. Електромеханичко претварање енергије* предмет анализе су енергије и силе електростатичког и магнетског поља у диелектрицима, феромагнетицима и вакууму. Током излагања, решавају се једноставна електрична кола са једносмерним и наизменичним струјама. Поред тога, анализирају се и магнетска кола, у којима се одређује магнетопобудна сила (*магнетски напон*), флукс и магнетска отпорност. Потребно је познавати основне законе у електротехници, какав је Фарадејев закон електромагнетске индукције. Предмет изучавања је и расподела струје, енергије и поља у простору, па је потребно дефинисати координате и представити векторе у правоуглом координатном систему као и у цилиндричном координатном систему. Учињен је напор да градиво буде доступно читаоцу који нема вештину у раду са просторним изводима, какав је ротор или дивергенција. Стога вештина у раду са Максвеловим диференцијалним једначинама није од пресудног значаја. На место диференцијалних једначина, довољно је познавати њихов интегрални облик, какав је нпр. Амперов закон. Потребно је имати вештину у раду са комплексним бројевима и фазорима. За векторе који леже у равни, одређују се скаларни и векторски производи. При одређивању смера векторског производа, потребно је познавати правило десне завојнице. Од значаја је способност представљања и сагледавања односа међу тродимензионалним објектима, уочавање затворених површи које дефинишу домен, контура које дефинишу површи, као и нормала на површи. У оквиру књиге, израчунавају се релативно једноставни криволинијски и површински интеграли, као и линеарне диференцијалне једначине првог реда. Од користи је искуство у свођењу диференцијалних једначина на алгебарске применом Лапласове трансформације, као и способност обављања основних операција са матрицама и векторима.

1.5.2 Напомене о пројектовању електричних машина

Књига је написана без претензије да читаоца оспособи за пројектовање електричних машина. Главни циљ је проучавање електричних и механичких својстава и карактеристика машина са становишта корисника, са амбицијом да се читалац оспособи за избор адекватне машине, за решавање проблема напајања и управљања, као и проблема који се јављају током рада електричних мотора и генератора. Специфична знања потребна за пројектовање електричних машина су остављена за даље усавршавање. Пред-

услов за усвајање додатних знања је усвајање градива садржаног у оквиру ове књиге.

Потреба за вештином пројектовања електричних машина је већа него раније. Неки од разлога су следећи:

- Током прошлог века, пројектоване су и коришћене електричне машине за рад са константном, мрежном учестаношћу. Развој енергетских претварача који дају трофазне напоне променљиве амплитуде и учестаности омогућује да напајање електромотора буде прилагођено радном режиму. Све нове примене електромотора укључују и енергетски претварач за претварање мрежног напона, који прилагођава напон и учестаност тако да се оствари жељена регулација брзине, момента и флукса, као и да се оствари радни режим у коме је снага губитака умањена. Стога се јавља потреба за пројектовањем електричних машина за рад са променљивом учестаношћу напајања.

- Примена електричних мотора за покретање електричних возила и производних процеса тражи брзине обртања од неколико десетина хиљада обртаја у минуту, што изискује рад са наизменичним струјама фреквенције реда величине 1 kHz. Једнаком учестаношћу пулсира и магнетско поље у савременим серво моторима и вучним моторима. Брза промена магнетског поља изискује нова решења магнетског кола и примену нових врста магнетских материјала. Увећана учестаност струја тражи нова решења за формирање намотаја.

- Покретање индустријских робота тражи електричне моторе са брзим одзивом и малом инерцијом. Стога је потребно пројектовати синхроне моторе који на ротору поседују сталне магнете, који имају облик диска или шупљег цилиндра са двоструким ваздушним зазором.

- Све шира примена алтернативних и обновљивих извора енергије тражи пројектовање и примену синхроних генератора релативно мале снаге, променљиве учестаности и малих претварачких губитака.

- Градња термоелектрана са наткритичним параметрима омогућује да снага једног блока превазиђе 1 GW. Механичка снага блока, добијена из парне турбине, претвара се у електричну енергију уз помоћ синхроног генератора који ради са мрежном учестаношћу 50 Hz. Пројектовање генератора тако велике снаге тражи коришћење нових решења у пројектовању, нових изолационих и феромаг-

нетских материјала, као и нова решења за одвођење топлоте створене Џуловим ефектом.

Потрага за новим енергетским изворима и проблеми створени емитовањем топлоте у околину се могу умањити увећањем степена корисног дејства, то јест смањењем губитака електричних генератора и електричних мотора. Ефикасност електромеханичког претварања се може увећати адекватним управљањем, али и пројектовањем нових решења за генераторе и моторе.

Пројектовање машина са мањом снагом губитака: У свим применама електричних машина, од значаја је постићи велики степен корисног дејства и што мање губитке енергије у машини. Већа енергетска ефикасност даје мање топлотворне губитке и тако смањује топлоту коју електрична машина одаје у околни простор. Топлота која се емитује услед губитака енергије представља једну врсту загађења околине и треба настојати да се сведе на најмању могућу вредност. Поред тога, ефикасно одвођење топлоте (хлађење) често захтева нарочита техничка решења која увећавају цену и сложеност система. Коначно, смањењем губитака и ефикаснијом употребом електричне енергије смањује се потреба за градњом нових производних капацитета (електрана). Стога је све већа потреба за пројектовањем нових електричних машина које су конципиране тако да имају мале губитке енергије. Пројектовање нових решења за електричне генераторе и моторе повезано је са употребом нових материјала, какви су стални магнети, који омогућују градњу машина са сталном побудом, мањих губитака и већег степена корисног дејства. Ефикасно електромеханичко претварање тражи нова решења напајања електричних машина. Савремене електричне машине најчешће немају директан прикључак на мрежу индустријске фреквенције 50 Hz, већ се напајају из енергетских претварача снаге који претварају мрежни напон у облик који омогућује ефикасан рад машине. Прилагођење флукса машине радном режиму омогућује да се остваре уштеде у утрошеној електричној енергији. Успешно пројектовање машина за рад у склопу са енергетским претварачем захтева познавање процеса електромеханичког претварања који се одвија у машини, познавање природе и промене магнетског и електричног поља у машини, као и познавање процеса претварања унутар енергетског претварача.

Потреба за мањим утрошком гвожђа и бакра: Енергетска ефикасност електричних машина зависи и од количине енергије коју је потребно утрошити током процеса производње саме машине. Производња електролитичког бакра, алуминијума и гвоздених динамо лимова изискује утрошак великих количина енергије. Стога је енергетски ефикаснија машина чија конструкција садржи мање количине поменутих материјала. Кон-

струкција електричних машина има одређене сличности са енергетским трансформаторима. У оба случаја, направа има магнетско и струјно коло. Магнетско коло је начињено од гвоздених лимова, док се струјно коло састоји од изолованих бакарних проводника. Разлика је у томе што се електромоторна сила у намотајима електричних машина индукује услед кретања ротора у односу на статор, док трансформатор нема покретних делова, тако да се електромоторна сила у секундару јавља услед промене флукса примара. Трансформатори и електричне машине се по правилу користе у системима који садрже и енергетске претвараче, полупроводничке прекидаче снаге, сензоре, микропроцесорске управљачке системе и припадајући софтвер. Одлучујући фактор који опредељује цену система је утрошак гвожђа и бакра. Наиме, производња полупроводничких направа захтева веома мале количине материјала као што је монокристални силицијум са тровалентним и петовалентним примесама. Израда припадајућег софтвера представља трошак развоја и пројектовања, али не и производни трошак. Стога је од значаја пројектовати и реализовати уређаје, техничка решења и системе са смањеним утрошком гвожђа и бакра.

Смањење потребне количине активних материјала се може остварити на три начина:

У фази пројектовања система постоји могућност да се услови рада електричне машине, која представља део система, определе тако да ју је могуће начинити са мањим утрошком гвожђа и бакра. На пример, код примене управљања кретањем где се тражи покретачка снага P, преносни однос система зупчаника који повезује електрични мотор са оптерећењем може се одредити тако се тражена снага развија при већим брзинама обртања, што умањује потребни моменат $M_{em} = P/\Omega$, смањујући тако димензије машине и утрошак материјала.

У фази пројектовања електричне машине могуће је начинити магнетско и струјно коло на начин којим се штеди материјал. На пример, избором четворополне структуре, активни материјал је боље искоришћен него код двополне. Напомена: рад електричних машина са више пари магнетских полова ће бити објашњен у поглављу које се бави асинхроним машинама.

У фази експлоатације, могуће је применити напајање електричне машине и одредити алгоритам управљања тако да се из дате структуре магнетског и струјног кола добија већи моменат и снага. На такав начин се увећава специфични моменат и специфична снага (то јест моменат и снага по јединици масе) и тако смањује утрошак активног материјала.

Савремени алати за пројектовање електричних машина омогућују предвиђање њихових карактеристика пре израде прототипа. Тиме је пројекто-

вање знатно олакшано и убрзано, стога што је у релативно кратком времену могуће испитати неколико различитих решења и приступа. Проблеми у коришћењу рачунарских алата за пројектовање електричних машина настају у случају када пројектант претендује да алат уради стваралачки део посла. Рачунарски алат ће за сваки сет улазних података дати излаз, тако да корисник мора имати одређено искуство у пројектовању како би исправно интерпретирао добијене резултате и уочио грешке и нелогичности. Конзервативна употреба рачунарских алата састоји се у коришћењу рачунара у брзом, аутоматском обављању низа операција које би пројектант умео сам обавити када би за то имао довољно времена.

2 Електромеханичко претварање енергије

Електричне машине садрже покретне делове који се налазе у електричном или магнетском пољу. Поље делује на покретне и непокретне делове машине и има кључну улогу у процесу електромеханичког претварања. Стога се често назива и *спрежно поље*. У оквиру поглавља, дати су најзначајнији принципи стварања силе на покретне делове машине. У свим посматраним случајевима, сила се јавља услед дејства електростатичког или магнетског поља на покретне делове машине. У зависности од природе спрежног поља, машине делимо на магнетске и електростатичке.

2.1 Лоренцова сила

Електричне машине претварају електричну енергију у механички рад или врше претварање механичког рада у електричну енергију. У оквиру наредних разматрања, наведени су основни принципи на којима се заснива процес електромеханичког претварања енергије.

Један од физичких закона на које се ослања електромеханичко претварање енергије је и Лоренцов закон, који одређује силу што делује на тачкасто наелектрисање Q које се креће брзином v у електричном и магнетском пољу.

$$\vec{F} = Q\vec{E} + Q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \tag{2.1}$$

У електричним машинама, рад се најчешће заснива на магнетском спрежном пољу које делује на струјна кола и покретне делове машине. На проводнике и делове феромагнетика у пољу магнетске индукције B делују електромагнетске силе. Електрична струја која постоји у проводнику представља усмерено кретање наелектрисања, тако да се једначина (2.1) може користити у одређивању силе која делује на проводнике са електричном струјом.

На слици 2.1 приказан је праволинијски део проводника дужине l у коме постоји струја i и који се налази у хомогеном страном магнетском пољу индукције B. Електромагнетска сила F која делује на проводник зависи

од јачине струје i, дужине проводника l, магнетске индукције B и угла између правца простирања поља и проводника. У примеру који је дат на слици 2.1, проводник је нормалан на правац поља. Усвајајући Декартов координатни систем са осама x, y, и z, векторе магнетске индукције, дужине проводника и силе могуће је изразити преко одговарајућих јединичних вектора.

Слика 2.1. Сила која делује на праволинијски део проводника у хомогеном страном магнетском пољу.

$$\vec{l} = l\,\vec{i}_x, \qquad (2.2)$$
$$\vec{B} = -B\,\vec{i}_z,$$
$$\vec{F} = i\left(\vec{l} \times \vec{B}\right)$$

Будући да је вектор магнетске индукције нормалан на проводник, модул вектора електромагнетске силе је једнак $F = l \cdot B \cdot i$. Смер силе се одређује применом правила десне завојнице и мисаоним експериментом у коме се вектор l обрће у правцу вектора B. Уколико посматрани део проводника начини померај Δy у правцу осе y, ствара се механички рад $\Delta W_m = F\Delta y$. При кретању константном брзином v_y, механичка снага узима вредност $p_m = Fv_y$. У случају када сила делује у правцу кретања, снага p_m је позитивна и ради се у моторном режиму. У противном, смер кретања и смер дејства силе нису сагласни, снага p_m је негативна, механички рад се претвара у електричну енергију и ради се у генераторском режиму.

У проводнику који се креће у хомогеном, страном магнетском пољу, индукује се електромоторна сила e. Доцније ће бити показано да је производ између електромоторне силе e и струје i ($p_e = ei$) једнак производу између силе и брзине кретања ($p_m = Fv_y$). Узимајући да се губици енергије могу занемарити, моторни режим рада се може описати као претварање електричне снаге p_e у механичку снагу p_m. Релевантне снаге представљају изводе електричне енергије и механичког рада.

2.2 Узајамно дејство паралелних проводника

У претходном примеру анализиран је случај проводника који постоји у хомогеном страном магнетском пољу за које се сматра да је створено дејством спољашњих струјних кола или сталних магнета. Сила која делује на проводнике постоји и у случају када нема споља доведеног поља, већ када постоје два проводника у којима су успостављене електричне струје.

Слика 2.2. **(A) Магнетско поље и магнетска индукција праволинијског проводника. (B) Привлачна сила између паралелних проводника. (C) Одбојна сила између паралелних проводника.**

Магнетско поље које ствара један од проводника ступа у интеракцију са струјом у другом проводнику, према принципу датом на слици 2.1. Резултат ове интеракције је сила која делује на проводник.

Када струје у проводницима имају исти смер, сила тежи да приближи проводнике. У случају када су смерови струја супротни, јавља се сила која настоји да раздвоји проводнике.

У посматраном случају, сила која делује на паралелне проводнике је веома мала. Ако се узму два веома дуга и танка паралелна проводника са струјом од 1 A која стоје у ваздуху, на растојању од d = 0,1 m, тада се један од проводника налази у магнетском пољу које ствара други проводник. Магнетска индукција коју ствара веома дугачак проводник дата је једначином (2.3).

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi d} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{1}{2\pi \cdot 0{,}1}\ \mathrm{T} = 2 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{T} \tag{2.3}$$

Будући да су магнетско поље и магнетска индукција нормални на проводник, електромагнетска сила која делује на праволинијски део проводника дужине l = 1 m дата је једначином (2.4).

$$F = l \cdot B \cdot I = 2 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{N} \tag{2.4}$$

Доцније ће бити показано да коришћење магнетског кола, начињеног од феромагнетског материјала велике пермеабилности μ, усмерава флукс[1] и доводи до концентрисања линија магнетског поља на начин који омогућује вишеструко увећање магнетске индукције у зони проводника, чиме се значајно увећава електромагнетска сила која делује на проводнике као и снага претварања.

2.3 Електромоторна сила у покретном проводнику

Велики број електромеханичких претварача конвертује механички рад у електричну енергију, као на пример синхрони генератори у електранама. -

[1] Флукс је скаларна величина која нема смер. Флукс кроз површину S једнак је површинском интегралу вектора магнетске индукције B. Површ S се ослања на контуру C, тако да поменути површински интеграл називамо и *флуксом кроз контуру*. Флукс кроз равну површ S, постављену у хомогено страно магнетско поље тако да правац и смер нормале на S одговара правцу и смеру вектора магнетске индукције, једнак је $\Phi = BS$. Флукс се може интерпретирати као вектор тако што се скалару Φ придружи оријентација вектора магнетске индукције, то јест оријентација нормале на површ S.

На слици 2.3 је дат принцип на коме се, коришћењем механичког рада и механичке снаге, може добити електрична енергија и електрична снага. Слика приказује праволинијски део проводника дужине l, који се креће брзином v у смеру осе y Декартовог координатног система. Проводник се налази у хомогеном страном магнетском пољу, и покреће се дејством спољашње силе F_s. Смер вектора индукције B је супротан смеру осе z.

Кретање проводника у магнетском пољу доводи до стварања индукованог електричног поља E_{ind}. Јачину индукованог поља може измерити посматрач који се креће скупа са проводником. Ако на проводнику постоји честица са наелектрисањем Q, она је, на основу (2.1), изложена дејству силе.

$$\vec{F} = Q\vec{E} + Q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right) = Q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right) = Q\vec{E}_{ind} \tag{2.5}$$

У посматраном домену нема електростатичког поља, тако да је производ QE у претходној једначини једнак нули. Индуковано електрично поље могуће одредити дељењем силе F и наелектрисања Q, што даје векторски производ брзине и вектора магнетске индукције B.

$$\vec{E}_{ind} = \vec{v} \times \vec{B} \tag{2.6}$$

Слика 2.3. Индуковано електрично поље и електромоторна сила у праволинијском делу проводника који се креће у хомогеном страном магнетском пољу.

Од интереса је одредити електромоторну силу e индуковану у делу проводника дужине l. У општем случају, електромоторна сила индукована у

проводнику се одређује израчунавањем криволинијског интеграла вектора E_{ind} између крајева проводника. Будући да се индуковано електрично поље не мења дуж проводника, електромоторна се може израчунати на основу једначине (2.7).

$$e = \vec{l} \cdot \vec{E}_{ind} = \vec{l}\left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \tag{2.7}$$

У посматраном случају, проводник је постављен у правцу x осе, магнетска индукција постоји у правцу z осе, док је вектор брзине кретања проводника усмерен према y оси. Вектор индукованог електричног поља је колинеаран са проводником (2.8), тако да је индукована електромоторна сила једнака $e = lvB$. Знак индуковане електромоторне силе e везан је за усвојени референтни смер проводника, што је у посматраном случају оријентација вектора l.

$$\begin{aligned} &\vec{l} = -l\,\vec{i}_x, \quad \vec{B} = -B\,\vec{i}_z, \quad \vec{v} = v\,\vec{i}_y, \\ &\vec{E}_{ind} = -vB\,\vec{i}_x, \quad e = \vec{l}\vec{E}_{ind} = lvB \end{aligned} \tag{2.8}$$

2.4 Генераторски режим

На крајеве проводника, приказаног на слици 2.3, могу се прикључити крајеви непокретног отпорника, чиме се формира струјно коло у коме постоји индукована електромоторна сила e, проводне међувезе и отпорник отпорности R. Струјно коло је приказано на слици 2.4. Уз занемарење отпорности и индуктивности међувеза, у колу се успоставља струја $i = e/R$. Покретни проводник обављати функцију електричног генератора, док је отпорник R потрошач електричне енергије. Будући да смер струје у проводнику одговара смеру електромоторне силе, проводник је извор електричне снаге и енергије. Постојање струје у i-том проводнику ствара силу F_m која се противи кретању (2.2). Спољашња сила F_s делује у супротном смеру, савладавајући отпор кретању F_m. Од интереса је провести анализу рада система датог на слици 2.4, са циљем да се утврди веза између уложене механичке снаге $F_s v$ и добијене електричне снаге ei.

Електромоторна сила $e = lvB$, индукована у проводнику, једнака је напону $u = Ri$, који се јавља на отпорном потрошачу R. Електромагнетска сила која делује на проводник, приказан на слици 2.4, делује здесна на лево, и дата је једначином (2.9).

$$\vec{F} = i\left(\vec{l} \times \vec{B}\right) = -ilB\,\vec{i}_y \tag{2.9}$$

Одржавајући кретање, спољашња сила F_s врши рад против магнетске силе F_m и предаје га покретном проводнику. Трансфер механичког рада у електрични се обавља посредством појаве електромагнетске индукције. У покретном проводнику се јавља индукована електромоторна сила e, која одржава струју $i = e/R$ и врши електрични рад.

Слика 2.4. Праволинијски део проводника се креће у хомогеном страном магнетском пољу, преузима улогу генератора и напаја пријемник отпорности *R*.

У стању динамичке равнотеже, убрзање проводника је једнако нули, брзина кретања v је константна, тако да је збир сила које делују на проводник једнак нули.

$$\vec{F}_s + \vec{F}_m = 0; \;\; \vec{F}_s = -\vec{F}_m; \;\; \left|\vec{F}_s\right| = \left|\vec{F}_m\right| = ilB \tag{2.10}$$

Механичка снага спољашње силе F_s једнака је $P_m = F_s v = ilBv$. Индукована електромоторна сила e развија и предаје остатку електричног кола снагу $P_e = ei = ilBv = P_m$. Будући да је $P_e = e^2/R > 0$, посматрани систем претвара механички рад у електричну енергију. Током спроведене анализе, занемарени су губици енергије, тако да постоји једнакост између улазне, механичке снаге и излазне, електричне снаге ($P_e = P_m$).

Питање (2.1): У случају да се отпорник, приказан на слици 2.4, креће скупа са проводником, хоће ли се у колу успоставити електрична струја?

Одговор (2.1): При паралелном кретању проводника и отпорника, у свакоме од њих се индукују једнаке електромоторне силе чија се дејства потиру, тако да се у колу не успоставља струја.

2.5 Релуктантни моменат

Електромеханичко претварање енергије се може остварити и захваљујући настојању феромагнетског материјала да у магнетском пољу заузме положај са минималном магнетском отпорношћу. На слици 2.5 је приказан дугуљасти комад феромагнетика велике пермеабилности ($\mu_{Fe} >> \mu_o$), који је постављен укосо према линијама магнетског поља. Електромагнетске силе теже да доведу посматрани комад феромагнетика у вертикални положај, и коме ће бити колинеаран са пољем.

Слика 2.5. Услед релуктантног момента, комад феромагнетика тежи да заузме положај у коме је магнетска отпорност најмања.

Претпоставља се да магнетско поље постоји захваљујући непокретном сталном магнету. Покретни комад феромагнетика може да ротира, и он ће тежити да заузме вертикалан положај, у коме је магнетска отпорност на путу линија поља (флукса) мања, јер тада флукс постоји у гвожђу, чија је пермеабилност велика. Покретни комад феромагнетика (ротор) увек тежи да заузме положај колинеаран са линијама поља. Моменат који се јавља у посматраном (косом) положају тежи да доведе феромагнетик у вертикални положај. Овакав моменат се зове релуктантни, а посматрани принцип остварења момента релуктантни принцип. Овакав назив потиче од *релуктансе*, то јест магнетске отпорности која је у посматраном систему променљива. Ротор се може повезати са радном машином.

Релуктантни моменат тежи да доведе ротор у положај у коме је магнетска отпорност најмања.

Питање (2.2): Колика је вредност релуктантног момента који делује на ротор у случају да се он налази у хоризонталном положају?

Одговор (2.2):

Релуктантни момент тежи да доведе ротор у положај минималне магнетске отпорности. У хоризонталном положају, магнетска отпорност је највећа. Хипотетички померај ротора у било ком смеру доводи до једнаког умањења магнетске отпорности. Стога не постоји тежња да се ротор покрене на једну од страна, то јест, релуктантни моменат је једнак нули. У посматраном положају постоји лабилна равнотежа. Уколико би ротор начинио мали отклон на једну страну, појавио би се релуктантни момент који поспешује започето кретање.

2.6 Релуктантна сила

На слици 2.6, приказан је систем у коме *релуктантна сила* подстиче транслаторно кретање. Електромагнетска сила делује на комад феромагнетног материјала који се налази у нехомогеном магнетском пољу. Сила тежи да доведе комад феромагнетика на место где су линије вектора магнетске индукције *B* најгушће, то јест где је интензитет вектора *B* највећи.

Слика 2.6. Електромагнетске силе теже да привуку комад феромагнетика у унутрашњост калема.

Калем приказан на слици 2.6 има кружно намотане проводнике у којима постоји једносмерна струја. Овакав систем проводника ствара магнетско поље које се простире дуж калема, и има највећу јачину у калему. Комад покретног феромагнетика се може унети у унутрашњост калема, или извући изван калема.

Уколико је феромагнетик у калему, магнетска отпорност (*релуктанса*) на путу флукса је мала. Када је феромагнетик изван калема, релуктанса је велика.

Имајући у виду да комад покретног феромагнетика тежи да заузме положај у коме је магнетска отпорност минимална, јавиће се сила која тежи да покретни феромагнетик увуче у унутрашњост калема.

2.7 Дејство сила на проводнике у електричном пољу

Сила, снага и рад се могу добити и захваљујући деловању електричног поља E, као што је приказано на слици 2.7. У простору између две паралелне, наелектрисане плоче кондензатора јавља се електрично поље. У случају да је растојање између плоча значајно мање од њихових димензија, може се сматрати да је поље хомогено.

На унутрашњој површини плоча су распоређена наелектрисања. Поље између плоча делује на површинска наелектрисања силом која тежи да приближи плоче. Сила F може проузроковати кретање плоча. Уколико се једна од плоча помери за Δx, остварује се механички рад $F\Delta x$.

На датом принципу могу радити електромеханички претварачи са електричним пољем, то јест *електростатичке машине*.

Слика 2.7. Електричне силе делују на плоче наелектрисаног кондензатора и теже да смање растојање између плоча.

2.8 Промена пермитивности

Електромеханичка конверзија може бити заснована на електричној сили која делује на покретни комад диелектрика чија се пермитивност, то јест диелектрична константа, разликује од пермитивности средине. На слици 2.8, приказане су две наелектрисане плоче са покретним комадом диелектрика пермитивности $\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0$. Слободни простор између електрода испуњен је ваздухом пермитивности ε_0.

Комад диелектрика релативне пермитивности $\varepsilon_r > 1$ може се кретати у хоризонталном правцу. Кретањем улево, диелектрик долази у положај $x = a$, када у потпуности испуњава простор између плоча. Померањем удесно, диелектрик долази у положај $x = 0$, у коме је простор између плоча у потпуности испуњен ваздухом. Следећа анализа ће показати да на диелектрик у положају $0 < x < a$ делује електрична сила F која га увлачи у простор између плоча.

Слика 2.8. Електричне силе теже да у простор између плоча привуку комад диелектрика чија је пермитивност већа од пермитивности ваздуха.

Ако између плоча постоји напон U, електрично поље E у простору између плоча једнако $E = U/d$, где је d растојање између плоча. Проводне плоче представљају еквипотенцијалне површи, тако да релација $U = Ed$ важи једнако у ваздуху као и у диелектрику, што значи да су јачине електричног поља у оба медијума једнаке. Електрична индукција у диелектрику је $D = \varepsilon_r\varepsilon_0 U/d$, док је у ваздуху $D = \varepsilon_0 U/d$. Укупна енергија електричног поља дата је једначином (2.11), у којој је $S = ab$ површина плоча.

$$W_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{U}{d}\right)^2 \cdot \frac{a-x}{a}Sd + \frac{1}{2}\varepsilon_r\varepsilon_0\left(\frac{U}{d}\right)^2 \cdot \frac{x}{a}Sd = \tag{2.11}$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{U}{d}\right)^2 \cdot \frac{Sd}{a}\left[(a-x)+x\varepsilon_r\right]$$

У случају да су плоче прикључене на извор константног напона U, равнотежа између рада извора, промене енергије поља и механичког рада $F\Delta x$ добијеног померањем диелектрика дата је релацијом $\Delta W_i = \Delta W_e + \Delta W_{meh}$ (једначина 2.19). Стога је силу која делује на диелектрик могуће одредити на основу једначине (2.12).

$$F = \frac{\mathrm{d}W_e}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{U}{d}\right)^2 \cdot \frac{Sd}{a}(\varepsilon_r - 1) \tag{2.12}$$

Електричну силу F је могуће одредити коришћењем еквивалентног притиска на површи које раздвајају разнородне средине. На основу закључака електростатике, електрична сила која делује на раздвојну површ се може одредити на основу еквивалентног притиска $p = w_{e1} - w_{e2}$, где су w_{e1} и w_{e2} просторне густине електричне енергије поља у раздвојеним срединама. Будући да је густина енергије поља у ваздуху једнака $w_0 = \frac{1}{2}\varepsilon_0(U/d)^2$, док се у диелектрику има $w_d = \frac{1}{2}\varepsilon_r\varepsilon_0(U/d)^2$, силу F је могуће одредити на основу једначине (2.13), у којој је $S_d = bd = Sd/a$ правоугаона површ која раздваја две средине.

$$F = (w_d - w_0)S_d = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{U}{d}\right)^2 \cdot (\varepsilon_r - 1)\cdot \frac{Sd}{a} \tag{2.13}$$

Питање(2.3):

Одредити смер силе за случај када је извор раздвојен. Потребно је уочити да је укупно наелектрисање Q које постоји на плочама тада константно, док је напон између плоча променљив и зависи од положаја диелектрика.

Одговор(2.3):

У простору између плоча постоји хомогено електрично поље. Проводност $1/\rho$ металних плоча је врло велика тако да је потенцијал свих тачака на једној плочи исти. Стога је напон између плоча једнак U у делу испуњеном диелектриком као и у делу испуњеном ваздухом. Будући да је поље хомогено и нормално на плоче, производ Ed је једнак напону U, тако да нема разлике између поља $E=U/d$ у ваздуху и диелектрику. Будући да је

пермитивност диелектрика већа, тако је и електрична индукција D_d у диелектрику већа од индукције D_0 у ваздуху,

$$D_0 = \varepsilon_0 \frac{U}{d}, \;\; D_d = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{U}{d}.$$

Површинска густина наелектрисања σ на површини проводника одређена је скаларним производом вектора електричне индукције и нормале на површину у посматраној тачки,

$$\sigma = \vec{n} \cdot \vec{D}.$$

У посматраном случају, вектор електричне индукције је нормалан на површину проводника, то јест колинеаран са нормалном. Као последица, густина површинског наелектрисања σ, чија је вредност једнака јачини индукције D, биће већа у деловима плоча који належу на диелектрик. Усвајајући ознаке дате на слици 2.8, укупно наелектрисање Q се може изразити у функцији помераја x и вредности D_d и D_0,

$$Q = (a-x)b \cdot D_0 + xb \cdot D_d = (a-x)b \cdot \varepsilon_0 \frac{U}{d} + xb \cdot \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{U}{d} =$$

$$= b\varepsilon_0 \frac{U}{d}\left(a - x + x \cdot \varepsilon_r\right),$$

тако да је капацитивности C одређена изразом

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{b\varepsilon_0}{d}\left(a - x + x \cdot \varepsilon_r\right).$$

Будући да су плоче одвојене од извора, механички рад $\Delta W_{meh} = F\Delta x$ се добија тако што се за исти износ умањи електрична енергија поља, то јест, $\Delta W_{meh} = -\Delta W_e$. Стога се електрична сила може одредити према изразу $F = -\mathrm{d}W_e/\mathrm{d}x$. Електрична енергија спрежног поља се може изразити као $W_e = \frac{1}{2}Q^2/C$, односно $W_e = \frac{1}{2}CU^2$. У посматраном случају је наелектрисање Q константно, док је напон U променљив, тако електрична сила може одредити према изразу

$$F = -\frac{\mathrm{d}W_e}{\mathrm{d}x} = -\frac{Q^2}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{C}\right).$$

Диференцирањем реципрочне вредности капацитивности добија се следећи израз за електричну силу

$$F = -\frac{Q^2 d}{2b\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{a - x + x\cdot\varepsilon_r}\right) = \frac{Q^2 d}{2b\varepsilon_0}(\varepsilon_r - 1)\left(\frac{1}{a - x + x\cdot\varepsilon_r}\right)^2 .$$

Претходни израз је позитивног знака, тако да је смер дејства силе једнак као и у случају када је извор прикључен на плоче. Увођењем смене $Q = CU$ у претходни израз, електрична сила се може одредити према изразу

$$F = \frac{U^2}{2}(\varepsilon_r - 1)\frac{b\varepsilon_0}{d} = \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{U^2}{d^2}(\varepsilon_r - 1)\frac{Sd}{a} ,$$

који у свему одговара једначинама (2.12) и (2.13). Може се закључити да се у датом положају x, при одређеном наелектрисању и напону између плоча електрична сила неће променити укључењем односно искључењем извора.

Питање (2.4):

Посматрати плочасти кондензатор дат на слици 2.8 и сматрати да плоче нису прикључене на извор. Постоји ли разлика између поља E и D у делу простора између плоча који је испуњен ваздухом и делу у коме је диелектрик? Хоће ли се укупна енергија поља увећати или умањити у случају да се диелектрик помери тако да је у већој мери увучен између плоча?

Одговор(2.4):

У простору између плоча електрично поље је једнаке јачине, док је електрична индукција у простору који испуњава диелектрик ε_r пута већа од индукције у ваздуху. Просторна густина енергије поља у диелектрику $w_{ed} = \varepsilon_0\varepsilon_r E^2/2$ је ε_r пута већа од густине $w_{ev} = \varepsilon_0 E^2/2$ у ваздуху. Укупна енергија поља једнака је $w_{ev}V_v + w_{ed}V_d$, где су w_{ev} и w_{ed} густине енергије поља у ваздуху и диелектрику, док су V_v и V_d запремине међуелектродног простора у коме је ваздух, односно диелектрик. Када се комад диелектрика помакне према унутрашњости кондензатора, запремина V_v опада док запремина V_d расте. Будући да је $w_{ev} < w_{ed}$, постоје индиције да ће се укупна енергија поља увећати. Међутим, увлачење диелектрика у међуелектродни простор увећава капацитивност кондензатора, која је пропорционална пермитивности материјала у међуелектродном простору. Будући да је наелектрисање Q константно, увећање капацитивности ће умањити напон, па и поље E у унутрашњости кондензатора. Густина енергије поља је пропорционална квадрату поља E, тако да се може закључити како увлачење диелектрика у међуелектродни простор умањује укупну енергију спрежног електричног поља. Наведена разматрања се могу потврдити анализом израза за енергију поља $W_e(x)$,

$$W_e = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{Q^2}{2}\frac{d}{(a - x + x \cdot \varepsilon_r)b\varepsilon_0} ,$$

који показује да се, у случају да се наелектрисање Q не мења, укупна енергија електричног поља умањује при увлачењу комада диелектрика у унутрашњост плочастог кондензатора.

2.9 Пиезоелектрични ефекат

Притиском на кристал силицијума, на његовим наспрамним површинама јављају се наелектрисања, па самим тим и разлика у потенцијалу. Ова појава је позната под именом *пиезоелектрични ефекат*. Код пиезоелектричног микрофона, звучни талас проузрокује промену ваздушног притиска на површини кристала, што за последицу има променљиву силу која делује на кристал. Коначно, на крајевима кристала јавља се напон који представља електричну представу звука, и као такав може се даље обрађивати.

Нарочитом обрадом може се добити кристал код кога је зависност добијеног напона од примењене силе у великој мери линеарна. Такав кристал се може користити код прецизних електронских вага (уређаја за мерење тежине).

Обрнути пиезоелектрични ефекат се може користити у електромеханичкој конверзији. Уколико се на наспрамне површине кристала уграде проводне плоче и на њих доведе променљиви напон, јавиће се сила која пулсира у складу са променама напона. Описане ефекат се може користити за стварање веома малих контролисаних помераја. Уколико доведени напон представља електронски запис звука, тада ће варијације силе проузроковати вибрације површина кристала као и варијацију ваздушног притиска у складу са звучним записом. На описани начин раде пиезоелектрични звучници.

Померање површина кристала под утицајем промене доведеног напона мери се стотим деловима милиметра. Мотори засновани на пиезоелектричном ефекту користе се у случајевима где треба вршити веома прецизне мале померање, какви се врше током позиционирања читачких глава тврдих дискова.

Слика 2.9. Промена притиска који делује на наспрамне површине кристала доводи до промене напона који се може измерити између наспрамних површина.

2.10 Магнетострикција

Један од принципа који се може искористити за електромеханичко претварање је *магнетострикција*. Генерално, дејство магнетског поља доводи до сакупљања магнетског материјала и та појава зове се магнетострикција. Дужина штапа на слици 2.10 смањује се код увећања магнетског поља. Ефекат се може искористити за развијање силе, која ће, помножена са померајем, дати механички рад. Ипак, електромеханичких претварача базираних на ефекту магнетострикције је веома мало стога што се могу начинити само мали помераји.

Појава магнетострикције се углавном користи за мерење врло великих сила и напрезања на основу промене магнетских својстава материјала у условима механичког напрезања. На описаном принципу је могуће одредити напрезања у елеменатима челичне конструкције.

Слика 2.10. Карактеристика магнетисања се мења у функцији силе која сабија или истеже комад феромагнетског материјала.

Будући да електричне машине најчешће имају магнетско поље које пулсира на мрежној фреквенцији од 50 Hz, магнетострикција проузрокује вибрације магнетског кола. Вибрација површина доводи до ваздушног фронта променљивог притиска и звука, који се субјективно доживљава као зујање.

2.11 Претварачи са електричним спрежним пољем

Електромеханичко претварање у електростатичкој машини постоји захваљујући електричном пољу. Електрично поље је предуслов за електромеханичко претварање енергије. Оно постоји у средини између покретних електрода и узрок је појави електричних сила које делују на електроде, па се стога зове и спрежно поље.

Анализа електромеханичког претварања енергије заснованог на електричном спрежном пољу може се спровести на примеру плочастог кондензатора са покретним плочама, какав је дат на слици 2.11. У случају да су плоче значајно већих димензија од размака између њих ($S >> d^2$), електрично поље између електрода је хомогено и једнако $E = U/d$ [V/m], где је U напон између плоча. Поље вектора електричне индукције D [As/m^2] се добија множењем јачине поља E са пермитивношћу средине ε_0. Силе које делују на плоче зависе од наелектрисања кондензатора. Уколико постоји могућност да се једна од плоча помера, тада производ силе и помераја даје механички рад. Механички рад се може добити на рачун електричне енергије поља или рада извора на који су плоче прикључене.

2.11.1 Наелектрисање, капацитивност и енергија

Будући да је електрично поље у међуелектродном простору хомогено, интензитет поља је одређен количником напона и размака између плоча, $E = U/d$. Јачина електричне индукције D једнака је површинској густини наелектрисања Q/S. Истовремено је однос јачине електричне индукције D и јачине електричног поља E одређен пермитивношћу (диелектричном константом) ε_0.

$$E = \frac{U}{d};\ \ D = \sigma = \frac{Q}{S} = \varepsilon_0 E;\ \Rightarrow\ Q = \varepsilon_0 ES = \varepsilon_0 S\frac{U}{d} \tag{2.14}$$

Слика 2.11. Плочасти кондензатор са растојањем између плоча које је много мање од димензија плоча.

Капацитивност плочастог кондензатора C одређује однос наелектрисања плоча Q и напона U. Капацитивност зависи од површине плоча, размака између њих и пермитивности материјала који испуњава међуелектродни простор.

$$C = \frac{Q}{U} = \varepsilon_0 \frac{S}{d} \tag{2.15}$$

Укупна енергија спрежног електричног поља може се добити интеграцијом густине електричне енергије w_e у области у којој постоји поље. У посматраном случају, електрично поље и електрична енергија постоје у простору између електрода. Густина електричне енергије се не мења и једнака је $w_e = ½\, \varepsilon_0 E^2$. Запремина домена у коме постоји поље једнака је $V = Sd$, тако да је укупна енергија спрежног електричног поља једнака $W = ½\, CU^2 = ½\, Q^2/C$.

$$W_e = \int_V w_e \,\mathrm{d}V = \int_V \left(\int \vec{D}\,\mathrm{d}\vec{E}\right)\mathrm{d}V = \int_V \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\right)\mathrm{d}V = \tag{2.16}$$

$$= Sd\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\right) = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{Q^2}{2C}$$

2.11.2 Рад извора, механички рад и промена енергије поља

На слици 2.12, приказан је наелектрисани плочасти кондензатор са покретном горњом плочом. Може се показати да при кретању горње плоче наниже долази до претварања електричне енергије у механички рад. Наелектрисања на плочама су супротног поларитета, тако да на њих делује привлачна сила F. Уколико се горња плоча помери наниже, и тако приближи доњој за Δx, остварује се механички рад $F\Delta x$. При померају, мења се енергија W_e спрежног електричног поља и може доћи до размене наелектрисања између плоча и електричног извора.

Електричну силу F која делује на једну од плоча кондензатора могуће је одредити користећи се методом *виртуелних радова*, то јест виртуелних поремећаја. Потребно је замислити да је покретна плоча под дејством електричне силе начинила мали померај Δx. У посматраном случају, правац и референтни смер силе одговарају начињеном померају. Потребно је одредити рад ΔW_e који електрична сила изврши при том померају, а из тог рада је могуће одредити тражену електричну силу. Примена метода виртуелних радова у случају када покретни део врши обртно кретање тражи одређивање рада који спрег електричних сила (то јест моменат) изврши при малом угаоном померају $\Delta\theta$.

На десној страни слике 2.12 је приказан извор константног напона U који се затварањем прекидача може довести у везу са плочама. Смањењем размака између плоча, капацитивност C се увећава. Уколико је извор прикључен, напон између плоча је константан. Услед увећања капацитивности, наелектрисање плоча $Q = CU$ се увећава, тако да из извора на плоче пристиже додатно наелектрисање ΔQ. Рад извора једнак је $\Delta W_i = U\Delta Q$, док је добијени механички рад једнак $\Delta W_{meh} = F\Delta x$. Рад извора увећава укупну енергију система, то јест збир електричне енергије и механичког рада. У случају константног напона, електрична енергија је дата једначином (2.17).

У наредним разматрањима, биће показано да се рад извора дели на два једнака дела, то јест да је $\Delta W_e = \Delta W_{meh} = ½\ \Delta W_i$.

Уколико се отвори прекидач на слици 2.12, извор је одвојен од плоча, па је рад извора једнак нули. Количина наелектрисања на плочама се не може променити, тако да је јачина поља D између плоча константна, па је и густина енергије поља непромењива.

Приближавањем плоча се укупна енергија поља умањује, услед смањења запремине домена у коме се има поље. Добија се механички рад на рачун умањења енергије поља, па је $\Delta W_{meh} = -\Delta W_e$. У случају константног наелектрисања, електрична енергија је дата једначином (2.18).

$$W_e(\Delta x) = S\,(d - \Delta x)\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\right) = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{U^2}{2}\frac{\varepsilon_0 S}{d - \Delta x} \tag{2.17}$$

$$W_e(\Delta x) = S\,(d - \Delta x)\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\right) = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2}\frac{d - \Delta x}{\varepsilon_0 S} \tag{2.18}$$

Слика 2.12. Плочасти кондензатор са покретном горњом плочом.

2.11.3 Израз за силу

Машине које раде на принципу електричног спрежног поља називају се електростатичким. Када у простору у коме се јавља електрично поље постоји *линеарни* диелектрик, то јест диелектрик у коме је вектор електричне индукције линеарно сразмеран вектору поља, електростатичку машину називамо линеарном. Структура приказана на слици 2.12 представља линеарну електростатичку машину у којој нема губитака енергије. Стога се механички рад $\Delta W_{meh} = F\Delta x$ у случају константног наелектрисања одређује према изразу $\Delta W_{meh} = -\Delta W_e$, док је у случају константног напона има $\Delta W_{meh} = ½\ \Delta W_i$. Према датим изразима, сила се може одредити као парцијални извод енергије спрежног поља по координати x, везаној за осу у којој постоји слобода кретања посматране електроде.

У случају када је извор искључен, систем на слици 2.12 има константно наелектрисање. Применом метода виртуелних радова добија се рад извора, промена електричне енергије поља и механички рад (2.19).

$$\Delta W_i = U\ \Delta Q = 0 \qquad (2.19)$$
$$\Delta W_i = \Delta W_{meh} + \Delta W_e \quad \Rightarrow \quad \Delta W_{meh} = -\Delta W_e$$

Сила F, која делује на покретну електроду у случају кад је извор искључен дата је једначином (2.20). У случају када су промене ΔW_e и Δx инфинитезимално мале, однос $\Delta W_e/\Delta x$ узима вредност првог извода функције $W_e(x)$ по аргументу $x = \Delta x$ у тачки $x = 0$.

$$F = -\frac{\Delta W_e}{\Delta x} \qquad (2.20)$$
$$F = -\frac{\mathrm{d}W_e}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\frac{Q^2}{2}\frac{d-x}{\varepsilon_0 S}\right\} = \frac{Q^2}{2S\varepsilon_0}$$

Уколико је извор укључен, посматрани систем има константан напон. Применом метода виртуелних радова добија се рад извора, промена електричне енергије поља и механички рад (2.21).

$$\Delta W_i = U\ \Delta Q; \quad \Delta W_e = \Delta\left(\frac{CU^2}{2}\right) = \frac{1}{2}U\ \Delta Q = \frac{1}{2}\Delta W_i \qquad (2.21)$$
$$\Delta W_i = \Delta W_{meh} + \Delta W_e \quad \Rightarrow \quad \Delta W_{meh} = \Delta W_i - \Delta W_e = \Delta W_e$$

Сила F, која делује на покретну електроду у случају кад је извор укључен дата је једначином (2.22). Будући да су промене ΔW_e и Δx инфинитезимално мале, однос $\Delta W_e/\Delta x$ узима вредност извода $\mathrm{d}W_e(x)/\mathrm{d}x$.

$$F = +\frac{\mathrm{d}W_e}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\frac{U^2}{2}\frac{\varepsilon_0 S}{d-x}\right\} = \frac{U^2}{2}\frac{\varepsilon_0 S}{(d-x)^2} = \qquad (2.22)$$
$$= \frac{E^2}{2}\varepsilon_0 S = \frac{D^2}{2\varepsilon_0}S = \frac{Q^2}{2S\varepsilon_0}$$

Изрази за електричну силу дати једначинама (2.20) и (2.22) могу се применити у случајевима када је средина линеарна, то јест, када пермитивност средине не зависи од јачине поља. У случају када извор није повезан, померај покретних делова не доводи до промене наелектрисања, већ доводи до промене капацитивности C и напона. Стога израз за силу у случају када је извор искључен узима следећи облик,

$$F = -\frac{\mathrm{d}W_e}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\frac{Q^2}{2}\frac{1}{C}\right\} = -\frac{Q^2}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\frac{1}{C}\right\}.$$

Уколико је извор повезан у коло, напон се одржава константним, тако да померај покретних делова доводи до промене капацитивности C и наелектрисања. Стога израз за силу у случају када је извор прикључен узима следећи облик,

$$F = +\frac{\mathrm{d}W_e}{\mathrm{d}x} = +\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\frac{U^2}{2}C\right\} = +\frac{U^2}{2}\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}.$$

Питање (2.5):

Једначина (2.20) даје израз за силу F која делује на покретну електроду у случају кад је извор искључен, док једначина (2.22) даје силу која делује у случају када је извор укључен. Приметити да се у оба случаја добија исти резултат, сразмеран квадрату наелектрисања Q. Може ли сила која делује на покретну електроду у датом положају бити независна од стања прекидача који спаја извор са плочама? Дати образложење.

Одговор (2.5):

Електрична сила која делује на покретну плочу може се представити као збир сила које делују на наелектрисања расподељена по површини плоче. Појединачне силе зависе од густине наелектрисања и електричног поља које постоји у близини електроде. Постављено питање тражи поређење силе која се има у случају да су плоче прикључене на извор и силе која постоји када извор није прикључен. Ако у оба случаја на плочама постоје иста наелектрисања, тада је једнака и густина наелектрисања на плочама. Будући да површинска густина наелектрисања одређује и електричну индукцију D, тада је два посматрана случаја постоји и једнакост у јачини електричног поља $E=D/\varepsilon_0$. На основу тога се може закључити да у оба случаја на покретну плочу делује иста сила.

2.11.4 Циклус претварања

У претходном одељку, показано је да се електромеханичко претварање може вршити на два начина. У случају да извор није прикључен, механички рад ΔW_{meh} добија на рачун електричне енергије спрежног поља, $\Delta W_{meh} = -\Delta W_e$. Уколико је извор прикључен, рад извора ΔW_i се дели на два једнака дела, тако да је $\Delta W_e = \Delta W_{meh} = ½\ \Delta W_i$. Електромеханичко претварање је

графички приказано на слици 2.13. Од значаја је приметити да се ниједан од два приказана начина не може трајно одржати.

Уколико је извор прикључен, електромеханичко претварање се обавља тако што се рад извора делом претвара у механички, док остатак увећава електричну енергију акумулирану у спрежном пољу. Енергија поља W_e зависи од густине $w_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ и запремине домена у коме постоји поље. Максимална вредност електричног поља је ограничена диелектричном чврстоћом материјала. Највећа јачина поља у ваздуху износи $E_{max} \approx 30$ kV/cm. Прекорачење максималне вредности поља доводи до појаве пробоја, пражњења или електричног лука, што резултује разарањем диелектрика. Стога је густина електричне енергије w_e ограничена. Будући да је ограничена и запремина домена, може се закључити да постоји максимална електрична енергија $W_{e(max)}$ коју није могуће прекорачити. Дакле, није могуће остварити сталан раст електричне енергије спрежног поља, тако да рад са укљученим извором не може неограничено трајати.

У случају да је извор искључен, механички рад се добија на рачун енергије поља, која се умањује, па се овакав рад прекида у тренутку када енергија поља буде сведена на нулу.

Када постоји потреба да електромеханички претварач ради континуално, што је најчешће и случај, неопходно је циклично смењивати два поменута начина рада, то јест, неопходно је вршити циклично укључивање и искључивање извора. Дакле, интервали у којима је извор укључен праћени су интервалима у којима је извор одвојен од претварача. Тако се електромеханичко претварање најчешће обавља у циклусима. Код обртних електричних машина, један циклус претварања најчешће одговара једном обртају ротора, или једном делу обртаја ротора.

Слика 2.13. Циклус електромеханичког претварања са фазом (А), у којој су плоче кондензатора раздвојене од извора и фазом (Б), у којој су плоче прикључене на извор.

Питање (2.6):

Проценити механички рад који се може добити у току једног циклуса електромеханичког претварача кога чини плочасти кондензатор са покретном електродом. Познате су димензије плоча, минимални и максимални размак међу плочама, као и максимална јачина електричног поља у диелектрику $E_m = 30$ kV/cm.

Одговор (2.6):

Механички рад који се може добити у једном циклусу одређен је максималном енергијом спрежног поља. Позната је површина плоча S, максимално растојање између плоча d као и максимална просторна густина енергије спрежног поља $w_{e(\max)} = ½\, \varepsilon_0 E_m^2$. Механички рад који се може добити у току једног циклуса је $\Delta W = Sd\, w_{e(\max)}$.

Питање (2.7):

Уколико претварач начини f циклуса у секунди, проценити његову средњу снагу.

Одговор (2.7):

Средња снага претварача који ради са f циклуса у секунди је $P_{sr} = f\, \Delta W = f\, Sd\, w_{e(\max)}$.

2.11.5 Густина енергије поља и величина претварача

Снага електромеханичког претварача зависи од просторне густине енергије спрежног поља. Претварач задатих димензија и масе имаће већу снагу уколико његово спрежно поље има већу просторну густину енергије. Уколико је снага претварача задата, тада ће његове димензије и маса бити мањи у случају да је густина енергије поља већа. Количник снаге и масе претварача је *специфична снага*. Наредна разматрања показују да електромеханички претварачи са магнетским спрежним пољем имају већу специфичну снагу од електростатичких машина.

Механички рад који се добија у једном циклусу електромеханичког претварача зависи од енергије акумулиране у спрежном пољу. Максимални износ енергије поља зависи од густине енергије и запремине домена у коме постоји поље. Уколико су две машине приближно једнаких димензија, тада ће машина која има већу густину енергије поља давати већи механички рад у сваком циклусу претварања. Ако при том две машине понављају циклусе претварања са једнаком учестаношћу, тада ће машина која има већу густину енергије поља имати већу снагу.

Електричне машине су већином претварачи са магнетским спрежним пољем зато што остварива густина енергије магнетског поља значајно пре-

лази густину енергије електричног поља. Пермитивност вакуума је $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12} \approx 10^{-11}$, док је пермеабилност вакуума $\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7} \approx 10^{-6}$. Стога је и густина енергије магнетског поља $w_m = \mu_0 H^2/2$ значајно већа од остариве густине енергије електричног поља $w_e = \varepsilon_0 E^2/2$.

Густина енергије електричног, односно магнетског поља зависи од максималног интензитета поља. У ваздуху, електрично поље је ограничено диелектричном чврстоћом $E_{max} \approx 30$ kV/cm ≈ 3000 kV/m, док је интензитет поља H које се сусреће у електричним машинама близак $H_{max} \approx B_{max}/\mu_0 \approx 1000$ kA/m. Остварива густина енергије је значајно већа у случају магнетског поља. Узимајући два електромеханичка претварача једнаке величине, претварач са магнетским спрежним пољем може имати значајно (10^3-10^4 пута) већу енергију спрежног поља и сразмерно већу претварачку снагу.

2.11.6 Пренос енергије путем поља

Од интереса је уочити да је процес електромеханичког претварања енергије у електричним машинама праћен присуством оба поља, електричног поља E и магнетског поља H. Размена енергије између електричног и механичког прикључка машине може постојати уколико у простору који обухвата покретни део машине постоји пренос енергије према покретном делу или из њега. Просторни пренос енергије је могућ уколико постоји Поинтингов вектор алгебарског интензитета различитог од нуле. Поинтингов вектор је једнак векторском производу вектора електричног и магнетског поља. Интензитет овог вектора представља површинску густину снаге, и основна јединица му је Wm^2. Површински интеграл Поинтинговог вектора кроз површ која раздваја два домена представља брзину са којом се енергија преноси из једног домена у други. Правац и смер Поинтинговог вектора указују на правац и смер преноса енергије. У одсуству било електричног поља E или магнетског поља H, Поинтингов вектор је једнак нули тако да пренос енергије није могуће остварити.

У електромеханичком претварачу са електричном спрежним пољем који је у стању мировања, магнетско поље ће бити блиско нули, па и Поинтингов вектор. Овакво стање је очекивано, стога што је снага електромеханичког претварања једнака нули у случају да се покретни делови претварача не померају. Наиме, снага је једнака производу силе и брзине кретања. У мировању може постојати електрична сила, али су брзина и снага претварача једнаке нули. Уколико је посматрани претварач у стању кретања, његови покретни делови се крећу у односу на непокретне. Ово доводи до промене вектора електричног поља и вектора електричне индукције у претварачу. Будући да друга Максвелова једначина (допуњени уопштени Амперов закон) гласи

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \tag{2.23}$$

то ће промена електричне индукције D допринети просторном изводу магнетског поља H. Будући да постоји просторни извод поља H са вредношћу различитом од нуле, алгебарски интензитет вектора H не може бити једнак нули у свим тачкама у посматраном домену. Стога се закључује да у електростатичкој машини у стању кретања постоји магнетско поље H као и Поинтингов вектор.

Истоветни закључци се могу извести за електромеханички претварач са магнетским спрежним пољем. У стању мировања, у претварачу постоји магнетско поље, док су електрично поље и Поинтингов вектор једнаки нули. Снага електромеханичког претварања је одређена производом силе и брзине кретања, и у стању мировања узима вредност једнаку нули. Када је посматрани претварач у стању кретања, његови покретни делови се крећу у односу на непокретне. Ово доводи до промене вектора магнетског поља и вектора магнетске индукције у претварачу. Увидом у прву Максвелову једначину (Фарадејев закон),

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{2.24}$$

закључује се да промена магнетске индукције B даје просторни извод (ротор) електричног поља, услед чега се у претварачу јавља електрично поље E и Поинтингов вектор.

2.12 Претварач са магнетским спрежним пољем

Електромеханичко претварање у претварачима са магнетским спрежним пољем постоји захваљујући дејству поља на покретне намотаје и делове феромагнетика. Магнетско поље је предуслов за електромеханичко претварање енергије. Оно постоји у средини између између покретних делова магнетског кола и струјних кола. Покретни делови могу вршити линеарно или обртно кретање.

Силе које делују на покретне делове зависе од магнетске индукције и струје у проводницима. Механички рад се може добити на рачун енергије поља или рада извора на који су прикључена струјна кола.

2.12.1 Линеарни претварач

На слици 2.14 дат је једноставан електромеханички претварач са магнетским спрежним пољем и линеарним кретањем. Биће анализиран рад претварача у моторном режиму, када се електрична енергија, добијена из извора константног напона U, претвара у механички рад. Покретни проводник АВ дужине l_1 додирује паралелно постављене непокретне проводнике повезане са извором U. Покретни проводник АВ, непокретни проводници и извор U чине струјно коло које је приказано у десном делу слике. Отпорност проводника АВ се може занемарити, док је збир отпорности свих преосталих проводника струјног кола означена са R.

Слика2.14. Линеарни електромеханички претварач са магнетским спрежним пољем.

Под дејством напона извора, у колу се јавља електрична струја i. Смер струје је сагласан са смером вектора l_1 који је приказан на слици 2.14 дуж проводника АВ. Проводник се налази у страном, хомогеном магнетском пољу индукције B. Електромагнетска сила F_m која делује на проводник одређена је једначином (2.25).

$$\vec{F}_m = i\left(\vec{l}_1 \times \vec{B}\right) \tag{2.25}$$

Будући да је вектор l_1 нормалан на вектор магнетске индукције, алгебарски интензитет силе једнак је $F_m = l_1 iB$. На слици 2.14, електромагнетска сила је усмерена слева на десно. Под дејством силе, проводник се креће брзином v у истом смеру. На проводник делује и страна сила F_s, која се противи кретању. У стању динамичке равнотеже, убрзање проводника је једнако нули, брзина кретања v је константна, тако да је збир сила које делују на проводник једнак нули. Стога су алгебарски интензитети стране силе и електромагнетске силе једнаки.

$$\vec{F}_s + \vec{F}_m = 0;\ \ \vec{F}_s = -\vec{F}_m;\ \ \left|\vec{F}_s\right| = \left|\vec{F}_m\right| = il_1B \tag{2.26}$$

Услед кретања у магнетском пољу, у проводнику се јавља индуковано електрично поље E_{ind}, одређено векторским производом брзине кретања и магнетске индукције. Будући да се вектор индукованог поља не мења дуж проводника, електромоторна сила $e = e_{AB}$ се може израчунати на основу једначине (2.27)

$$e = \left(-\vec{l}_1\right)\cdot \vec{E}_{ind} = \left(-\vec{l}_1\right)\left(\vec{v}\times\vec{B}\right) \tag{2.27}$$

Вектор индукованог електричног поља је колинеаран са проводником, тако да је индукована електромоторна сила једнака $e = l_1vB$. Знак индуковане електромоторне силе $e = e_{AB}$ везан је за усвојени референтни смер, приказан на слици 2.14. Позитивна вредност електромоторне силе $e = e_{AB} > 0$ доводи до увећања потенцијала тачке А у односу на потенцијал тачке В.

У електричном колу приказаном на слици, јавља се струја $i = (U - e)/R$. У случају да је достигнуто устаљено стање, струја $i(t)$ узима вредност $I = (U - l_1vB)/R$. Снага извора $P_i = Ui = ei + Ri^2$ садржи компоненту $P_{AB} = ei = l_1vBi$, као и топлотворне губитке $P_\gamma = Ri^2$. Губици у проводницима се јављају услед Џуловог ефекта и зависе од отпорности и квадрата струје. Преостала снага P_{AB} предаје се покретном проводнику. Одржавајући кретање, електромагнетска сила F_m врши рад против стране силе F_s, која се супротставља кретању. Вектори силе и брзине кретања су колинеарни, тако да је снага магнетске силе једнака $P_{meh} = F_mv = l_1iBv$. Снага P_{meh} је излазна снага електромеханичког претварача који електричну енергију, добијену из извора U, претвара у механички рад. Будући да је $P_{meh} = F_mv = P_{AB} = ei = l_1vBi$, Расподелу снаге извора P_i је могуће приказати једначином (2.28).

$$P_i = Ui = ei + Ri^2 = F_mv + Ri^2 = P_{meh} + Ri^2 \tag{2.28}$$

Дакле, снага извора се дели на топлотворне губитке и механичку снагу, која је резултат електромеханичког претварања. Снага коју развија индукована електромоторна сила e једнака је $P_e = e(-i) = -ei < 0$. Дакле, електромоторна сила e се у електричном колу понаша као пријемник, преузимајући снагу $ei = l_1vBi$, која се потом претвара у механичку снагу $P_{meh} = F_mv = ei$. У посматраном примеру, механичка снага електромеханичког претварача једнака је производу индуковане електромоторне силе и струје. Једначина (2.29) се у једном од облика јавља код свих електричних машина.

$$ei = F_m v \tag{2.29}$$

Џулови губици, одређени снагом $P_\gamma = Ri^2$ претварају се у топлоту. Проводници и други делови претварача се загревају, то јест, њихова температура расте у односу на температуру амбијента. Услед повећане температуре, делови претварача предају топлоту амбијенту конвекцијом, кондукцијом и зрачењем. Раст температуре делова претварача изложених загревању се зауставља када се снага губитака P_γ изједначи са снагом одавања топлоте у околину. Будући да се електромеханички претварачи користе за претварање електричне енергије у механички рад, потребно је да губици енергије приликом конверзије буду што мањи. Топлотворни губици умањују степен корисног дејства енергетских претварача. Поред тога, створену топлоту треба одвести, како се претварач не би прегревао. Потребно је, дакле, имати одговарајуће решење за одвођење топлоте, то јест хлађење. Губици се могу смањити умањењем отпорности R. Међутим, настојање да се отпорност смањи увећањем попречног пресека проводника доводи до већег утрошка бакра, што повећава цену, масу и величину претварача.

Електрична машина, то јест енергетски претварач приказан на слици 2.14 може радити и у генераторском режиму рада, када се мења смер струје и смер дејства електромагнетске силе. Генераторски рад је детаљније анализиран у одељку 2.4 *Генераторски режим рада*.

2.12.2 Обртни претварач

Електромеханичко претварање се најчешће обавља коришћењем обртних машина, које претварају електричну енергију у механички рад обртног кретања. Пример елементарног обртног (ротационог) претварача је дат на слици 2.15. Проводна контура ABCD, димензија $D \times L$ се обрће у хомогеном, страном магнетском пољу B. Контура се обрће око хоризонталне осе, означене на слици 2.15, у смеру казаљке на сату. Положај контуре одређен је углом θ_m и мења се брзином $\Omega_m = \mathrm{d}\theta_m/\mathrm{d}t$. У неком тренутку контура се налази у положају $\theta_m = 0$, у коме су линије магнетског поља паралелне површи $S = D \times L$ која се ослања на контуру. Крајеви контуре су повезани са извором напајања који у проводницима ствара сталну струју јачине I.

Електромагнетска сила F_1 делује на делове AB и CD посматране проводне контуре. Посматрани делови су нормални на линије магнетског поља и имају дужину L, тако да је сила одређена изразом $F_1 = LIB$. На попречне делове контуре BC и DA, дужине D, не делује електромагнетска сила, стога што је струја у њима колинеарна са пољем. У положају $\theta_m = \pi/2$,

на попречне делове BC и DA делују силе у правцу осе ротације, али су оне колинеарне и супротног смера, тако да се њихова дејства поништавају.

Слика 2.15. Обртни електромеханички претварач са магнетским спрежним пољем.

Спрег електромагнетских сила ствара моменат $M_{em} = DF_1$. Уз претпоставку да се контура обрће угаоном брзином $\Omega_m = \mathrm{d}\theta_m / \mathrm{d}t$, у посматраном тренутку ($t = 0$) развија се механичка снага $P_{meh} = M_{em}\,\Omega_m = DLIB\Omega_m$. Снага P_{meh} је излазна снага електромеханичког претварача који електричну енергију, добијену из извора I, претвара у механички рад.

Од интереса је упоредити добијену механичку снагу са електричном снагом која се узима из извора. Између крајева A1 и D1 извора сталне струје постоји напон $u = v_{A1} - v_{D1}$. Извор је прикључен на крајеве контуре ABCD, тако да је напон једнак $u = RI + \mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$, где ознака Φ представља флукс кроз површ S која се ослања на контуру док величина R представља укупну отпорност проводника који чине контуру. Референтни смер флукса је смер позитивне нормале на површ S. Нормала је сагласна са смером обиласка контуре ABCD, то јест, струја која постоји у усвојеном смеру обиласка контуре ствара магнетско поље у смеру нормале. На сликама 2.15 и 1.16, нормала је означена вектором n. Контура се може обртати око хоризонталне осе, тако да флукс кроз површ S зависи од угла θ_m који постоји између вектора магнетске индукције и равни у којој лежи контура.

Слика 2.16. Промена флукса и електромоторне силе у обртној контури.

Према ознакама усвојеним на слици 2.16, угао θ_m је једнак нули у положају у коме су линије магнетског поља паралелне са површи S. У нултом положају, флукс Φ је једнак нули. Када контура начини угаони померај θ_m, нормала на површ S прелази у положај n_1. Уз претпоставку да је страно магнетско поље хомогено, флукс Φ се може представити изразом $\Phi(\theta_m) = \Phi_m \sin(\theta_m) = \Phi_m \sin(\Omega_m t)$, где је $\Phi_m = BS$ максимална вредност флукса која се достиже у положају $\theta_m = \pi/2$. Користећи добијени израз за флукс, напон на крајевима извора се израчунава као $u = RI + \Omega_m \Phi_m \cos(\Omega_m t)$. У посматраном положају, у коме је $\theta_m = 0$, снага коју извор предаје обртном претварачу дата је једначином (2.30).

$$P_i = uI = RI^2 + I\Omega_m \Phi_m = RI^2 + I\Omega_m BS = \\ = RI^2 + I\Omega_m BS = RI^2 + DLIB\Omega_m = P_{meh} + RI^2 \tag{2.30}$$

Дакле, снага извора се једним делом претвара у механичку снагу, док се други део губи и претвара у топлоту услед Џуловог ефекта. У положају у коме је $\theta_m = 0$, електромагнетски моменат који делује на контуру једнак је $M_{em} = \Phi_m I = P_{meh}/\Omega_m$. После померај θ_m, крак K силе F_1, приказан на слици 2.16, једнак је $K=(D/2)\cos\theta_m$. Стога се моменат M_{em} мења у функцији угла θ_m на основу једначине (2.31)

$$M_{em} = \Phi_m I \cos\theta_m \tag{2.31}$$

Једначина (2.31) у једном од облика одређује електромагнетски моменат код свих обртних електричних машина. Анализом рада обртног претварача датог на слици 2.15 закључује се да је средња вредност момента у току

једног обртаја једнака нули. То се може изменити уградњом додатних контура и променом начина напајања, о чему ће бити речи у наредним поглављима.

Променом смера струје или смера обртања, електромеханички претварач са слике 2.15 ће радити у генераторском режиму рада, претварајући механички рад у електричну енергију. Напон и струја извора сталне струје ће тада бити супротног знака, док ће сам извор имати улогу пријемника електричне енергије.

2.12.3 Контра-електромоторна сила

На слици 2.15, ознаке e_1 и e_2 указују на два могућа референтна смера за индуковану електромоторну силу. Избор референтног смера одређује знак индуковане електромоторне силе, као и начин њеног повезивања у еквивалентну шему електричног кола, па је потребно дати одговарајуће образложење и изразе за индуковану електромоторну силу у сваком од случаја.

Слика 2.17. Дефиниција референтног смера за електромоторну и контра-електромоторну силу.

На слици 2.17 дата је еквивалентна електрична шема покретне контуре, напајане из извора сталне струје преко крајева A1 и D1. Ознака Φ представља флукс кроз површ S која се ослања на контуру. Референтни смер флукса је одређен нормалом на површ S, која је означена вектором n на сликама 2.15 и 2.16.

Нормала је одређена тако да струја I која постоји у усвојеном смеру обиласка контуре (ABCD) ствара магнетско поље у смеру вектора n. Флукс зависи од угла θ_m, тако да обртање контуре у смеру назначеном на слици 2.15 доводи до увећања флукса страног магнетског поља кроз S.

Флукс кроз S се јавља под дејством страног хомогеног магнетског поља, као и услед деловања струје која постоји у контури, и која ствара сопствено магнетско поље. Свака промена флукса доводи до индуковања електромоторне силе у контури. Под дејством електромоторне силе, у контури се може јавити електрична струја. Јачина струје зависи од еквивалентне от-

порности струјног кола. У случају приказаном на слици 2.17, контура се напаја из извора сталне струје. Еквивалентна отпорност извора сталне струје је $R_{eq} = \infty$, тако да присуство електромоторне силе e_1 не доводи до промене струје. У случају када је контура галвански затворена, то јест, када су крајеви A1 и D1 кратко спојени или спојени са електричним извором или пријемником коначне еквивалентне отпорности, присуство електромоторне силе e_1 проузроковаће промену струје и промену флукса.

Према Ленцовом правилу, индукована електромоторна сила тежи да успостави струју у смеру који се противи променама магнетског флукса које су створиле електромагнетску индукцију. Струја ствара магнетско поље, које се назива сопственим магнетским пољем. Флукс вектора магнетске индукције тог поља је *сопствени флукс*. Индукована електромоторна сила подстиче сопствени магнетски флукс у смеру који поништава промене магнетског флукса које су изазвале електромагнетску индукцију. Дакле, при обртању контуре у смеру означеном на слици 2.15, увећава се флукс услед страног магнетског поља. У контури се јавља електромоторна сила e_1, дата једначином (2.32).

$$e_1 = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{2.32}$$

Будући да је при увећању флукса $e_1 < 0$, у галвански затвореној контури се јавља струја у смеру супротном од смером обиласка контуре ABCD. Дакле, индукована струја ствара сопствено магнетско поље и сопствени флукс у смеру супротном од назначене нормале. Укупни флукс једнак је збиру флукса услед страног поља, који је у порасту, и сопственог флукса, чији је алгебарски интензитет негативан.

Електромагнетска индукција се противи промени флукса у мери која зависи од параметара кола. Када је еквивалентна отпорност струјног кола $R_{eq} = \infty$, индукована електромоторна сила не доводи до промене струје која би се противила промени флукса. У случају да је еквивалентна отпорност контуре једнака нули ($R_{eq} = 0$, суперпроводна контура чији су крајеви у кратком споју), појава електромагнетске индукције спречава промену флукса. Будући да је равнотежа напона дата једначином (2.33)

$$u = Ri - e_1 = Ri + \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}, \tag{2.33}$$

у условима када је $u = 0$ и $R = 0$, добија се да је $\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t = 0$. Стога је флукс кроз кратко спојену суперпроводну контуру једнак нули.

За контуру напајану из извора сталне струје, дату на слици 2.15, еквивалентне шеме електричног кола су дате на слици 2.17. За референтни смер индуковане електромоторне силе могуће је узети e_1 или e_2, што је означе-

но на сликама 2.15 и 2.17. Уколико се усвоји референтни смер e_1, користи се заменска шема (B) на слици 2.17, док се алгебарски интензитет електромоторне силе одређује на основу једначине (2.32). Алтернативно, могуће је користити заменску шему (A) и једначину (2.34). Величина $e_2 = +\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$ се назива и *контра-електромоторна сила*.

$$e_2 = -e_1 = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{2.34}$$

2.13 Магнетско коло

Један од принципа рада електромеханичких претварача са магнетским пољем је стварање Лоренцове силе на проводник са струјом који се налази у магнетском пољу. Магнетско поље се може добити од сталног магнета или коришћењем електромагнета, то јест система намотаја у којима постоји електрична струја која је узрок појави магнетског поља. Од користи је наћи решење које смањује потребну количину сталних магнета, односно, наћи решење у коме се потребна магнетска индукција остварује при мањим јачинама струје у електромагнету. Наведени циљеви се постижу коришћењем магнетског кола, структуре начињене од феромагнетског материјала (гвожђа). Пример магнетског кола је дат на слици 2.18.

Слика 2.18 приказује магнетско коло начињено од гвожђа, феромагнетика чија је пермеабилност вишеструко већа од пермеабилности вакуума. Приказано магнетско коло има ваздушни зазор (процеп) величине δ. У тај простор се може сместити проводник у коме постоји електрична струја, како би се добила Лоренцова сила и остварило електромеханичко претварање енергије (проводник није приказан на слици). Поље се ствара захваљујући *побудном* намотају са N редно везаних контура, то јест навојака. Усвајајући претпоставку да нема расипања и да су линије поља паралелне, закључује се да је магнетска индукција у гвожђу једнака индукцији у ваздуху. Јачина магнетског поља у гвожђу је $H_{Fe} = B/\mu_{Fe}$, док је поље у ваздушном зазору једнако $H_0 = B/\mu_0$. Будући да је пермеабилност гвожђа вишеструко већа, то се магнетско поље у гвожђу може сматрати значајно мањим од поља у зазору. Тиме се Амперов закон своди на везу $Ni = H_0\delta$, тако да је струја потребна за добијање магнетског поља H_0 у зазору једнака $i = H_0\delta/N$.

Ради добијања магнетске индукције B у ваздушном зазору, потребно је у намотају имати имати струју $i = B\delta/(N\mu_0)$. Дакле, потребна побудна струја је пропорционална ваздушном зазору δ. Случај у коме би се гвозде-

ни део магнетског кола уклонио може се представити увећањем ваздушног зазора δ на вредност $\delta + l_{Fe}$, где је l_{Fe} дужина гвозденог дела магнетског кола. Потребна јачина струје би се тада увећала $1+l_{Fe}/\delta$ пута. Будући да је $l_{Fe} >> \delta$, уклањање гвозденог дела магнетског кола би вишеструко увећало струју. Стога се закључује да је магнетско коло врло важан део електричних машина. Оно врши функцију усмеравања, то јест концентрисања магнетског поља у зоне где се одвија конверзија. Присуство магнетског поља омогућује да се потребна *побуда* оствари са значајно мањим јачинама струје.

Слика 2.18. Магнетско коло са феромагнетским језгром и ваздушним зазором.

У претходном одељку је спроведена анализа једноставног магнетског кола. При анализи су усвојена одређена занемарења. Ради анализе сложенијих магнетских кола, у наредном одељку су набројани основни закони и наведена уобичајена занемарења која анализу чине једноставнијом.

2.13.1 Анализа магнетских кола

Магнетско коло је простор у коме је образовано магнетско поље једног или више струјних кола или сталних магнета. Закони који се примењују за анализу магнетских кола су

- Закон конзервације магнетског флукса,

- Уопштени облик Амперовог закона и
- Конститутивна веза $B(H)$ која карактерише магнетски материјал.

Закон о конзервацији магнетског флукса

$$\oint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 \tag{2.35}$$

С обзиром на феромагнетске особине магнетских материјала од којих се реализују магнетска кола, може се увести низ апроксимација које олакшавају анализу таквих магнетских кола. Једна од претпоставки је да нема расипања магнетских линија ван магнетског кола. Кад се уведе појам магнетског флукса по пресеку магнетског кола, сходно усвојеном референтном орту нормале на пресек, може се показати да је тај исти дуж магнетског кола. То је *флукс језгра* или овде уобичајено *флукс навојка*, то јест *флукс једног навојка*. Он има алгебарско значење према орту нормале и означава се ознаком Φ. Треба обратити пажњу и на флукс везан за намотаје електричних кола придружених магнетском колу. Референтни орт нормале за такав флукс, *флукс намотаја*, везан је правилом десне завојнице са референтним смером (за струју) самог намотаја. Флукс намотаја се означава ознаком Ψ. Намотај са N навојака има флукс $\Psi = N\Phi$. Иначе, законом о конзервацији магнетског флукса се може показати да је флукс кроз контуру једнак флуксу кроз било коју површ ослоњену на контуру. Ова једнакост ће бити коришћена за једноставније израчунавање флукса у навојцима цилиндричних машина.

Даље, уобичајена је претпоставка да је магнетско поље хомогено по пресеку магнетског кола и да су дужине магнетских линија једнаке дужини репрезентативне средње линије магнетског кола.

Уопштени облик Амперовог закона

Уопштени облик Амперовог закона за стационарна струјна поља је дат једначином (2.36). Контура c и површ S су приказане на слици 2.19.

$$\oint_c \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \tag{2.36}$$

Слика 2.19. Нормала на површ *S* која се ослања на контуру *c*.

Код електричних машина, струје нису расподељене у простору, већ постоје у проводницима струјних кола. Проводници имају на себи слој изолације који спречава галванску везу са околином. Дакле, на место површинског интеграла густине струје J треба ставити збир струја у проводницима који пролазе кроз површ S, уважавајући при томе референтни смер, одређен ортом нормале. Једначина (2.36) тако узима облик (2.37).

$$\oint_c \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \Sigma I \tag{2.37}$$

Конститутивна веза магнетског поља и индукције

Веза вектора магнетског поља H и магнетске индукције B у појединим деловима магнетског кола одређена је својствима магнетског материјала и дата једначином (2.38).

$$\vec{B} = \vec{B}\left(\vec{H}\right) \tag{2.38}$$

У линеарним срединама, вектор магнетске индукције је пропорционална вектору поља. Коефицијент пропорционалности је скалар μ, магнетска пермеабилност (2.39). Магнетска пермеабилност вакуума једнака је $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m. У феромагнетицима као што је гвожђе, карактеристика $B(H)$ није линеарна. Она се најчешће приказује графички или одговарајућим апроксимирајућим аналитичким изразом, карактеристиком магнетисања. За мале вредности поља, карактеристика магнетисања гвожђа $B(H)$ је линеарна и има нагиб $\Delta B/\Delta H$ који је више хиљада пута већи од пермеабилности вакуума μ_0.

$$\vec{B} = \mu\vec{H} = \mu_0\mu_r\vec{H} \tag{2.39}$$

2.13.2 Вектор флукса

Флукс кроз контуру на слици 2.19 је скаларна величина. Флукс кроз површ S, која се ослања на контуру c, одређен је површинским интегралом вектора магнетске индукције B. У анализи електричних машина, флукс кроз контуру се често третира као вектор. *Вектор флукса* се добија тако што се скалару Φ придружи правац и смер орта нормале на површ S. Уколико се на месту контуре налази више навојака који формирају намотај, тада је могуће дефинисати вектор флукса намотаја, чији је алгебарски интензитет једнак $\Psi = N\Phi$, док су му правац и смер одређени ортом нормале на површ S.

2.13.3 Карактеристике магнетисања феромагнетика

Магнетска кола електричних машина и трансформатора се најчешће граде од гвоздених лимова. Гвожђе је феромагнетик чија је карактеристика магнетисања $B(H)$ приказана на слици 2.20. Карактеристика лежи између праве линије са нагибом $\Delta B/\Delta H = \mu_o$, која описује магнетисање вакуума, и праве линије чији је нагиб једнак μ_{Fe} једнак првом изводу функције $B(H)$ у координатном почетку. На апсциси B-H координатног система је страно поље H, које се може добити успостављањем струје у побудном намотају, док је на ординати магнетска индукција B која постоји у феромагнетком материјалу.

Магнетска својства гвожђа потичу од микроскопских Амперових струја у оквиру молекула и група молекула. Од тих струја потиче магнетско поље сталних магнета и других феромагнетских материјала. Поменуте струје су узрок појави силе која делује на комаде феромагнетика унете у страно магнетско поље. Присуство микроскопских струја се може узети у обзир тако што феромагнетске материјале третирамо као скуп минијатурних магнетских дипола. У одсуству споља доведеног поља H, магнетски диполи нису уређени, они осцилују и мењају смер брзином која зависи од температуре. Стога је у одсуству страног поља магнетска индукција у материјалу једнака је нули.

Када се успостави побудна струја и поље H, магнетска индукција узима вредност $B = \mu_{Fe}H$ која је много већа од магнетске индукције $B = \mu_0 H$ која би се имала у вакууму. На овај начин феромагнетик помаже да се жељено поље постигне уз мању струју побуде.

Слика 2.20. Карактеристика магнетисања гвожђа. Приказан је ефекат магнетског засићења, до кога долази при већим јачинама поља.

Када магнетска индукција достигне вредност од 2 T, сви диполи су оријентисани у смеру поља и доприносе магнетској индукцији. Даље увећање поља H не може утицати на даље усмеравање дипола, јер оних који нису оријентисани више нема. Такво стање називамо *засићењем* магнетског кола. У зони засићења, даље увећање индукције једнако је ономе које би се имало у вакууму, $\Delta B = \mu_0 \Delta H$.

2.13.4 Магнетска отпорност кола

Улога магнетског кола у електричним машинама је усмеравање линија магнетског спрежног поља ка простору у коме се обавља електромеханичка конверзија. Магнетска индукција и флукс Φ у магнетском колу јављају се под утицајем струје у намотају. Јачина поља H зависи од производа Ni, где је N број навојака а i јачина струје. Количник Ni/Φ је *магнетска отпорност кола*. Коло са мањом магнетском отпорношћу имаће исти флукс при мањој јачини струје. Магнетско коло може имати више делова, који могу бити начињени од феромагнетика, сталних магнета, немагнетских материјала, или бити испуњени ваздухом (ваздушни зазор или ваздушни

процеп). Од интереса је одредити израз за магнетску отпорност сложеног магнетског кола.

Слика 2.21. Дефинисање пресека језгра, флукса језгра, флукса намотаја и репрезентативне средње линије магнетског кола.

Карактеристика магнетисања делова магнетског кола начињених од феромагнетика је нелинеарна. Рад магнетских кола се најчешће обавља у близини координатног почетка $B(H)$ дијаграма. Стога је оправдано линеаризовати карактеристику магнетисања и сматрати да је пермеабилност μ гвоздених лимова константна. У линеаризованим магнетским колима, занемарује се нелинеарност феромагнетика, и сматра се да је у сваком феромагнетском делу магнетског кола пермеабилност константна. Поред тога, претпоставља се да нема расипања магнетског поља изван магнетског кола. Основне поставке и кораци у анализи линеаризованих магнетских кола без расипања магнетског поља садржани су у наредним разматрањима.

На основу једначине (2.37), криволинијски интеграл магнетског поља H по контури c, означеној на слици 2.21, једнак је производу Ni. Ознаком $F = Ni$ обележавамо *магнетопобудну силу*, која је једнака интегралу поља H кроз затворену контуру која обухвата све делове магнетског кола. Магне-

топобудна сила F је скаларна величина. Вектор магнетопобудне силе се добија тако што се скалару $F = Ni$ придружи правац и смер вектора магнетског поља H, насталог под дејством струја у намотају. На слици 2.21, вектор магнетопобудне силе F је колинеаран са нормалом n_k, која је везана правилом десне завојнице за референтни смер електричног кола.

Површински интеграл магнетске индукције на површи S означава се са Φ и назива *флуксом језгра* или *флукс на пресеку магнетског кола* или *флукс кроз један навојак*. На основу претпоставке да нема расипања магнетског поља изван магнетског кола, криволинијски интеграл магнетског поља H по контури c једнак је Ni за сваку контуру која пролази кроз магнетско коло. Будући да је основана претпоставка да су дужине магнетских линија једнаке дужини репрезентативне средње линије магнетског кола, може се сматрати да је магнетско поље хомогено по пресеку магнетског кола, тако да је флукс кроз један навојак једнак $\Phi = BS$. *Флукс намотаја* једнак је $\Psi = N\Phi$ и представља флукс кроз намотај електричног кола.

Флукс кроз сваки пресек магнетског кола је исти. Будући да је $S = S_0 = S_{Fe}$, важи једнакост $SB_{Fe} = SB_0$, односно $B_{Fe} = B_0$, где је B_0 магнетска индукција у ваздушном зазору док је B_{Fe} магнетска индукција у феромагнетику. Магнетско поље у зазору једнако је $H_0 = B_0/\mu_0$, док је поље у феромагнетику једнако $H_{Fe} = B_{Fe}/\mu_{Fe} = B_0/\mu_{Fe}$. Уопштени Амперов закон даје једначину (2.40), где је l средњи обим феромагнетског дела магнетског кола, док l_0 означава дужину ваздушног зазора.

$$H_{Fe}l + H_0 l_0 = Ni \tag{2.40}$$

Увршћавањем израза $H_0 = B_0/\mu_0$ и $H_{Fe} = B_{Fe}/\mu_{Fe} = B_0/\mu_{Fe}$ у једначину (2.40), добија се једначина (2.41), која даје магнетску индукцију $B_{Fe} = B_0$.

$$\frac{B_0}{\mu_{Fe}} l + \frac{B_0}{\mu_0} l_0 = Ni = F \tag{2.41}$$

Будући да је флукс језгра једнак $\Phi = BS$, његова зависност од магнетопобудне силе F се може приказати једначином (2.42).

$$\Phi = \frac{Ni}{\dfrac{l}{\mu_{Fe}S} + \dfrac{l_0}{\mu_0 S}} = \frac{F}{\dfrac{l}{\mu_{Fe}S} + \dfrac{l_0}{\mu_0 S}} = \frac{F}{R_\mu} \tag{2.42}$$

Магнетском колу се може придружити електрично коло, приказано на слици 2.22, у коме је *електромоторна сила* E једнака интегралу страног електричног поља у електричном генератору. У магнетском колу отпорности R_μ јавља се флукс $\Phi = F/R_\mu$ на начин аналоган појави електричне

струје $i = E/R$ у електричном колу. Стога посматрано електрично коло представља еквивалентну представу магнетског кола и зове се *дуално коло*. Подробнија анализа може показати да се Кирхофови закони могу применити на сложена магнетска кола једнако као и на електрична.

Магнетопобудну силу F можемо сматрати *магнетским напоном* посматране контуре c. По аналогији са електричним колом, где је $i = U/R$, у магнетском колу је $\Phi = F/R_\mu$, где је R_μ *отпорност магнетског кола* или *релуктанса*. Дакле, флукс језгра се може добити као количник магнетопобудне силе Ni и магнетске отпорности. Ово важи за линеаризована магнетска кола за која се може сматрати да је пермеабилност константна, да нема магнетског расипања и да се флукс по пресеку језгра одржава константним дуж магнетког кола. Последњи услов произилази из закона о конзервацији магнетског флукса. Величине Φ, F и R_μ магнетског кола дуалне су величинама i, U и R еквивалентног електричног кола. Једначина (2.42) представља "Омов закон" за магнетско коло, или Хопкинсов закон.

Магнетска отпорност униформног магнетског кола дужине l, површине пресека S и пермеабилности μ једнака је $R_\mu = l/(S\mu)$. Магнетско коло може бити састављено од већег броја редно повезаних сегмената различитих димензија и карактеристика. Уколико се за сваки од сегмената магнетског кола може сматрати да се флукс по пресеку одржава константним, да су дужине магнетских линија једнаке дужини средње линије, као и да је пермеабилност у сегменту константна, тада се еквивалентна магнетска отпорност кола може одредити сабирањем отпорности $R_{\mu k} = l_k/(S_k\mu_k)$, на начин дат једначином (2.43).

$$R_\mu = \sum_{k=1}^{n} \frac{l_k}{\mu_k S_k} \tag{2.43}$$

Слика 2.22. Представљање магнетског кола еквивалентним електричним колом.

У случају када се пресек језгра S и пермеабилност μ континуално мењају дуж магнетског кола, магнетска отпорност кола се одређује на основу једначине (2.44), где је c оријентисана репрезентативна средња линија магнетског кола. Пресек $S(x)$ и пермеабилност $\mu(x)$ су функције променљиве x, која представља дужину пута пређеног при обиласку контуре c, то јест средње линије кола. Уколико се посматра део магнетског кола чији је пресек $S(x)$, пермеабилност $\mu(x)$, док му је дужина Δx веома мала, може се сматрати да је $S(x) \approx S(x+\Delta x)$, односно $\mu(x) \approx \mu(x+\Delta x)$. Стога је магнетска отпорност ΔR_μ посматраног дела магнетског кола једнака $\Delta x/(S\cdot\mu)$. Укупна отпорност магнетског кола добија се збрајањем отпорности свих делова магнетског кола, што резултује интегралом (2.44). Једначина (2.44) је сагласна изразу за одређивање отпорности отпорника променљивог попречног пресека $S(x)$ и променљиве проводности $\sigma(x)$.

$$R_\mu = \oint_c \frac{\mathrm{d}x}{\mu(x)S(x)} \tag{2.44}$$

Индуктивност намотаја који је формиран око посматраног магнетског кола и који има N навојака, једнак је количнику флукса у намотају $\Psi = N\Phi$ и струје у проводницима који чине намотај. На основу једначине (2.45), индуктивност намотаја једнака је количнику квадрата броја навојака и магнетске отпорности.

$$L = \frac{\psi}{i} = \frac{N\Phi}{i} = \frac{N}{i}\frac{Ni}{R_\mu} = \frac{N^2}{R_\mu} = \frac{N^2}{\sum_{i=1}^{k}\frac{l_i}{\mu_i S_i}} \tag{2.45}$$

2.13.5 Енергија у магнетском колу

Енергија магнетског поља се одређује интеграцијом просторне густине енергије поља w_m у средини у којој постоји магнетско поље. У линеарном феромагнетику, просторна густина магнетске енергије је $BH/2$. У случају магнетског кола у коме нема расипања, магнетско поље постоји искључиво у колу, тако да је простор V у коме се врши интеграција (2.46) ограничен на посматрано магнетско коло.

$$W_e = \int_V w_m \,\mathrm{d}V = \int_V \left(\int \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{B}\right)\mathrm{d}V = \int_V \left(\frac{1}{2}BH\right)\mathrm{d}V \tag{2.46}$$

Магнетско коло се може поделити на елементарне запремине dV = S·dl, где је S пресек магнетског кола док је dl елемент репрезентативне средње линије магнетског кола, то јест контуре c. Будући да законом о конзервацији магнетског флукса указује да је флукс једнак кроз било који пресек магнетског кола, површински интеграл магнетске индукције једнак је Φ по било ком пресеку кола. Уобичајена је и основана претпоставка да је магнетско поље хомогено по сваком од пресека, тако да се закључује да је јачина магнетске индукције B једнака Φ/S. Будући да је индукција на сваком од посматраних пресека константна, просторни интеграл у једначини (2.46) се своди на производ флукса магнетског кола Φ и криволинијског интеграла магнетског поља. Вектор магнетског поља је колинеаран са елементом контуре dl, тако да се скаларни производ два вектора може заменити производом њихових алгебарских интензитета.

$$W_e = \frac{1}{2}\int_V (BH)\,\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int_S \mathrm{d}S \oint_c BH\,\mathrm{d}l = \frac{\Phi}{2}\oint_c H\,\mathrm{d}l = \frac{\Phi}{2}\oint_c \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{l} \qquad (2.47)$$

Према Амперовом закону, криволинијски интеграл магнетског поља дуж контуре c која представља средњу линију магнетског поља једнак је Ni, тако да израз за енергију магнетског поља посматраног магнетског кола узима облик (2.48). Потребно је уочити да се добијени резултат не може применити на магнетска кола у којима се појављује нелинеарност феромагнетика.

$$W_e = \frac{\Phi}{2}\oint_c \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{l} = \frac{\Phi}{2}Ni = \frac{\psi i}{2} = \frac{1}{2}Li^2 \qquad (2.48)$$

Питање (2.8):

Магнетско коло, приказано на слици 2.21, начињено је од феромагнетика чија се пермеабилност може сматрати бесконачно великом. Одредити индуктивност намотаја.

Одговор (2.8):

Узимајући да је μ бесконачно велико, магнетска отпорност кола се своди на $R_\mu = l_0/(S\mu_o)$. Индуктивност намотаја је једнака $L = \mu_o SN^2/\, l_0$.

2.13.6 Референтни смер магнетског кола

Магнетско коло може имати више намотаја који обухватају језгро. На слици 2.23 приказано је магнетско коло са два намотаја, N_1 и N_2. У сваком од намотаја се јавља *флукс намотаја*. Референтни смер флукса намотаја ве-

зан је правилом десне завојнице са референтним смером за струју посматраног намотаја. У посматраном случају, референтни смер флукса Ψ_1, означен ортом n_1 на слици 2.22, сагласан је са усвојеним смером обиласка контуре c, који је на слици означен ортом нормале n, и који се *референтним смером магнетског кола*. Интензитет флукса је одређен производом флукса језгра Φ и броја навојака, тако да је $\Psi_1 = N_1\Phi$. Референтни смер флукса у другом намотају је означен ортом n_2 и супротан је од усвојеног смера обиласка контуре c. Будући да је флукс језгра Φ дефинисан као флукс кроз површ S у смеру орта n, то је флукс другог намотаја једнак $\Psi_2 = -N_2\Phi$. Избор референтног смера магнетског кола може бити произвољан, тако да у анализи кола са више намотаја треба за сваки намотај одредити референтни смер флукса правилом десне завојнице и упоредити га са референтним смером магнетског кола.

Слика 2.23. Спрега два намотаја на истом језгру.

Релације $\Psi_1 = N_1\Phi$ и $\Psi_2 = -N_2\Phi$ су добијене на основу претпоставке да нема расипања магнетског поља, то јест, да се флукс по пресеку језгра одржава константним. У одсуству расипања, флукс појединих навојака у намотају N_1 је једнак флуксу у навојцима намотаја N_2, тако да је однос Ψ_1/Ψ_2 одређен односом броја навојака. У реалним магнетском колима, постоји коначно расипање магнетског поља. Мањи део флукса обухваћеног намотајем N_1 може напустити језгро пре него што обухвати намотај N_2.

Такав флукс називамо *расипним флуксом* или *флуксом расипања* првог намотаја. Аналогно, може се дефинисати флукс расипања другог намотаја. У случају када се расипање не може занемарити, однос $|\Psi_1 / \Psi_2|$ одступа од количника N_1/N_2. Јачина магнетске спреге између намотаја се математички описује *коефицијентом индуктивне спреге* $k \leq 1$. У одсуству расипања, коефицијент спреге је једнак 1.

2.14 Губици у магнетским колима

Електромеханички претварачи имају периодичне промене енергије поља, па се мења и магнетска индукција у магнетским колима. Код машина за наизменичну струју и трансформатора магнетска индукција се простопериодично (синусоидално) мења. Промене индукције B у феромагнетском материјалу проузрокује губитке енергије. Они се деле на губитке услед вихорних струја и губитке услед хистерезиса. Снага губитака сведена на јединичну масу је *специфична* снага или *густина снаге губитака*.

Слика 2.24. Вихорне струје у хомогеном комаду гвозденог магнетског кола. У десном делу слике, дат је пример карактеристике магнетисања са хистерезисом.

2.14.1 Губици услед хистерезиса

Промене магнетског поља у феромагнетику изискују покретање магнетских дипола и промену њихове оријентације. Ротација магнетских дипола изискује утрошак енергије који може бити процењен на основу површине *хистерезисне* криве у $B = f(H)$ дијаграму. Када се индукција B мења простопериодично са периодом T, као што је приказано на слици 2.24, тада радна тачка у $B = f(H)$ дијаграму описује хистерезисну криву. Енергија

утрошена на ротацију дипола у једном периоду (циклусу) T пропорционална је површини хистерезисне криве коју описује радна тачка. Један од разлога за појаву губитака услед хистерезиса је и тај што промена положаја доводи до трења између суседних магнетских дипола. Унутрашње трење доводи до утрошка енергије која се претвара се у топлоту.

Специфична снага губитака услед хистерезиса p_H пропорционална је производу учестаности и површине хистерезисне криве у $B = f(H)$ дијаграму. Енергија која се изгуби услед хистерезиса у делу од феромагнетика запремине V је

$$W_H = V \oint H \, \mathrm{d}B = V \cdot S_H \,, \tag{2.49}$$

где је S_H површина хистерезисне криве у $B = f(H)$ дијаграму. Снага губитака услед хистерезиса једнака је

$$P_H = f \; V \cdot S_H \,. \tag{2.50}$$

Специфични губици сведени на јединичну запремину једнаки су

$$p_{H1} = \frac{P_H}{V} = f \; S_H \,. \tag{2.51}$$

Површина хистерезисне криве S_H зависи од облика криве као и од вршних вредности магнетског поља H_m и индукције B_m. Будући да је површина пропорционална производу $B_m H_m$, односно B_m^2, губици у јединичној запремини једнаки су

$$p_{H1} = \sigma_{H1} \cdot f \cdot B_m^2 \,. \tag{2.52}$$

Уводећи коефицијент σ_H који је једнак количнику коефицијента σ_{H1} и специфичне масе феромагнетског материјала, специфични губици услед хистерезиса сведени на јединичну масу једнаки су

$$p_H = \sigma_H \cdot f \cdot B_m^2 \,. \tag{2.53}$$

2.14.2 Губици услед вихорних струја

Феромагнетици су углавном проводни материјали. Промена магнетске индукције у проводним контурама феромагнетика доводи до појаве просторно расподељених струја које се противе промени флукса и доприносе губицима у магнетском пољу. Могуће је уочити тубе које обухватају струјнице просторно расподељених струја и сваку од туба третирати као струјну контуру.

На слици 2.25 је приказан комад феромагнетика у коме постоји простопериодична магнетска индукција B амплитуде B_m и кружне учестаности ω. Линије поља магнетске индукције обухваћене су контуром C, која је уједно и средња линија тубе попречног пресека S_C и дужине l_C. Будући да се туба налази у феромагнетику коначне проводности σ, могуће је представити је проводном контуром отпорности $R_C = l_C/(S_C\,\sigma)$. У контури се јавља електромоторна сила одређена променом флукса

$$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-S_C B_m \sin\omega t\right) = \omega\, S_C B_m \cos\omega t \tag{2.54}$$

Слика 2.25. Вихорне струје у гвожђу стварају губитке. На слици је приказана туба која обухвата струјнице просторно расподељених струја.

Амплитуда електромоторне силе индуковане у контури пропорционална је кружној учестаности и интензитету магнетске индукције, $E \sim \omega B_m \sim 2\,\pi\, f\, B_m$. Струја која се успоставља у проводној контури пропорционална је електромоторној сили, а обрнуто пропорционална отпорности, $I_C \sim E/R_C \sim 2\,\pi\, f\, B_m/R_C$. Снага губитака у контури, дата једначином (2.55), пропорционална је отпорности R_C и квадрату струје I_C.

$$P_C \sim R_C I_C^2 \sim R_C \left(\frac{\omega B_m}{R_C} \right)^2 \sim \frac{\omega^2 B_m^2}{R_C} \tag{2.55}$$

Тако су и укупни губици у магнетском колу услед вихорних струја пропорционални квадрату кружне учестаности и квадрату магнетске индукције. Специфични губици услед вихорних струја једнаки су

$$p_V = \sigma_V \cdot f^2 \cdot B_m{}^2, \tag{2.56}$$

где је σ_V коефицијент пропорционалности који зависи од специфичне проводности и специфичне масе материјала.

2.14.3 Укупни губици у магнетском колу

Збир специфичних губитака услед хистерезиса и губитака услед вихорних струја дат је једначином (2.57). Јединица специфичних губитака p_{Fe} је W/kg. Укупни губици у магнетском колу масе m са униформном расподелом поља једнаки су $P_{Fe}=p_{Fe}m$.

$$p_{Fe} = p_H + p_V = \sigma_H \cdot f \cdot B_m{}^2 + \sigma_V \cdot f^2 \cdot B_m{}^2 \tag{2.57}$$

Код магнетских кола променљивог пресека као и у случају када се коло састоји од делова начињених материјала различитих својстава, специфични губици p_{Fe} нису једнаки у свим деловима кола, тако да се укупни губици P_{Fe} одређују интеграцијом специфичних губитака по запремини магнетског кола.

2.14.4 Начини за смањење губитака у гвожђу

Губици енергије у магнетском колу смањују степен корисног дејства електромеханичког претварача. Поред тога, губици прелазе у топлоту и увећавају температуру магнетског кола. Прекомерно загревање може довести до оштећења магнетског кола или других блиских делова машине. Стога је створену топлоту неопходно пренети околини, то јест, потребно је остварити одговарајуће хлађење. Наведене појаве су разлог настојању да се губици у магнетском колу смање.

У феромагнетицима који се користе у градњи електричних машина и трансформатора, губици услед вихорних струја су доминантни и могу бити десетак пута већи од губитака услед хистерезиса. Увећање степена корисног дејства машина као и спречавање прекомерног загревања магнет-

ског кола може се постићи спровођењем додатних мера за смањење губитака у гвожђу.

Додавањем силицијума и других материјала мање специфичне проводности у легуру гвожђа, од које се израђује магнетско коло, смањује се специфична проводност. Увећање отпорности R_C проводних контура смањује амплитуду вихорних струја (2.55) и смањује снагу губитака.

Губици услед вихорних струја се могу смањити и *ламинацијом*, то јест израдом магнетског кола од танких феромагнетских слојева (лимова) који се постављају у правцу простирања магнетског поља, на начин приказан сликом 2.26. Ламинирано магнетско коло не прави од хомогеног комада гвожђа, већ садржи пакете гвоздених лимова који су међу собом електрично изоловани.

Слика 2.26. Електрична изолација постављена између слојева магнетског кола пречи пут вихорним струјама.

Будући да су лимови паралелни са пољем, контуре у којима се индукују вихорне струје су нормалне на правац поља. Електрична изолација између суседних слојева стоји на путу вихорних струја, тако да се оне могу успоставити само у једном слоју. Може се показати да се на тај начин значајно умањују губици услед вихорних струја.

Гвоздени лимови који се користе у градњи магнетских кола електричних машина и трансформатора са радном фреквенцијом од 50 Hz имају дебљину између 0,2 mm и 0,5 mm. Изолација између лимова се остварује уметањем танког слоја изолационог материјала (папир, лак) или краткотрајним излагањем површине лима деловању киселине, која у веома танком површинском слоју ствара непроводну со гвожђа и дате киселине.

Код савремених електричних машина које се користе у електричним возилима, хибридним аутомобилима и алтернативним изворима струје, радна фреквенција може бити већа од 1 kHz. Магнетско коло савремених машина се прави од лимова веома мале дебљине (0.05 – 0.1mm), од аморфних трака на бази легура гвожђа, мангана и других метала, као и од ферита. Ферит је материјал који се добија од усијане легуре гвожђа која се под притиском уводи у бризгаљку са узаним отвором. Истопљена легура се тако распршује у капљице лоптастог облика, пречника реда величине 50 μm. Краткотрајна оксидација ових капљица ствара веома танак слој изолујућег оксида. Минијатурне лоптице падају у уље које их хлади. Прикупљањем се добија фина прашина сачињена од изолованих феромагнетских сфера. Сабијањем ове прашине под притиском (синтеровање) добија се тврди материјал који се назива ферит, са повољним магнетским особинама и веома малим губицима услед вихорних струја.

2.14.5 Процена ефеката ламинације феромагнетика

На слици 2.27, приказан је један од слојева (лимова) у пакету који је део магнетског кола. Дебљина слоја је a и у њему постоји магнетска индукција која се мења простопериодично, по закону $B(t) = B_m \cdot \sin \omega t$, где је B_m амплитуда а ω кружна учестаност. Дебљина a је врло мала у односу на висину слоја l. У оквиру попречног пресека слоја, уочава се контура c ширине $2x$. Будући да је $x \leq a/2$, може се сматрати да је $x \ll l$. На слици 2.27, референтни смер контуре c је супротан од назначеног смера вектора магнетске индукције, тако да је флукс кроз контуру једнак

$$\Phi = -2 \cdot x \cdot l \cdot B_m \cdot \sin \omega t \,.$$

У контури се јавља електромоторна сила одређена изводом флукса. Њена амплитуда је одређена производом учестаности, амплитуде магнетске индукције и ширине контуре $2x$,

$$e = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = 2 \cdot x \cdot l \cdot \omega \cdot B_m \cdot \cos \omega t \,.$$

У зависности од одабраног референтног смера, може се имати $e = +\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$ или $e = -\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$. Снага губитака зависи од квадрата вихорних струја, тако да избор референтног смера не утиче на резултат прорачуна. Будући да је да је $x \ll l$, део контурног интеграла дуж краћих страница правоугаоне контуре c може бити занемарен, тако да се индуковано електрично поље E на месту дужих страница правоугаоне контуре може одредити из једначине (2.58).

$$e = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 2 \cdot l \cdot E(x) = 2 \cdot x \cdot l \cdot \omega \cdot B_m \cdot \cos \omega t \,, \tag{2.58}$$

$$|E(x)| = x \cdot \omega \cdot B_m \cdot \cos \omega t$$

Слика 2.27. Прорачун расподеле индукованог електричног поља и просторне густине струје у једном слоју магнетског кола.

У феромагнетском материјалу специфичне проводности σ у коме постоји индуковано електрично поље E јављају се и просторне струје густине $J = \sigma E$. У посматраном слоју феромагнетика, густина струје је,

$$J(x) = \sigma E(x) = \sigma \cdot x \cdot \omega \cdot B_m \cdot \cos \omega t.$$

Просторне струје у материјалу коначне проводности стварају Џулове губитке. Специфична снага губитака једнака је производу густине струја и алгебарског интензитета електричног поља,

$$p_{Fe}(x) = \frac{\Delta P}{\Delta V} = \sigma E^2(x) = \frac{J^2(x)}{\sigma} = \sigma \cdot (x \cdot \omega \cdot B_m \cdot \cos \omega t)^2.$$

Укупни губици $P1_{Fe}$ у једном слоју феромагнетика димензија $a \times l \times H$ добијају се просторном интеграцијом и одређени су једначином (2.59).

$$P1_{Fe} = \int_V p_{Fe}(x) dV = 2 \cdot \int_0^{\frac{a}{2}} H \cdot l \cdot \sigma \cdot (x \cdot \omega \cdot B_m \cdot \cos \omega t)^2 dx = \tag{2.59}$$

$$= \frac{a^3}{12} H \cdot l \cdot \sigma \cdot B_m{}^2 \cdot \omega^2 \cdot (\cos \omega t)^2 = k \cdot a^3 \cdot B_m{}^2 \cdot \omega^2$$

Коефицијент k зависи од димензија H и l, специфичне проводности σ и фактора $\cos^2 \omega t$, чија је средња вредност једнака 0,5. Резултат (2.59) се може искористити у анализи смањења губитака услед поделе магнетског кола на слојеве дебљине a.

На слици 2.26(А) приказан је хомогени комад феромагнетика који се може сматрати једним слојем дебљине $a = A$. Полазећи од претпоставке да је дебљина посматраног дела магнетског кола значајно мања од висине, могуће је применити резултат (2.59) и одредити губитке P_{hom} на основу једначине (2.60).

$$P_{hom} = k \cdot B_m{}^2 \cdot \omega^2 \cdot A^3 \tag{2.60}$$

Посматрани део магнетског кола се може начинити тако да има N међу собом изолованих слојева (лимова) дебљине $a = A/N$, као што је приказано на слици 2.26(В). Уколико је слој електричне изолације између феромагнетских лимова значајно мањи од дебљине a, тада ће магнетска отпорност ламинираног дела магнетског кола бити једнак отпорности која се има са хомогеним комадом феромагнетика, као на слици 2.26 (А). У сваком од посматраних лимова постоје губици $P1_{Fe}$, одређени једначином (2.59). Будући да је укупан број лимова једнак N, губици P_{lam} у посматраном делу магнетског кола ширине $A = aN$ одређени су изразом (2.61).

$$P_{lam} = N\ k \cdot B_m{}^2 \cdot \omega^2 \cdot \left(\frac{A}{N}\right)^3 = k \cdot B_m{}^2 \cdot \omega^2 \cdot A \cdot a^2 = \frac{P_{hom}}{N^2} \tag{2.61}$$

Резултат (2.61) указује да се губици услед вихорних струја у делу магнетског кола задатих димензија смањују N^2 пута уколико се феромагнетик подели у N изолованих слојева једнаке дебљине, постављених у правцу магнетског поља. У случају да постоји променљиво магнетско поље оријентисано у правцу нормале на лимове, ламинација нема утицаја на губитке услед вихорних струја. Поред тога, ламинацијом магнетског кола се не могу смањити губици услед хистерезиса.

У случају да су лимови исправно постављени у магнетко коло, губици услед вихорних струја су пропорционални квадрату дебљине лима a, што наводи на закључак да треба користити што тање лимове. Стога се јавља питање зашто се у градњи магнетских кола за радне фреквенције од 50 Hz не користе лимови тањи од 0,2 mm. Одговор лежи у томе што слој изолације међу лимовима, без обзира на то ради ли се о папиру, слоју оксида или соли, има дебљину од неколико десетина микрометара, па би се код тањих лимова удео гвожђа у попречном пресеку магнетског кола неприхватљиво умањио.

У магнетским колима начињеним од пуног материјала, у којима постоје значајне вихорне струје, са порастом учестаности долази до неравномерне расподеле магнетске индукције B по пресеку језгра. Наиме, вихорне струје стварају магнетско поље које се противи променама магнетске индукције у језгру. Ефекти вихорних струја су већи у средишту језгра, што доводи до разлике у јачини магнетске индукције на периферији и у средишту језгра. У магнетским колима начињеним од гвоздених лимова, поменути ефекти су значајно умањени, тако да нема већих разлика у јачини поља по пресеку језгра.

2.15 Обртне електричне машине

Електричне машине су најчешће обртне (ротационе) направе које стварају електромагнетски моменат захваљујући магнетском спрежном пољу. Машине обављају електромеханичко претварање енергије, па их зовемо и обртни претварачи. Непокретни део обртних машина се зове статор. Покретни део се обрће и зове се ротор. Обртно кретање ротора је доступно на вратилу, преко кога се ротор механички спреже са радном машином. Магнетско спрежно поље ствара моменат који делује на ротор, наводећи га на кретање. Моменат је резултат спрега електромагнетских сила и зато се зове електромагнетски моменат.

2.15.1 Магнетско коло обртних машина

Електричне машине су углавном цилиндричног облика. Најчешће је статор, непокретни део машине, начињен у виду шупљег цилиндра у чијој се унутрашњости налази цилиндрични ротор који се може обртати. Статор и ротор су начињени од феромагнетика, и између њих је ваздушни зазор (процеп). Средином ротора уграђује се челично вратило, преко кога се преноси електромагнетски моменат механичком подсистему. На статору и ротору могу постојати намотаји или стални магнети, који стварају статорско и роторско поље. Интеракцијом ова два поља ствара се електромагнетски моменат, који покреће ротор и ствара обртно кретање. На слици 2.28 је дат пресек магнетског кола електричне машине.

Слика 2.28. Пресек цилиндричне електричне машине. (A) Магнетско коло статора. (B) Магнетско коло ротора. (C) Линије магнетског поља. (D) Проводници роторског струјног кола на које делују електромагнетске силе F_{em}.

2.15.2 Механички прилаз

Обртне машине се повезују са оптерећењем или радном машином преко вратила. Ротор и вратило се обрћу механичком угаоном брзином Ω_m. Производ момента који ствара спрег електромагнетских сила M_{em} и који тежи да покрене ротор, и брзине обртања Ω_m даје снагу електромеханичког претварања $P_{em} = M_{em}\Omega_m$. У случају када моменат делује у смеру кретања снага P_{em} је позитивна. Тада се електрична енергија претвара у механички рад тако да машина ради у моторном режиму. Референтни смерови за брзину и моменат приказани су на слици 2.29.

Слика 2.29. Референтни смер за брзину обртања, електромагнетски моменат и моменат оптерећења.

Вратило представља механички прикључак, односно механички прилаз, то јест механички излаз машине. Оно се обрће угаоном брзином Ω_m и преноси електромагнетски моменат M_{em}. У случају када електрична машина ради као мотор, електромагнетски моменат је кретни ($M_{em} > 0$), док се механичко оптерећење (терет, радна машина) противи кретању отпорним моментом супротног знака, означеним M_m. У моторном режиму рада, електромагнетски моменат $M_{em}>0$ тежи да убрза ротор, док отпорни моменат $M_m>0$ тежи да успори. Промена брзине је одређена Њутновим законом примењеним на обртно кретање.

$$J\frac{\mathrm{d}\Omega_m}{\mathrm{d}t} = M_{em} - M_m \tag{2.62}$$

Електрична машина генерално може радити као мотор или као генератор. Мотор обавља електромеханичко претварање електричне енергије у механички рад, а генератор обавља претварање у супротном смеру. Код машине која ради као мотор, моменат M_{em} је са предзнаком плус, док је код генератора са предзнаком минус. У генераторском раду, ротор је везан за турбину која покреће ротор, тако да моменат M_m узима негативну вредност у односу референтни смер дат на слици 2.29. Електромагнетски

моменат генератора M_{em} се супротставља том кретању, па и он узима негативну вредност у односу на означени референтни смер. Снага електромеханичког претварања P_{em} је мања од нуле. Према усвојеној конвенцији о позитивном смеру за снагу претварача, снага P_{em} узима негативну вредност у случају да машина претвара механички рад у електричну енергију.

2.15.3 Намотаји

Поред магнетских кола, која усмеравају магнетско поље, електричне машине поседују и струјна кола, то јест намотаје, који проводе електричну струју. Намотаји се изводе од већег броја изолованих бакарних проводника. Код цилиндричних машина, проводници се постављају у правцу осе цилиндра (коаксијално). Редним везивањем већег броја проводника добија се намотај. Два редно везана, дијаметрално супротно постављена проводника формирају један навојак. Машина може имати већи број намотаја. Намотаји могу постојати и на статору и на ротору. Сваки намотај има два краја, који могу бити кратко спојени, отворени, или се повезују са електричним извором из кога се машина напаја. Везивањем на напонски или струјни извор, у намотајима се успоставља електрична струја. Крајеви намотаја представљају *електрични прилаз* (*прикључак*, *улаз*) машине. Струја i која постоји у намотају са N навојака ствара магнетопобудну силу $F = Ni$. Дељењем магнетопобудне силе са магнетском отпорношћу R_μ добија се флукс Φ. Намотаји статора формирају статорски флукс, док намотаји ротора стварају роторски флукс. Постоје машине код којих статор или ротор немају намотаје, већ се флукс ствара уз помоћ сталних магнета.

Садејством магнетопобудних сила статора и ротора ствара се резултантни флукс машине. Линије резултантног поља пролазе кроз магнетско коло ротора, ваздушни зазор и магнетско коло статора. На слици 2.30 (A) приказане су линије магнетског поља у зазору. На слици се уочава зона у којој линије магнетског поља излазе из магнетског кола ротора и улазе у ваздушни зазор. Уочена зона има назив *северни магнетски пол ротора*. Дијаметрално супротно према северном може се уочити јужни магнетски пол. На исти начин, могу се уочити северни и јужни магнетски полови статора. Електромагнетски моменат настаје из тежње роторских полова да се поставе наспрам супротних полова статора.

У десном делу слике 2.30, приказан је пресек машине на коме је приказан положај (C) у коме могу бити проводници статорских и роторских намотаја. На статору и ротору може бити више намотаја. Ради прегледности, поједини намотаји се представљају ознаком каква је дата на слици 2.30 (E).

Слика 2.30. Магнетско поље у ваздушном зазору и намотаји електричне машине. (A) Приближан[2] изглед линија резултантног магнетског поља у ваздушном зазору. (B) Магнетско коло статора и ротора. (C) Коаксијално постављени проводници намотаја. (D) Ваздушни зазор. (E) Ознаке које се користе за означавање намотаја.

Флукс статора се може представити вектором чији су правац и смер одређени положајем полова, док му је алгебарски интензитет одређен самим флуксом, то јест површинским интегралом магнетске индукције. На исти начин се може представити роторски флукс. У наредним поглављима ће бити показано да је електромагнетски моменат одређен векторским производом два флукса, односно производом њихових интензитета и синуса угла између њих.

[2] На слици 2.30 је дат приближан облик линија магнетског поља у ваздушном зазору, који не одговара пољу у зазору реалних машина. Електричне машине имају магнетско коло са жлебовима и зупцима, описаним у наредним поглављима. Присуство зубаца утиче на облик поља у зазору и чини га релативно сложеним. У хипотетичком случају где је магнетско коло идеалног цилиндричног облика а пермеабилност феромагнетика значајно већа од пермеабилности ваздуха, линије магнетског поља су управне на површ која дели ваздушни зазор и феромагнетик. Према граничним условима за тангенцијалну компоненту поља H на површи која раздваја ваздух и феромагнетик, тангенцијална компонента магнетског поља у ваздуху је једнака пољу у феромагнетику. Будући да је $B_{Fe} < 1{,}7$ T и $H_{Fe} = B_{Fe}/\mu_{Fe} \approx 0$, тангенцијална компонента поља у ваздуху је блиска нули, тако да су линије поља у зазору управне на површ која дели ваздушни зазор од магнетског кола.

Слика 2.31. Изглед цилиндричног магнетског кола статора са једним навојком који чине два проводника положена у наспрамне жлебове.

2.15.4 Жлебови у магнетском колу

Магнетска кола статора и ротора начињена су од лимова, како би губици у њима били што мањи. Лимови се слажу коаксијално, то јест сваки појединачни лим има облик попречног пресека који се види на слици 2.33. Већи број лимова се слаже, учвршћује, и тако се формира магнетско коло. Статор најчешће има облик шупљег цилиндра, док је ротор цилиндричан, и постављен је у статорску шупљину. Растојање између статора и ротора (ваздушни зазор, процеп) може бити од једног до неколико милиметара.

Намотаји машине састоје се од редно повезаних бакарних проводника, који су изоловани међу собом, као и у односу на магнетско коло машине. Проводници су изоловани лаком, папиром, силиконом, или другим изолационим материјалом. Изоловани бакарни проводници су смештени у *жлебове* који су постављени коаксијално (паралелно оси машине), и налазе се на унутрашњој страни магнетског кола статора или на спољашњој страни магнетског кола ротора. Неки примери жлебова дати су на слици 2.32. Облик попречног пресека је одређен потребом да се постигне мањи или већи флукс расипања, као и потребом механичког учвршћења проводника који се смештају у жлебове.

Слика 2.32. Облици жлебова у магнетском колу електричних машина. (A) Отворени жлеб правоугаоног пресека. (B) Жлеб трапезног облика. (C) Полузатворени жлеб округлог пресека.

На слици 2.33, ознака (B) указује на жлеб[3] у магнетском колу статора. Део магнетског кола између два суседна жлеба зове се *зубац* (детаљ A на слици 2.33). Жлебови се формирају тако што се у свим лимовима, чијим се слагањем добија магнетско коло, уреже исти усек. После слагања лимова, добије се жлеб трапезног, овалног или другог облика. Начин на који се изоловани проводници смештају у жлебове приказан је на слици 2.33, при чему је у горњем левом делу слике дат поглед на статор са предње стране, док је у доњем левом делу слике дат поглед са задње стране.

Слика 2.33. Дефинисање једног навојка и једне секције.

[3] **[жлеб = slot (eng.), cava (it.) зубац = tooth (eng.) dente (it.)].**

Један навојак се може добити редним везивањем проводника који стоје у различитим жлебовима (део E на слици 2.33). Жлебови могу бити дијаметрално постављени, али постоје и навојци у којима то није случај. По изласку из жлебова, проводници који припадају једном навојку повезани су спојени су проводником који је на слици 2.33 означен словом (D)[4]. Проводници у жлебовима и спој (D) на крајевима су најчешће део једног те истог комада изоловане бакарне жице.

Уколико се у посматране жлебове смести већи број навојака који се редно повежу, добија се *канура* или *секција* (део F на слици 2.33). Једна секција има повратне везе на предњој страни статора (детаљ C у доњем десном делу слике) и као и на задњој страни статора (D).

Једна секција може имати један или више редно везаних навојака. Један намотај може имати једну или више редно везаних секција. Крајеви намотаја се могу прикључити на електрични извор или електрични пријемник. Они представљају електрични прилаз машине. Електричне машине могу имати већи број намотаја од којих се могу налазити на статору или ротору.

Флукс навојка једнак је флуксу кроз контуру одређену проводницима навојка. Флукс навојка се означава знаком Φ и једнак је површинском интегралу магнетске индукције на површи која се ослања на контуру. Флукс кануре са N навојака једнак је $N\Phi$.

Питање (2.9):

Постоји ли у зупцима магнетска индукција већег или мањег интензитета него у остатку магнетског кола? Зашто?

Одговор (2.9):

Флукс машине пролази кроз унутрашњост магнетског кола статора и унутрашњост магнетског кола ротора, у којима нема ваздушних џепова велике магнетске отпорности. Приликом уласка у ваздушни зазор, линије поља пролазе кроз зупце. Еквивалентни попречни пресек се тада смањује, јер се поље усмерава у зупце а не у жлебове, чија је магнетска отпорност знатно већа. Будући да исти флукс сада постоји у мањем еквивалентном попречном пресеку, магнетска индукција у зупцима је већа од индукције у другим деловима магнетског кола.

2.15.5 Положај и ознаке оса намотаја

Намотаји могу постојати на статору, ротору, или на оба дела машине, у зависности од тога ради ли се о машини за једносмерну струју, асинхроној или синхроној машини. Уводне напомене о намотајима електричних ма-

[4] end turns, eng.

шина дате су у одељку 2.36 *Намотаји.* Код синхроних машина и машина једносмерне струје, флукс побуде се може остварити и уз помоћ сталних магнета, и тада је број намотаја мањи пошто не постоји побудни намотај. Машине за наизменичну струју у које спадају асинхроне и синхроне машине, на статору најчешће имају три намотаја. Код приказа машина са већим бројем намотаја, избегава се приказивање свих проводника који творе намотаје, зато што би приказ био непрегледан. Уместо тога, сваки од намотаја се представља ознаком која дефинише његову осу, односно просторну оријентацију.

Оса намотаја је одређена правцем линија магнетског поља створеног дејством струја у проводницима намотаја. У оквиру претходних одељака, *намотај* је дефинисан као скуп више проводника који су смештени у жлебове, повезани на ред, и доступни преко крајева намотаја који се повезују са електричним изворима или пријемницима. Један *навојак* има два редно повезана проводника који леже у различитим жлебовима. Проводници су повезани повратним везама на крајевима машине, са којима формирају контуру. Електромоторне силе проводника се сабирају и чине електромоторну силу навојка, то јест контуре. Флукс који ствара струја једног навојка има правац који је нормалан на површ ослоњену на контуру навојка. Нормала дефинише просторну оријентацију навојка. Навојци који чине један намотај могу бити расподељени дуж обима машине и имати различите просторне оријентације.

У случају да сви навојци који творе један намотај имају исту оријентацију, тада струја у сваком од њих ствара магнетопобудну силу и флукс у истом правцу. Овакав намотај називамо *концентрисаним*. Успостављање струје у таквом намотају доводи до стварања магнетског поља у ваздушном зазору. Линије поље пролазе кроз гвоздено језгро, у коме је јачина поља H_{Fe} врло мала услед велике пермеабилности гвожђа. Поред тога, линије поља два пута пролазе кроз ваздушни зазор, што је приказано на слици 2.34. Стога се јачина поља у зазору може одредити из једнакости $Ni = 2\ H_o\delta$. Магнетско поље једног намотаја чини да се у ваздушном зазору створе две зоне, једна, у којој линије поља излазе из магнетског кола ротора, пролазе кроз ваздушни зазор и улазе у магнетско коло статора, и друга, у којој је смер поља супротан претходном. Ове зоне називамо *магнетским половима*. Положај полова одређује *правац простирања поља*. Овај правац лежи на оси намотаја, као пример, уколико је намотај састављен од два дијаметрално супротна, редно повезана проводника, оса намотаја је нормала на површ која се ослања на проводнике.

Будући да би приказ свих проводника намотаја био одвећ сложен и имао малу употребну вредност, намотаји се приказују нарочитим ознакама, сличним ознакама за индуктивни калем. Оријентација ознака треба да буде таква да лежи на оси намотаја, то јест правац у коме лежи ознака тре-

ба да буде такав да лежи у смеру линија магнетског поља које ће се успоставити када у намотају постоји струја. Начин означавања осе намотаја дат је на слици 2.34.

При формирању намотаја једне електричне машине, у једном жлебу може постојати више проводника. Проводници који леже у истом жлебу не морају припадати истом намотају. Као пример, код трофазне машине у којој постоје три статорска намотаја (који имају укупно 6 крајева), у истом жлебу се могу наћи проводници два или три статорска намотаја. Три дела једног статорског намотаја се често називају *фазама* (три фазна намотаја).

Слика 2.34. Означавање намотаја и осе намотаја.

2.15.6 Губици у претварању

Током рада машине, у магнетском колу, намотајима и механичком подсистему постоје губици. Снага губитака у магнетском колу је последица промене магнетске индукције у феромагнетику и дели се на губитке услед хистерезиса и губитке услед вихорних струја. Губици услед вихорних струја се могу умањити ламинацијом, односно израдом магнетског кола од лимова међу којима постоји електрична изолација, чиме се умањују губици услед вихорних струја. Снага Џулових губитака у намотајима је пропорционална отпорности намотаја и квадрату јачине струје. Механички губици су последица отпора кретању ротора у самој машини. Механички губи-

ци су у највећој мери последица трења у лежајевима и отпора ваздуха у зазору.

При раду у моторном режиму рада и устаљеном стању, машина из електричног извора који напаја намотаје преузима снагу $P_{eM} = \Sigma u i_M$. Референтни смер за снагу P_{eM} и струју i_M је од електричног извора према машини (мотору). Током процеса претварања, један део снаге се губи у магнетском колу (губици у гвожђу, P_{FeM}) и у намотајима (губици у бакру, P_{CuM}). Унутрашња механичка снага која се предаје ротору је производ електромагнетског момента и брзине обртања $M_{em}\Omega_m$. Услед отпора кретању због трења у лежајевима и трења у ваздуху, јављају се механички губици $P_{\gamma mM}$. Снага $P_{mM} = M_{em}\Omega_m - P_{\gamma mM} = M_m\Omega_m$ се предаје радној машини путем вратила. У моторном режиму рада, снага извора P_{eM} представља улаз у машину, снага P_{mM} представља излаз из машине, док збир $P_{FeM} + P_{CuM} + P_{\gamma mM}$ одређује губитке снаге. Однос $\eta = P_{mM}/P_{eM}$ представља *степен корисног дејства* машине, и увек је мањи од један. Биланс снаге машине која ради у моторном режиму рада дат је на слици 2.35.

Слика 2.35. Биланс снаге електричне машине у моторном режиму рада.

У случају када машина ради као генератор, она претвара механички рад у електричну енергију. Биланс снаге за генераторски режим рада дат је на слици 2.36. Генератор преузима механичку снагу P_{mG}, добијену од парне турбине, водене турбине, ендотермичког мотора или друге сличне направе.

На слици 2.36, механичка снага се сматра позитивном уколико има смер од погонске турбине ка електричној машини. Уколико се за референтни смер снаге задржи смер усвојен за моторни режим рада (слика 2.35), из електричне машине према радној машини, тада механичка снага P_m у гене-

раторском режиму рада узима вредност мању од нуле. Референтни смер снаге P_{eG} је од генератора према електричним пријемницима, једнако као и за струју i_G.

Снага P_{mG} представља улазну снагу генератора. У машини се један део улазне снаге утроши на савладавање отпора кретању ротора. Одузимањем снаге $P_{\gamma mG}$ од улазне снаге P_{mG} добија се унутрашња механичка снага која се сада претвара у електричну. Добијена електрична снага се једним делом утроши на губитке у намотајима P_{CuG} и губитке у магнетском колу P_{FeG}. Остатак снаге је на располагању електричним потрошачима које напаја генератор. На прикључцима намотаја генератора добијају се струје и напони који одређују генерисану електричну снагу $P_{eG} = \Sigma u i_G$, која се може пренети електричним потрошачима.

Слика 2.36. Биланс снаге електричне машине у генераторском режиму рада.

Степен корисног дејства се може увећати уколико се машина конструише тако да има мање губитке у намотајима и мање губитке у магнетском колу. Увећањем попречног пресека проводника, смањује се отпорност бакарних проводника, што доводи до смањења губитака у бакру. Увећањем попречног пресека магнетског кола смањује се магнетска индукција у машини, па су самим тим и губици у гвожђу мањи. С друге стране, смањење густине струје и магнетске индукције доводи до увећања запремине и масе машине. Мања је и специфична снага, која се одређује као количник снаге и масе машине. Коначно, за машину задате снаге, увећава се утрошак гвожђа и бакра, а повећавају се и димензије машине.

Мања густина струје и мањи интензитет вектора магнетске индукције доводе до смањења укупног утрошка електричне енергије током експлоатације машине. Како се увећање степена корисног дејства добија на рачун већег утрошка гвожђа и бакра, енергетски ефекти увећања степена кори-

сног дејства ипак могу бити негативни. Наиме, производња електролитичког бакра и гвоздених динамо лимова од који се саставља магнетско коло, изискује велике количине енергије, тако да негативни енергетски ефекти увећаног утрошка гвожђа и бакра могу превазићи позитивне ефекте добијене смањењем губитака.

Избор магнетске индукције и густине струје у електричној машини се обавља у фази пројектовања и представља компромис. Код машина које се користе у краћим временским интервалима, узимају се веће густине струје и веће јачине магнетске индукције. Степен корисног дејства ових машина је мањи, али се зато штеди на бакру и гвожђу.

Савремени електрични мотори се напајају из енергетских претварача који прилагођавају напоне и струје примарног извора потребама машине. Поред осталог, могућност промене услова напајања се користи и у сврху довођења машине у радни режим у коме се има мања снага губитака.

2.15.7 Поље у ваздушном зазору и у магнетском колу

Између статора и ротора се налази ваздушни зазор, који се често назива и ваздушни процеп[5]. Зазор δ је значајно мањи од пречника машине и обично износи од 0,5 mm код веома малих машина, до десетак милиметара код великих машина.

Пермеабилност феромагнетика (гвожђа) је веома велика. Како је флукс кроз ваздушни зазор једнак флуксу кроз гвоздено магнетско коло, у ова два домена могу се очекивати исте јачине магнетске индукције. Услед $\mu_{Fe} >> \mu_0$, магнетско поље H у гвожђу се може занемарити, и може се оправдано претпоставити да је од значаја једино поље H_o у ваздушном зазору. Сада се контурни интеграл поља H заправо своди на вредност дату у једначини (2.63) која исказује једнакост магнетопобудне силе и криволинијског интеграла магнетског поља по затвореној контури.

$$F = \sum Ni = \oint_C \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{l} \cong 2H_0\delta \qquad (2.63)$$

Двострука вредност производа $H_o\delta$ у једначини (2.63) постоји стога што линије магнетског поља два пута пролазе кроз ваздушни зазор, што је приказано на слици 2.38.

[5] [airgap (eng.) traferro (it.) entrefer (fr.)]

Слика 2.37. Пресек електричне машине. (A) Магнетска кола статора и ротора. (B) Проводници намотаја на статору и ротору. (C) Ваздушни зазор.

Слика 2.38. Линије магнетког поља приказане на пресеку електричне машине.

Будући да је $Ni = 2\,H_o\delta$, од значаја је имати мањи зазор δ, јер се тако жељено поље може постићи са мањом јачином струје у намотајима и са

мањом снагом губитака. Постоје, међутим и ограничења у погледу минималне вредности зазора. Коначна прецизност обраде машинских делова, коначан ексцентрицитет при уградњи ротора, као и постојање еластичне радијалне деформација вратила током рада доводе до тога да се зазор не може смањити на вредност мању од 0.5 ÷ 1 mm, јер би у противном постојао ризик да ротор током обртања додирне статор.

2.15.8 Расположиви моменат, енергија поља и димензије

Цилиндричне електричне машине са магнетским спрежним пољем развијају електромагнетски моменат захваљујући интеракцији магнетског поља и струја статора и ротора. Расположиви електромагнетски моменат се може довести у везу са димензијама машине. Поред тога, расположиви моменат се може проценити из енергије магнетског поља које постоји у машини.

Цилиндричне електричне машине са магнетским спрежним пољем имају статор који се не креће и ротор који може обртати. Ротор се обрће око осе цилиндричне машине. Оса је нормална на пресек машине дат на сликама 2.37 и 2.38. Мера механичке интеракције између статора и ротора је моменат. Када се моменат добија деловањем магнетског спрежног поља, зовемо га *електромагнетски моменат*. Моменат се ствара захваљујући интеракцији поља статора и поља ротора. Магнетско поље статора и/или ротора може бити добијено уградњом сталних магнета, или створено струјама које постоје у намотајима статора и/или ротора. Слика 2.33 илуструје стварање момента који тежи да разнородне полове статора и ротора доведе један наспрам другог. Ради одређивања везе која постоји између расположивог момента и енергије која је акумулисана у магнетском спрежном пољу машине, потребно је начинити рекапитулацију процеса електромеханичког претварања, уочавајући при томе цикличну природу процеса као и фазу у којој се преузима енергија из извора, односно фазу током које је извор одвојен а намотаји кратко спојени. На слици 2.39, ознаке W_i, W_{meh} и W_m представљају енергије извора, механичког подсистема и магнетског спрежног поља, респективно. Циклус претварања код претварача са магнетским спрежним пољем је аналоган циклусу претварача са електричним спрежним пољем који је описан у одељку 2.13.2 *Циклус претварања*.

У случају када је извор одвојен од намотаја машине (слика 2.39 А), напон на крајевима намотаја је $u \approx N\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t = 0$, тако да је флукс намотаја константан. Изостанком везе са извором, механички рад се може добити искључиво на рачун енергије спрежног поља, то јест $\mathrm{d}W_{meh} = -\mathrm{d}W_m$. Наведена тврдња се може илустровати примером индуктивног калема у чије је магнетско поље унесен покретни комад гвожђа. Померај dx комада гвожђа да-

је механички рад $dW_{meh} = F \cdot dx$, где је F сила која делује на покретни комад гвожђа. Сопствена индуктивност калема $L(x)$ зависи од положаја гвозденог комада. У случају да је калем раздвојен од извора и доведен у кратак спој, као и да се отпорност R калемских навојака може занемарити, извод флукса калема је једнак нули, па је флукс Ψ непроменљив. Промена енергије поља која постоји при померају dx је дата једначином (2.64), у којој је i јачина струје у калему.

Слика 2.39. Размена енергије између извора, поља и механичког подсистема у једном циклусу конверзије. (A) Интервал у коме је извор искључен, Φ = const. (B) Интервал у коме је извор прикључен, I = const.

$$dW_m = d\left(\frac{1}{2}Li^2\right) = d\left(\frac{\psi^2}{2L}\right) = -\frac{\psi^2}{2L^2}dL = -\frac{1}{2}i^2\,dL \tag{2.64}$$

Будући да је $dW_{meh} = -dW_m$, сила која делује на покретни комад гвожђа у магнетском пољу кратко спојеног калема може се одредити из једначине (2.65).

$$dW_{meh} = F\,dx = -dW_m \quad \Rightarrow \tag{2.65}$$

$$F = \frac{1}{2}i^2\frac{dL}{dx}$$

Уколико је извор прикључен (слика 2.39 B), струја у навојцима је одређена струјом извора I. При померају dx, извор предаје енергију $dW_i = u \cdot I \cdot dt$,

где је $u = \mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t$ напон на крајевима калема. Рад извора је дат једначином (2.66).

$$\mathrm{d}W_i = u\, I\, \mathrm{d}t = I\, \mathrm{d}\psi \tag{2.66}$$

Будући да је струја у навојцима калема непромењива, одговарајући прираштај енергије магнетског поља може се добити на начин дат једначином (2.67).

$$\mathrm{d}W_m = \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}LI^2\right) = \frac{1}{2}I^2\,\mathrm{d}L = \frac{1}{2}I\,\mathrm{d}\psi = \frac{1}{2}\mathrm{d}W_i \tag{2.67}$$

Из претходне једначине следи да се рад извора дели на равне делове[6] $\mathrm{d}W_m = \mathrm{d}W_{meh} = \mathrm{d}W_i/2$. Израз за силу која делује на покретни комад гвожђа у условима када је извор прикључен једнак је изразу (2.65), изведеном за случај када је извор искључен а калем кратко спојен.

Нити један од два приказана процеса не може дуго трајати. Уколико је извор искључен, енергија спрежног поља W_m ће се претварати у механички рад све док се у потпуности не исцрпи. Када је извор прикључен, део рада извора се претвара у механички рад, док други део увећава енергију поља. Енергија спрежног поља се увећава тако што расту јачине магнетског поља H и магнетске индукције B. Акумулација енергије W_m је ограничена појавом магнетског засићења у гвозденим лимовима, које ограничава магнетску индукцију на $B_{max} < (1{,}7 \div 2)$ T. Дакле, претварање се обавља у циклусима који укључују интервал у коме је извор искључен (лева страна слике 2.39) и интервал када је извор укључен (десна страна слике). Интервал у коме је извор укључен мора бити праћен интервалом током кога је извор одвојен, како не би дошло до прекомерног увећања или смањења енергије акумулиране у спрежном пољу.

---

[6] Расподела рада извора одговара изразу $\mathrm{d}W_m = \mathrm{d}W_{meh} = \mathrm{d}W_i/2$ у случају да је средина линеарна, то јест, да пермеабилност средине не зависи од јачине магнетског поља. Тада је коефицијент сопствене индуктивности $L(x)$ зависи искључиво од положаја x гвозденог комада, тако да се однос Ψ/i не зависи од флукса нити од јачине струје. У описаним условима, исправне су тврдње исказане једначинама (2.66) и (2.67) па тиме и релација $\mathrm{d}W_m = \mathrm{d}W_{meh} = \mathrm{d}W_i/2$. Ако би јачина магнетске индукције у гвожђу достигла ниво при коме се јавља магнетско засићење, карактеристика магнетисања гвожђа $B(H)$ би била нелинеарна. Тада би индуктивност намотаја била функција положаја и флукса, то јест, $L = \Psi/i = f(x, \Psi)$. Стога би израз за прираштај енергије поља узео другачији облик, па се рад извора не би делио на једнаке делове.

Изрази за електричну силу дати једначинама (2.20) и (2.22) могу се применити у случајевима када је средина линеарна, то јест, када пермитивност средине не зависи од јачине поља.

Сви електромеханички претварачи раде у циклусима, при чему се механички рад добија најпре из извора, а потом се црпи из енергије акумулиране у спрежном пољу. Циклично прикључење и раздвајање извора не мора бити последица дејства прекидача, већ може бити дефинисано применом импулсног или наизменичног напона напајања који циклично мења смер и узима вредност једнаку нули. *У случају напајања из извора наизменичног напона, циклус електромеханичке конверзије је одређен периодом напајања.* Механички рад који се може добити у једном циклусу самерљив је са енергијом спрежног поља. На примеру датом на слици 2.39, енергија спрежног поља има највећу вредност $W_{m(max)}$ у тренутку када се извор искључује. Уколико се енергија поља крајем циклуса своди на нулу, тада је механички рад добијен током циклуса једнак двострукој енергији поља, $W_{meh(1)} = 2\ W_{m(max)}$. Код обртних (ротационих) машина, један циклус је најчешће одређен једним обртајем ротора. Механички рад добијен дејством електромагнетског момента M_{em} током једног обртаја једнак је производу момента и пређеног пута ($2\pi M_{em}$). Стога се електромагнетски моменат електричне машине може приближно одредити на основу максималне вредности енергије акумулисане у спрежном пољу.

Магнетско поље H има релевантне вредности искључиво у ваздушном зазору. У феромагнетику је ово поље занемариво услед значајно увећане пермеабилности. Дакле, енергија спрежног поља је лоцирана углавном у зазору.

Производ момента M_{em} и угаоне брзине обртања Ω_m је механичка снага, која се путем вратила предаје радној машини. У случају генератора, производ момента и брзине је мањи од нуле, те се механичка снага преко вратила заправо предаје машини.

Питање (2.10):

Уколико су познате димензије машине и вршна вредност магнетске индукције, проценити електромагнетски моменат који машина може развити.

Одговор (2.10):

Енергија акумулисана у магнетском пољу постоји поглавито у ваздушном зазору. Запремина зазора једнака је $V = \pi L D \delta$, где је D пречник машине, L осна дужина а δ ваздушни зазор. Јачина магнетске индукције B у зазору варира у функцији струје намотаја. Линије магнетског поља које пролазе зазором прелазе у феромагнетик (гвоздене лимове) од кога су начињена магнетска кола статора и ротора. Стога индукција у зазору не мо-

же премашити $B_{max} \approx 1{,}7$ T, будући да веће вредност B проузрокују магнетско засићење у лимовима. Густина енергије магнетског поља у зазору не може прећи $\frac{1}{2}B_{max}^2/\mu_o$. Максимална енергија спрежног поља се може проценити изразом $W_{m(max)} \approx \frac{1}{2}\pi LD\delta B_{max}^2/\mu_o$, док се електромагнетски моменат машине може проценити дељењем добијене енергије са 2π.

2.16 Моделирање електричних машина

Рад са електричним машинама тражи математичко моделирање процеса електромеханичког претварања. Потребно је одредити једначине које повезују величине на електричном прилазу машине (на крајевима намотаја), величине на механичком прилазу (вратилу), које описују губитке у претварању и пружају могућност за израчунавање момената, електромоторних сила и других релевантних величина. Скуп једначина које описују прелазне процесе у електричним машинама садржи диференцијалне једначине и алгебарске релације и зове се *динамички модел*. Рад машине у устаљеним стањима се описује заменским шемама за устаљена стања, које дају везу напона и струја на прикључцима намотаја, као и механичким карактеристикама, које описују везу момента и брзине обртања на механичком прилазу. У наредном одељку је дат увод у моделирање електричних машина. На слици 2.40 је дат дијаграм који приказује снагу извора P_e, механичку снагу P_m, губитке у намотајима P_{Cu}, губитке у спрежном пољу P_{Fe}, механичке губитке услед обртања $P_{\gamma m}$ као и енергију спрежног поља W_m.

Слика 2.40. Ток снаге у електромеханичком претварачу са магнетским спрежним пољем.

2.16.1 Потреба за моделирањем

Добро познавање електричних машина је основ за успешан рад електроинжењера. Познавање заменских шема за устаљена стања и механичких карактеристика је неопходно за избор машине која ће одговарати одређеној примени, за пројектовање система који у себи садрже електричне машине, као и за решавање задатака који могу бити постављени у индустрији и енергетици. Познавање динамичког модела машина је потребно за решавање проблема управљања генераторима и моторима, за пројектовање заштита и надзора, за одређивање структуре и параметара регулације у роботици, као и за решавање проблема у аутоматизацији производње, електричним возилима и другим сличним применама.

У свим горе набројаним случајевима, треба имати основну представу о величини, маси, конструкцији, поузданости и степену корисног дејства машина.

У наставку књиге биће изложен општи модел електричних машина, наведена и образложена уобичајена занемарења која се код моделирања чине, назначен приступ одређивању динамичког модела најчешће коришћених машина, а потом објашњено добијање заменских шема за устаљена стања као и механичких карактеристика машина.

Модел приказан на слици даје снагу P_e коју електромеханички претварач добија из извора, снагу P_m која се преноси у механички део система (*механички подсистем*) преко вратила, губитке у електричном подсистему P_{Cu}, губитке у гвожђу P_{Fe}, као и губитке $P_{\gamma m}$ који се због трења имају у механичком подсистему. Потребно је дати одговарајући математички модел који описује појаве у електромеханичком претварачу приказаном на слици 2.40.

Шта је то *модел*? Како добити *добар модел ?*

Уопште узевши, *модел* је математичка репрезентација система који се посматра. Најчешће се небитни утицаји занемарују и тако се добија упрошћена представа која још увек одговара сврси. У електротехници, модел је најчешће скуп диференцијалних једначина које описују понашање неког система. Једначине се у неким случајевима, као што је рад у устаљеном стању, могу свести на еквивалентно електрично коло (користе се и изрази *заменска шема, заменско коло, еквивалентна шема*).

Појаве и системи који су од интереса за електроинжењера су редовно сложене, и укључују утицаје који нису од интереса и не треба их узимати у обзир. Као пример, притисак гаса на чело клипа у цилиндру ендотермичког мотора резултат је непрекидног сударања веома великог броја честица гаса са површином клипа. Строго узевши, сила није константна, већ се састоји од веома великог броја удараца (импулса) у секунди. Међутим, при анализи момента који мотор даје на радилици, од интереса је средња вред-

ност силе, тако да се ефекти микро удараца занемарују, а сила се сматра пропорционалном површини чела клипа и притиска гаса у цилиндру.

У електротехници се често помињу и користе пасивне компоненте као што је отпорник, кондензатор и индуктивни калем (пригушница). Строго узевши, реалне пригушнице, кондензатори и отпорници имају модел који је сложенији од опште прихваћеног, једноставног модела. При раду на високим учестаностима, до изражаја долази паразитна индуктивност кондензатора и његова еквивалентна серијска отпорност. У сличним условима, не може се занемарити паразитна паралелна капацитивност пригушнице. Слични закључци се могу донети и за отпорник. Реалне компоненте би се код ригорозне анализе морале моделирати као мреже са расподељеним параметрима, али се то при раду са нижим учестаностима не чини, паразитни ефекти се занемарују, док се добро познати R, L, C, сматрају елементима са сконцентрисаним параметрима ($Ri = u$, $i = C\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$, $u = L\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$). Уколико би се при решавању проблема и задатака у домену нижих учестаности уважили сви паразитни ефекти, као и ефекти расподељених параметара, тада би посматране RLC мреже постале тако сложене да би њихова анализа била јако отежана, док би извођење закључака и пројектантских одлука постало немогуће.

Закључак: *добар модел* није онај који узима у обзир све аспекте динамичког понашања система, већ је добар онај модел који је упрошћен оправданим занемарењима, те се тако лакше сагледава и боље служи извођењу закључака и доношењу одлука, али при томе још увек обухвата све релевантне (значајне) појаве у систему. Није могуће извести аналитички израз који би помогао да се дефинише *релевантност*, већ је код занемарења неопходно раздвојити битно од небитног на основу дубљег познавања система, материјала, као и коришћењем искуства.

Проблеми моделирања

У моделовању је неопходно занемарити појаве које нису од значаја како би се добио једноставан, прегледан и употребљив модел. За успех у моделовању и коришћењу модела потребно је донети исправан суд о појавама које се могу занемарити. Уколико се занемаре или превиде битни феномени, резултат моделовања неће бити употребљив. Овде је дат пример који показује да се доношење исправне одлуке често ослања на шире познавање посматраних објеката и појава које се стиче инжењерским радом.

Посматрајмо кондензатор који се састоји од паралелних плоча међу којима је диелектрик. Уобичајено је да поље у диелектрику сматрамо хомогеним и једнаким $E = U/d$. Уколико користимо кондензатор у систему где његове високофреквентне карактеристике нису од значаја, можемо га сматрати идеалним, а расподелу поља међу електродама хомогеном. Посма-

трајмо сада случај када се на плоче доводи напон импулсног облика, са веома великом стрмином dV/dt. Посматрајући домен нижих учестаности, кондензатор и даље можемо сматрати идеалним, јер упрошћење које чинимо може бити без значаја за остатак система. Могуће је, међутим да током рада дође до пробоја у диелектрику, премда је прорачунски интензитет поља $E = U/d$ значајно мањи од диелектричне чврстоће (то јест јачине електричног поља која резултује пробојем диелектрика). Наиме, приликом довођења напона на плоче, ради се заправо о простирању електромагнетског таласа који се од напонског извора усмерава проводницима (*таласоводима*) и долази до плоча. Простирање електромагнетског таласа се наставља у диелектрик, на начин такав да је поље највеће јачине уз саме плоче, док је у простору између плоча мало. Неравномерна иницијална расподела поља се уравнотежи у веома кратком времену, које зависи од димензија и мери се наносекундама.

Као последица неравномерне расподеле поља, поступак наглог успостављања напона (са веома великом стрмином dV/dt) може довести до тога да, на кратко, поље превазиђе диелектричну чврстоћу материјала тик уз плоче кондензатора, чак и у случајевима када је $E = U/d$ веома мало. Пробој резултује нарушавањем структуре и хемијског састава диелектрика, али је ипак локалног карактера. Оштећене зоне диелектрика су уз саме плоче, док је у унутрашњости диелектрик очуван. Међутим, уколико се описани инциденти догађају често, на пример 10,000 пута у секунди, оштећене зоне се шире према средишту, мењају карактеристике кондензатора, све док се не догоди пробој између плоча и кондензатор тиме трајно онеспособи. *Сличан феномен догађа се у изолацији намотаја статора асинхроног мотора који се напаја из трофазних транзисторских инвертора, који дају тзв. U/f фреквенцијско управљање мотором, који раде на принципу ширинске модулације (PWM) и могу имати веома стрме ивице напонских импулса.*

Посматрани пример захтева дубље познавање процеса, и темељи се на искуству. Пример не приказује предзнање које треба да имају студенти на редовним студијама, нити представља предмет испитивања. Треба, међутим уочити потребу да се током студија један део времена посвети лабораторијском раду, практичном раду, семестралним радовима и пројектима који ће омогућити да се стекну искуства потребна за успешан рад инжењера. Успешан инжењер редовно комбинује теоријска знања, вештине у решавању аналитички датих проблема, али и искуство у моделирању процеса и појава. Да би теоријска знања и вештине дошле до изражаја, најпре је неопходно користити искуство и дубље познавање процеса електромеханичког претварања како би се сложени систем свео на математички модел са којим ће се даље радити.

Закључак: *добар модел* је најједноставнији могући модел који још увек на задовољавајући начин представља релевантне аспекте динамичког понашања система – процеса – машине.

У генерисању модела, чине се оправдана занемарења како би модел био једноставнији и погоднији за уочавање релевантних појава (то јест, појава од значаја), за извођење закључака и доношење инжењерских и пројектантских одлука. Приликом увођења занемарења, треба водити рачуна да она не угрозе тачност у мери која ће модел чинити неупотребљивим.

У оквиру предмета *Електричне машине*, у коме студенти по први пут сусрећу цилиндричне електромеханичке претвараче са магнетским спрежним пољем, чине се четири занемарења међу којима је и занемарење губитака у гвожђу. Изостављање ових губитака основне моделе машина чини лакшим за разумевање. Губици у гвожђу се умањују ламинацијом, па је поменуто занемарење донекле оправдано. Потребно је, међутим, имати у виду да код већих учестаности и веће индукције ови губици могу бити значајни, па их тада треба накнадно узети у обзир, пре свега код одређивања укупних губитака и степена корисног дејства, као и код пројектовања решења за хлађење.

2.16.2 Занемарења

Током извођења модела, занемарују се мање значајне појаве за које је оправдано сматрати да њиховим изостављањем неће бити начињена значајна одступања добијених резултата. Уводе се четири занемарења:

- Систем се посматра као мрежа са сконцентрисаним параметрима,
- Занемарују се паразитне капацитивности,
- Занемарују се губици у спрежном пољу,
- Феромагнетски материјали у магнетском колу се сматрају линеарним.

Занемарење ефеката расподељених параметара

Електричне машине се најчешће посматрају као мреже са сконцентрисаним параметрима. Занемарује се околност да је енергија магнетског и електричног поља расподељена у простору, па се индуктивни калемови и кондензатори сматрају идеалним, *са сконцентрисаним параметрима*, при чему се занемарују секундарни ефекти као што су капацитивност калема или индуктивност кондензатора. Усвајају се модели $u_L=L\,\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ и $i_C=C\,\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$, који дају задовољавајућу тачност за учестаности од значаја. Занема-

рује се околност да се енергија преноси кроз простор у коме постоји спрежно поље па се снага одређује према формулама као што је $p = ui$, у којима фигуришу макроскопске величине као што су струја и напон.

Занемарење паразитних капацитивности

Код електричних машина које раде на принципу магнетског спрежног поља, занемарују се ефекти паразитних капацитивности намотаја као и енергија која је акумулисана у електричном пољу. Будући да је просторна густина магнетског поља значајно већа од просторне густине електричног поља ($\mu H^2 \gg \varepsilon E^2$), оправдано је занемарити капацитивности које постоје међу изолованим проводницима као и капацитивности које постоје између намотаја и магнетског кола.

Занемарење губитака у гвожђу

Сматра се да су губици услед хистерезиса и губици услед вихорних струја значајно мањи од снаге претварања, тако да се могу занемарити. Губици у феромагнетику (гвожђу) зависе од магнетске индукције и учестаности и могуће их је приказати следећим изразом

$$p_{Fe} = \frac{P_{Fe}}{m} = p_H + p_V = \sigma_H \cdot f \cdot B_m{}^2 + \sigma_V \cdot f^2 \cdot B_m{}^2$$

Будући да губици услед вихорних струја зависе од квадрата фреквенције и квадрата магнетске индукције, при моделовању електричних машина које раде са повишеним учестаностима и већом индукцијом потребно је проверити да ли је занемарење губитака у гвожђу оправдано.

Занемарење нелинеарности средине

Карактеристика магнетисања магнетских материјала се сматра линеарном. Дакле, занемарују се ефекти магнетског засићења феромагнетика (гвожђа). Пермеабилност B/H се сматра непромењивом и једнаком диференцијалној пермеабилности $\Delta B/\Delta H$ у свим радним тачкама карактеристике магнетисања. У применама где магнетска индукција превазилази 1,2 T, потребно је проверити оправданост начињеног занемарења.

Уз поменута занемарења, изведен је општи модел електромеханичког претварача - машине - са магнетским спрежним пољем. Претпоставља се да претварач има N намотаја који могу бити кратко спојени или прикључени на извор. Намотаји су постављени на ротору или на статору.

2.16.3 Снага извора

На слици 2.41 приказан је претварач који има N контура (намотаја) који су магнетски спрегнути и који могу бити прикључени на електрични извор или раздвојени од њега. Намотаји електричних машина се могу напајати из струјних или напонских извора. Реални напонски извори имају коначну унутрашњу отпорност (импедансу), док реални струјни извори имају коначну проводност (адмитансу). Без нарушавања општости излагања, у даљем тексту се претпоставља да су електрични извори идеални.

У намотајима који су прикључени на струјни извор, струја је непромењива и одређена струјом извора. Уколико је намотај кратко спојен, тада је равнотежа напона у намотају дата изразом $u = Ri + \mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t = 0$. Уколико је отпорност намотаја занемарива, тада је $\mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t = 0$, па се флукс кроз кратко спојени намотај може сматрати константним. У случају да су крајеви намотаја прикључени на напонски извор, напон извора одређује промену флукса ($u \approx \mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t$).

Слика 2.41. Модел електромеханичког претварача са магнетским спрежним пољем са N контура (намотаја). Контура 1 и i су прикључене на изворе, док су контура 2 и N кратко спојене па су напони на њима једнаки нули.

Електрична снага коју извори предају електромеханичком претварачу је одређена једначином (2.68), у којој величине $\underline{u}$ и $\underline{i}$ представљају векторе чији су елементи напони и струје намотаја. Израз за снагу који извори предају машини не зависи од тога јесу ли намотају прикључени на струјне изворе, напонске изворе, или су доведени у кратак спој.

$$P_e = \sum_{j=1}^{N} u_j i_j = \underline{i}^T \cdot \underline{u}, \tag{2.68}$$

$$\underline{i}^T = \left[i_1, i_2, \ldots i_i, \ldots i_{N-1}, i_N \right],$$

$$\underline{u}^T = \left[u_1, u_2, \ldots u_i, \ldots u_{N-1}, u_N \right].$$

2.16.4 Електромоторна сила

У одељку 2.19 *Контра-електромоторна сила* дефинисане су електромоторна и контра-електромоторна сила индукована у контури. На истоветан начин, могу се дефинисати електромоторне силе намотаја који има N навојака. Равнотежа напона у намотају дата је једначином (2.69), у којој је u напон на крајевима намотаја, i струја намотаја, док је $\Psi = N\Phi$ флукс намотаја. Ознака R представља отпорност намотаја.

$$u = Ri + \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = Ri + e_{KEMS} \tag{2.69}$$

Посматрани намотај је приказан на слици 2.42. Извод флукса дефинише електромоторну силу која се индукује у намотају. При формирању еквивалентне шеме, електромоторна сила се може представити као идеални напонски генератор са ознаком + окренутом на доле, према усвојеном референтном смеру за струју. Тада се узима да је $e_{EMS} = -\,\mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t$. Величина $-\,\mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t$ је електромоторна сила индукована у намотају, што је приказано у делу (B) слике 2.42.

С друге стране, могуће је променити референтни смер као и знак ($e = +\,\mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t$), што је приказано у делу (A) слике 2.42. Величина $e_{KEMS} = +\,\mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t$ је контра-електромоторна сила индукована у намотају.

Приступ (B) се користи у већини курсева из основа електротехнике и електромагнетике, стога што недвосмислено илуструје околност да се у свакој контури индукује електромоторна сила и струја тако да се опиру промени флукса. Као пример, у случају да интензитет струје опада, смањује се и флукс кроз контуру, тако да се јавља позитивна вредност $e = -\,\mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t$. Имајући у виду да знак + стоји у доњем делу ознаке која представља електромоторну силу, закључује се да индукована електромоторна сила поспешује струју у колу, противећи се промени флукса.

Слика 2.42. Електромоторна сила и контра-електромоторна сила.

Приступ (А) резултује еквивалентном шемом у којој су референтни позитивни крајеви напона и електромоторне силе окренути на горе. Узимајући да је $e = +\,d\Psi/dt$, струја у колу се може одредити као количник разлике $(u - e)/R$. Овако дефинисана, електромоторна сила делује насупрот напону, те се назива и *контра електромоторном силом*. Приступ (А) се често примењује у решавању електричних кола у којима постоје електромоторне силе, што је случај и код заменских шема електричних машина. Питање избора референтног смера електромоторне силе није од суштинског значаја стога што избор не доводи до суштинских промена у једначини равнотеже напона у намотају. У англосаксонској, немачкој и руској литератури приступи су различити, што не треба да збуни читаоца. У пракси, прихватају се оба записа, уз услов да одабрани референтни смер одговара знаку који се узима за електромоторну силу ($e = +/-\,d\Psi/dt$).

2.16.5 Једначине равнотеже напона

Равнотежа напона у сваком од намотаја дата је једначином (2.69). За систем у коме има N намотаја, равнотежа намота у намотају k дата је изразом

$$u_k = R_k i_k + \frac{d\psi_k}{dt}, \tag{2.70}$$

где су u_k, i_k, R_k и Ψ_k напон, струја, отпорност и флукс k-тог намотаја, респективно. Флукс Ψ_k у намотају k је последица струје самог намотаја, као и струја у другим намотајима са којима је k-ти намотај у магнетској спре-

зи. Струја i_k која постоји у навојцима посматраног намотаја доприноси укупном флуксу Ψ_k пропорционално коефицијенту сопствене индуктивности намотаја L_{kk}. Струја i_j у навојцима намотаја j мења флукс Ψ_k пропорционално коефицијенту међусобне индуктивности намотаја L_{kj}.

Равнотежа напона у систему са N намотаја описана је системом од N диференцијалних једначина. Краћи и прегледнији запис једначина могуће је добити увођењем вектора напона и струја

$$\underline{i}^T = \left[i_1, i_2, \dots i_k, \dots i_{N-1}, i_N\right] \qquad (2.71)$$
$$\underline{u}^T = \left[u_1, u_2, \dots u_k, \dots u_{N-1}, u_N\right],$$

дефинисањем вектора флуксева намотаја,

$$\underline{\psi}^T = \left[\psi_1, \psi_2, \dots \psi_k, \dots \psi_{N-1}, \psi_N\right], \qquad (2.72)$$

као и увођењем матрице отпорности $\underline{R}$

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_N \end{bmatrix} \qquad (2.73)$$

која на главној дијагонали има отпорности намотаја. Једначине равнотеже напона у матричном облику дата је једначином (2.74), која представља N диференцијалних једначина облика (2.69). Једначине напонске равнотеже дефинишу динамику електричног дела електромеханичког претварача, то јест *електричног подсистема*

$$\underline{u} = \underline{R} \cdot \underline{i} + \frac{\mathrm{d}\underline{\psi}}{\mathrm{d}t}. \qquad (2.74)$$

Вектор флуксева $\underline{\Psi}$ је одређен струјама намотаја и коефицијентима индуктивности. Флукс k-тог намотаја је одређен коефицијентом сопствене индуктивности намотаја, као и коефицијентима међусобних индуктивности L_{kj} између посматраног намотаја и преосталих намотаја, што је дато у следећој једначини.

$$\psi_k = L_{1k} i_1 + L_{2k} i_2 + \dots + L_{kk} i_k + \dots + L_{Nk} i_N$$

Будући да претходно дати израз вреди за сваки од намотаја, вектор флукса се може добити множењем матрице индуктивности, дате изразом (2.75), са вектором струја, на начин приказан једначином (2.76).

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & . & L_{1k} & L_{1N} \\ L_{21} & L_{22} & . & . & . \\ . & . & L_{33} & . & . \\ L_{k1} & . & . & L_{kk} & . \\ L_{N1} & . & . & . & L_{NN} \end{bmatrix} \tag{2.75}$$

$$\underline{\psi} = \underline{L} \cdot \underline{i} \tag{2.76}$$

На главној дијагонали матрице индуктивности су коефицијенти сопствене индуктивности појединих намотаја, док су преостали коефицијенти изван дијагонале коефицијенти међусобних индуктивности. Будући да је $L_{ij} = L_{ji}$, матрица индуктивности је симетрична, тако да је $\underline{L} = \underline{L}^T$.

Елементи матрице индуктивности могу бити променљиви. До промене сопствених и међусобних индуктивности долази услед релативног кретања покретних делова електромеханичког претварача (ротора) у односу на непокретни део (статор). Намотаји могу постојати на оба дела, тако да кретање доводи до промене релативног положаја појединих намотаја. Промена угла између оса два намотаја доводи до промене у њиховој међусобној индуктивности. Сопствена индуктивност намотаја се мења у случају да кретање претварача доводи до промене магнетске отпорности у магнетском колу намотаја. Један од примера где кретање мења сопствену индуктивност намотаја дат је на слици 2.6, где се магнетска отпорност смањује а индуктивност увећава уношењем комада феромагнетика у магнетско коло калема.

2.16.6 Флукс расипања

Један део укупног флукса сваког намотаја обухвата и друге намотаје, па се назива међусобним флуксом. Преостали флукс не обухвата ниједан намотај осим посматраног, па се зове *расипни флукс*. На слици 2.43 дат је изглед линија поља међусобног и расипног флукса за систем који има два намотаја, статорски и роторски. Слика приказује флукс кроз један навојак Φ. Флукс појединих намотаја се добија множењем флукса Φ са бројем навојака.

Сопствена индуктивност статорског и роторског намотаја једнака је количнику флукса који у намотају ствара струја намотаја и јачине те струје. Другим речима, сопствена индуктивност је однос флукса и струје намотаја за случај када флукс не зависи од струје у другом намотају, већ се јавља искључиво као последица струје самог намотаја. У систему са већим бројем спрегнутих намотаја, сопствена индуктивност једног од њих се може одредити као количник флукса и струје у посматраном намотају у случају када су струје свих преосталих намотаја једнаке нули. Сопствене индуктивности реално остваривих намотаја су *строго позитивне*, док међусобне индуктивности могу бити негативне. Међусобна индуктивност статорског и роторског намотаја одређује меру у којој струја статора доприноси укупном флуксу у намотају ротора. Будући да је $L_m = L_{SR} = L_{RS}$, допринос струје статора флуксу у намотају ротора једнак је доприносу струје ротора флуксу у намотају статора. Обртањем ротора релативни положај два намотаја постати такав да позитивна струја у једном умањује флукс кроз други, што даје негативну вредност међусобне индуктивности. За систем намотаја дат на слици 2.41, матрица индуктивности има димензије 2x2. На главној дијагонали матрице индуктивности су позитивни коефицијенти сопствене индуктивности L_S и L_R. На преосталим местима матрице су међусобне индуктивности који могу бити позитивне, негативне или једнаке нули, што је случај код намотаја чије осе стоје под углом од $\pi/2$. Међусобна индуктивност зависи од коефицијента спреге,

$$k = \frac{L_m}{\sqrt{L_S L_R}} .$$

Коефицијент спреге је највећи у случају да оба намотаја леже у истој оси. У хипотетичком случају када коаксијални намотаји статора и ротора имају једнак број навојака N и једнаку магнетску отпорност R_μ, сопствене индуктивности су једнаке, то јест $L_S = L_R$, док је међусобна индуктивност $L_m = kL_S = kL_R$. Будући да је $k < 1$, међусобна индуктивност је мања од сопствене индуктивности. Уз наведене претпоставке, разлика

$$L_{\gamma S} = L_S - L_m = (1-k)L_S$$

представља *расипну индуктивност* статора, меру *расипног флукса* статора који обухвата статорски, али не и роторски намотај. Што је јача магнетска спрега између намотаја, коефицијент спреге је већи, а флукс расипања и индуктивност расипања мањи. Од интереса је анализирати расипни флукс и индуктивност расипања у случају када намотаји имају различита магнетска кола и различит број навојака.

Слика 2.43. Дефиниција расипног флукса и међусобног флукса.

Флуксеви у једном навојку статорског и роторског намотаја, приказаног на слици 2.43, дати су изразом

$$\Phi_S = \Phi_{\gamma S} + \Phi_m,$$
$$\Phi_R = \Phi_{\gamma R} + \Phi_m.$$

Међусобни флукс има компоненту која је последица струје статора (Φ^S) и компоненту која је последица струја ротора (Φ^R) и дат је изразом

$$\Phi_m = \Phi_m^S + \Phi_m^R.$$

Флуксеви самих намотаја се добијају множењем флукса навојка са бројем навојака,

$$\psi_S = N_S\Phi_S = N_S\Phi_m + N_S\Phi_{\gamma S} = N_S\Phi_m + \psi_{\gamma S},$$
$$\psi_R = N_R\Phi_R = N_R\Phi_m + N_R\Phi_{\gamma R} = N_R\Phi_m + \psi_{\gamma R}.$$

Флукс $\Psi_{\gamma S}$ је *флукс расипања* статорског намотаја, док је $\Psi_{\gamma R}$ флукс расипања роторског намотаја. Флукс расипања у сваком од намотаја је пропорционалан јачини струје. Коефицијент пропорционалности је *индуктив-*

ност расипања намотаја, или расипна индуктивност. За намотаје дате на слици 2.43, индуктивности расипања су дате изразом

$$L_{\gamma S} = \frac{\psi_{\gamma S}}{i_S}, \; L_{\gamma R} = \frac{\psi_{\gamma R}}{i_R}.$$

Међусобна индуктивност је одређена изразом

$$L_m = L_{SR} = L_{RS} = \frac{N_S \Phi_m^R}{i_R} = \frac{N_R \Phi_m^S}{i_S}.$$

Сопствена индуктивност намотаја је количник флукса у намотају који је последица струје самог намотаја. Тај флукс је једним делом међусобни, док је остатак расути флукс. Сопствене индуктивности статора и ротора су

$$L_S = \frac{N_S \Phi_m^S + N_S \Phi_{\gamma S}}{i_S} = \frac{N_S \Phi_m^S + \psi_{\gamma S}}{i_S} =$$

$$= \frac{N_S}{N_R} L_{RS} + L_{\gamma S} = \frac{N_S}{N_R} L_m + L_{\gamma S},$$

$$L_R = \frac{N_R \Phi_m^R + N_R \Phi_{\gamma R}}{i_R} = \frac{N_R \Phi_m^R + \psi_{\gamma R}}{i_R} =$$

$$= \frac{N_R}{N_S} L_{SR} + L_{\gamma R} = \frac{N_R}{N_S} L_m + L_{\gamma R}.$$

Дакле, индуктивност расипања је један део сопствене индуктивности намотаја. Индуктивност расипања је већа у случају да је магнетска спрега спрегнутих намотаја мања. У случају када су бројеви навојака статора и ротора једнаки, као и у случају када се роторске величине своде (трансформишу) на статорску страну, претходна једначина узима следећи облик,

$$L_S = L_m + L_{\gamma S},$$

$$L_R = L_m + L_{\gamma R}.$$

2.16.7 Енергија спрежног поља

Кључну улогу у процесу претварања има спрежно поље. Енергија добијена из извора се може акумулисати у спрежном магнетском пољу, одакле се потом може узимати ради претварања у механички рад. Од значаја је одредити везу енергије поља, струја намотаја и параметара као што су сопствене и међусобне индуктивности намотаја. Просторна густина енергије магнетског спрежног поља је

$$w_m = \int \vec{H} \mathrm{d}\vec{B}.$$

У линеарној средини, пермеабилност је константа, то јест $\mu = B/H =$ const, па је густина енергије спрежног поља једнака $w_m = ½\, BH = ½\, \mu H^2$. Укупна енергија се може добити интеграцијом густине w_m у домену у коме постоји поље. Енергија поља се може исказати у функцији струја и индуктивности намотаја. Као пример, за систем са два спрегнута намотаја, енергија поља једнака је $½\, L_1 i_1^2 + ½\, L_2 i_2^2 + L_{12}\, i_1\, i_2$. Ригорозан доказ ове тврдње је изостављен, али се зато може указати да постоје разлози који указују на ваљаност тврдње. Просторна интеграција густине поља укључује израчунавање интеграла $(½\, BH)\, \mathrm{d}V$. Имајући у виду да је $\mathrm{d}V = \mathrm{d}S\, \mathrm{d}x$, проблем се може свести на одређивање интеграла $(½\, BH)\, \mathrm{d}S\, \mathrm{d}x = ½\, (B\, \mathrm{d}S)\, (H\, \mathrm{d}x)$. Интеграцијом $(B\, \mathrm{d}S)$ добија се величина која је по димензији *флукс*, док се интеграцијом $(H\, \mathrm{d}x)$ добија величина која одговара магнетопобудној сили, односно струји. Дакле, израз за енергију садржи чланове облика Ψi односно Li^2.

За систем који има N спрегнутих намотаја, енергија магнетског спрежног поља је

$$W_m = \int_V w_\mathrm{m}\, \mathrm{d}V = \int_V \left(\int \vec{H} \mathrm{d}\vec{B} \right) \mathrm{d}V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} L_{ij} i_i i_j\ .$$

У претходном изразу, елементи L_{ii} се односе на сопствене индуктивности намотаја и они су строго позитивни. Елементи L_{ij} су међусобне индуктивности и они могу бити позитивни или негативни. Прегледнији израз за енергију спрежног поља добија се увођењем вектора флукса и струје

$$\underline{i}^T = \left[i_1, i_2, \ldots i_k, \ldots i_{N-1}, i_N \right],$$

$$\underline{\psi}^T = \left[\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_k, \ldots \psi_{N-1}, \psi_N \right].$$

чиме се добија једначина (2.77), у којој је $\underline{L}$ матрица индуктивности посматраног система намотаја.

$$W_m = \frac{1}{2}\underline{i}^T \underline{L}\underline{i} \tag{2.77}$$

Питање (2.11):

Посматрати два намотаја са сопственим индуктивностима L_1 и L_2. Може ли коефицијент међусобне индуктивности бити већи од $(L_1 \cdot L_2)^{0,5}$?

Одговор (2.11):

Међусобна индуктивност два намотаја је $L_{12} = k \cdot (L_1 \cdot L_2)^{0,5}$, где је k коефицијент спреге. Максимална вредност коефицијента спреге је 1, и она постоји у случају када нема флукса расипања, већ целокупан флукс једног намотаја обухвата и други. Будући да коефицијент спреге не може бити већи од 1, међусобна индуктивност не може бити већа од $(L_1 \cdot L_2)^{0,5}$.

Питање (2.12):

Јели могуће да израз за енергију поља

$$2W_m = \sum_j \sum_k L_{jk} i_j i_k$$

да резултат мањи од нуле? Извести доказ исказане тврдње на примеру система са два спрегнута намотаја.

Одговор (2.12):

Наведени израз даје енергију магнетског поља па не може имати негативну вредност. У случају када постоје два намотаја, израз узима облик $2W_m = L_1 i_1^2 + L_2 i_2^2 + 2L_{12} i_1 i_2 = L_1 i_1^2 + L_2 i_2^2 + 2k \cdot (L_1 \cdot L_2)^{0,5} i_1 i_2$. Усвајањем ознака $a = (L_1)^{0,5} i_1$ и $b = (L_2)^{0,5} i_2$, израз узима облик $2W_m = a^2 + b^2 + 2k \cdot a \cdot b$. Потребно је доказати да израз не може узети негативну вредност. Будући да само трећи сабирак може узети негативну вредност, што се догађа у случају да су јачине струја супротног знака, потребно је доказати да је $2W_m \geq 0$ за $k = 1$, јер ће тиме тврдња бити доказана за свако $k < 1$. У случају да је $k = 1$, $2W_m = (a+b)^2$, чиме је тражени доказ дат.

2.16.8 Снага претварача

За посматрани систем од N спрегнутих намотаја у магнетском пољу треба одредити снаге на електричном и механичком прилазу, снаге губитака као и снагу електромеханичког претварања. Снага извора је одређена збиром снага $p_k = u_k i_k$ појединачних намотаја

$$p_e = \sum_k u_k i_k = \underline{i}^T \underline{u} = \underline{u}^T \underline{i} \ . \tag{2.78}$$

Будући да је вектор напона одређен матричним обликом једначине равнотеже напона, датим једначином 2.74, снага извора се може изразити у функцији вектора струја, матрице отпорности и матрице индуктивности.

$$\begin{aligned} p_e &= \underline{i}^T \left(\underline{R}\, \underline{i} + \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} \right) = \underline{i}^T \left(\underline{R}\, \underline{i} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\underline{L}\, \underline{i} \right) \right) = \\ &= \underline{i}^T \underline{R}\, \underline{i} + \underline{i}^T \frac{\mathrm{d}\underline{L}}{\mathrm{d}t} \underline{i} + \underline{i}^T \underline{L} \frac{\mathrm{d}\underline{i}}{\mathrm{d}t} \end{aligned} \tag{2.79}$$

Губици у спрежном пољу се занемарују, али не и губици у намотајима. У намотају отпорности R_k, у коме постоји струја јачине i_k, постоје губици одређени изразом $R_k i_k^2$. Укупни губици у намотајима система са N намотаја дати су изразом

$$p_{Cu} = \sum_k R_k i_k^2 = \underline{i}^T \underline{R}\, \underline{i} \tag{2.80}$$

у коме је $\underline{R}$ квадратна матрица димензија NxN, која на главној дијагонали има отпорности намотаја, док су преостали елементи матрице једнаки нули.

Један део рада извора улаже се у енергију спрежног поља. Будући да је енергија спрежног поља дата једначином (2.77), део снаге извора који одређује увећање енергије поља дат је једначином (2.81).

$$\begin{aligned} p_{wm} &= \frac{\mathrm{d}W_m}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{1}{2} \underline{i}^T \underline{L}\underline{i} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\mathrm{d}\underline{i}^T}{\mathrm{d}t} \right) \underline{L}\underline{i} + \frac{1}{2} \underline{i}^T \left(\frac{\mathrm{d}\underline{L}}{\mathrm{d}t} \right) \underline{i} + \frac{1}{2} \underline{i}^T \underline{L} \left(\frac{\mathrm{d}\underline{i}}{\mathrm{d}t} \right) \end{aligned} \tag{2.81}$$

Израз за снагу p_{wm} се може записати у прегледнијем облику. Потребно је уочити да израз (2.81) представља збир три скаларне вредности, од којих је свака добијена множењем вектора струје и матрице индуктивности. Може се показати да су вредности првог и трећег сабирка једнаке. Будући да за скаларне вредности (то јест, за матрице димензија 1x1) важи да је $\underline{s} = \underline{s}^T$, као и да је матрица индуктивности симетрична ($L_{jk} = L_{kj}$, $\underline{L} = \underline{L}^T$), може се показати да је

$$\left(\frac{\mathrm{d}\underline{i}^T}{\mathrm{d}t}\right)\underline{L}\underline{i}=\left[\left(\frac{\mathrm{d}\underline{i}^T}{\mathrm{d}t}\right)\underline{L}\underline{i}\right]^T=\underline{i}^T\,\underline{L}^T\left(\frac{\mathrm{d}\underline{i}}{\mathrm{d}t}\right)=\underline{i}^T\,\underline{L}\left(\frac{\mathrm{d}\underline{i}}{\mathrm{d}t}\right).$$

Увођењем смене у једначину (2.81), добија се израз (2.82).

$$p_{wm}=\frac{1}{2}\underline{i}^T\left(\frac{\mathrm{d}\underline{L}}{\mathrm{d}t}\right)\underline{i}+\underline{i}^T\,\underline{L}\left(\frac{\mathrm{d}\underline{i}}{\mathrm{d}t}\right) \tag{2.82}$$

У једначини (2.82) постоји извод струје и извод матрице индуктивности. До промене у матрици долази услед релативног кретања ротора у односу на статор. Кретање доводи до промене међусобне индуктивности између намотаја који стоји на ротору и намотаја који се налази на статору. Под одређеним условима, кретање ротора може довести и до промене сопствене индуктивности појединих намотаја. Извод вектора струје $\underline{i}$ у једначини (2.82) је вектор чији су елементи изводи струја појединих намотаја. У случају да је намотај прикључен на идеални извор константне струје, извод струје у намотају је једнак нули. Извод струје намотаја може узети ненулте вредности у намотајима који су кратко спојени, прикључени на идеални напонски извор или прикључени на реалне напонске или струјне изворе.

Део p_{wm} снаге извора p_e се улаже у енергију поља, део p_{Cu} се губи услед Џуловог ефекта у намотајима, док се преостала снага p_C претвара у механичку захваљујући дејству спрежног поља. У моторном режиму рада (слика 2.33), референтни смер за снагу претварача је такав да се позитивном сматра снага претварања електричне енергије у механички рад. У генераторском режиму рада (слика 2.34), смер снаге претварача је измењен.

Будући да је

$$p_C = p_e - p_{Cu} - p_{wm}$$

коришћењем резултата (2.79), (2.80) и (2.82), добија се

$$p_C=\left(\underline{i}^T\,\underline{R}\,\underline{i}+\underline{i}^T\,\frac{\mathrm{d}\underline{L}}{\mathrm{d}t}\underline{i}+\underline{i}^T\,\underline{L}\frac{\mathrm{d}\underline{i}}{\mathrm{d}t}\right)-\left(\underline{i}^T\,\underline{R}\,\underline{i}\right)-$$
$$-\left(\frac{1}{2}\underline{i}^T\left(\frac{\mathrm{d}\underline{L}}{\mathrm{d}t}\right)\underline{i}+\underline{i}^T\,\underline{L}\left(\frac{\mathrm{d}\underline{i}}{\mathrm{d}t}\right)\right).$$

Једноставним преуређењем израза добија се

$$p_C = \frac{1}{2}\underline{i}^T \frac{\mathrm{d}\underline{L}}{\mathrm{d}t}\underline{i}\,. \tag{2.83}$$

Према добијеном изразу, електромеханичко претварање је могуће једино у случају да се бар један елемент матрице индуктивности мења. Промена сопствене или међусобне индуктивности може бити последица промене релативног положаја ротора у односу на статор. Код обртних машина, померај ротора θ_m је повезан са механичком брзином обртања $\Omega_m = \mathrm{d}\theta_m/\mathrm{d}t$, тако да израз за снагу претварача узима облик (2.84),

$$p_C = \frac{1}{2}\underline{i}^T \frac{\mathrm{d}\underline{L}}{\mathrm{d}t}\underline{i} = \frac{1}{2}\underline{i}^T \frac{\mathrm{d}\underline{L}}{\mathrm{d}\theta_m}\underline{i}\cdot\frac{\mathrm{d}\theta_m}{\mathrm{d}t} = \frac{\Omega_m}{2}\underline{i}^T \frac{\mathrm{d}\underline{L}}{\mathrm{d}\theta_m}\underline{i}\,. \tag{2.84}$$

Једначина (2.84) показује да се електромеханичко претварање код обртних машина ослања на промену једног или више елемената матрице индуктивности у функцији помераја ротора θ_m.

У случају да претварач ради као мотор, снага конверзије се преноси механичком подсистему. У оквиру механичког подсистема, један део снаге p_C се троши на механичке губитке (трење), док се остатак преко вратила преноси радној машини (механичком оптерећењу). У генераторском режиму рада, погонска турбина преноси снагу преко вратила и предаје је електромеханичком претварачу, у коме се један део снаге турбине троши на механичке губитке. Преостала снага се, према слици 2.34, претвара у електричну, умањује за износ губитака у електричном подсистему и предаје електричним пријемницима, прикљученим на крајеве намотаја.

2.16.9 Израз за моменат

Обртна електрична машина има непокретни статор и покретни ротор који су цилиндричног облика и имају заједничку осу. Ротор се обрће у односу на статор брзином Ω_m тако да је у сваком тренутку положај ротора у односу на статор одређен углом θ_m. Неки од укупно N намотаја машине се налазе на статору, док су преостали на ротору. Будући да сопствене и међусобне индуктивности намотаја зависе од релативног положаја између ротора и статора, елементи матрице индуктивности $\underline{L}$ су такође функције истог угла.

Брзина обртања ротора је

$$\Omega_m = \frac{\mathrm{d}\theta_m}{\mathrm{d}t}\,,$$

док се матрица индуктивности може представити изразом

$$\underline{L} = f_1(t) = f_2(\theta_m).$$

Магнетско спрежно поље делује на статор и ротор и ствара електромагнетске силе. Спрег сила ствара електромагнетски моменат. На ротор делује моменат M_{em}, док на статор делује моменат $-M_{em}$, једнаке амплитуде и супротног смера. Будући да је статор непомичан, једино се ротор може кретати. Моменат M_{em} се преноси преко ротора и вратила до радне машине или погонске турбине.

У моторном режиму рада, моменат M_{em} делује у смеру кретања, то јест у смеру брзине обртања Ω_m, тако да је снага $p_C = M_{em}\Omega_m$ позитивна. Будући да делује у смеру кретања, моменат M_{em} се преноси преко вратила до радне машине и тежи да је покрене, то јест да увећа брзину обртања.

У генераторског режиму рада, моменат M_{em} делује у смеру супротном од смера кретања, тако да је снага $p_C = M_{em}\Omega_m$ негативна. Негативна вредност снаге електромеханичког претварања показује да је смер претварања такав да се механички рад погонске турбине претвара у електричну енергију. Будући да делује у смеру супротном од кретања, моменат M_{em} се преноси преко вратила до погонске турбине и противи се њеном обртању, тежећи да умањи брзину обртања.

Од интереса је одредити израз за електромагнетски моменат. Будући да је снага једнака производу момента и брзине обртања, израз (2.84) за снагу претварача може се приказати једначином

$$p_C = \Omega_m \left(\frac{1}{2} \underline{i}^T \frac{\mathrm{d}\underline{L}}{\mathrm{d}\theta_m} \underline{i} \right) = M_{em}\Omega_m ,$$

у којој је M_{em} електромагнетски моменат, одређен једначином (2.85) .

$$M_{em} = \frac{1}{2} \underline{i}^T \frac{\mathrm{d}\underline{L}}{\mathrm{d}\theta_m} \underline{i} \tag{2.85}$$

Добијени резултат се може проверити на примеру обртног претварача са N намотаја који су прикључени на идеалне струје изворе. Струје у намотајима су тада одређене струјама извора и непромењиве. На основу једначине (2.67), која важи за случај да магнетско поље постоји у линеарним срединама, рад извора се равномерно расподељује на механички рад и увећање енергије поља, па је

$$\mathrm{d}W_m = \mathrm{d}W_{meh} = M_{em}\,\mathrm{d}\theta_m ,$$

што даје израз за моменат

$$M_{em} = \frac{\mathrm{d}W_m}{\mathrm{d}\theta_m}.$$

Енергија магнетског поља је одређена једначином (2.77), тако је електромагнетски моменат једнак

$$M_{em} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta_m}\left(\frac{1}{2}\underline{i}^T \underline{L}\underline{i}\right).$$

Према претпоставци, струје у намотајима су непромењиве јер се намотаји напајају из идеалних струјних извора. Стога је матрица индуктивности једини чинилац претходно датог израза који се мења у функцији угла θ_m. Тиме израз за моменат узима облик

$$M_{em} = \frac{1}{2}\underline{i}^T \frac{\mathrm{d}\underline{L}}{\mathrm{d}\theta_m}\underline{i}$$

Електромагнетски моменат може постојати уколико се бар један елемент матрице индуктивности мења у функцији угла θ_m. То може бити промена сопствене индуктивности намотаја у функцији угла, или промена међусобне индуктивности између два намотаја. До промене индуктивности долази услед промене релативног положаја статора и ротора. За систем од N намотаја, електромагнетски моменат се може добити из једначине (2.86).

$$M_{em} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(i_k i_j \frac{\mathrm{d}L_{jk}}{\mathrm{d}\theta_m}\right) \tag{2.86}$$

Питање (2.13):

Одредити начин на који се мења међусобна индуктивност два намотаја уколико је један од њих на статору а други на ротору.

Одговор (2.13):

Пошто се ротор обрће, угао θ_m између оса намотаја статора и ротора се мења. У случају када је θ_m =0, осе два намотаја се поклапају. Тада су линије поља које ствара статорски намотај нормалне на површ ослоњену на проводнике ротора, па је флукс статора који обухвата и роторски намотај тада највећи. Дакле, међусобна индуктивност два намотаја је највећа у положају θ_m =0. Када се ротор помери, угао између линија поља и нормале на површ ротора више није једнак π/2 већ узима вредност π/2-θ_m. Будући

да је флукс одређен синусом овог угла, промена међусобне индуктивности је одређена функцијом $\cos\theta_m$, то јест, $L_{SR} = L_m \cos\theta_m$.

Питање (2.14):

Дати пример цилиндричне машине у којој сопствена индуктивност једног од намотаја зависи од угла.

Одговор (2.14):

Сопствена индуктивност статорског намотаја зависи од броја навојака и магнетске отпорности. Отпорност магнетског кола се састоји од отпорности у гвозденом језгру статора, отпорности у магнетском колу ротора, као и магнетских отпорности у ваздушном зазору, на преласцима флукса из магнетског кола статора у магнетско коло ротора и назад. Магнетско коло ротора може бити начињено у облику цилиндра коме су одстрањени бокови. За флукс који се простире дуж суженог цилиндра, такав ротор ће имати мању магнетску отпорност него за флукс који се простире у бочном правцу, у коме је тело ротора сужено. Када се ротор обрће, флукс статора ће наилазити на магнетски отпор који зависи од положаја ротора, па ће сопствена индуктивност статорског намотаја зависити од угла θ_m.

2.16.10 Механички подсистем

Покретни делови обртне електричне машине укључују магнетска и струјна кола ротора, вратило и лежајеве преко којих се ротор ослања на непокретни статор. Постоје електричне машине са нарочитим вентилаторима који су уграђени на ротор и који поспешују струјање ваздуха и одвођење топлоте (машине са сопственим хлађењем). Поред тога, на ротор се често уграђују давачи за мерење брзине обртања, положаја ротора или температуре ротора. У неким случајевима, на ротору се могу наћи стални магнети или полупроводничке диоде. При моделовању механичког подсистема електричне машине, не узимају се у обзир наведени детаљи, већ се ротор моделује као хомогени цилиндар познатих димензија и масе. Услед дејства електромегнетских сила, на ротор делује електромагнетски моменат M_{em}. Ротор је преко вратила повезан са радном машином или погонском турбином. Вратило преноси механички моменат M_{em}.

У механичком подсистему постоје губици услед трења и вентилације, као и акумулација кинетичке енергије у обртним деловима машине. Стога механички моменат M_m, који се има на излазном вратилу није једнак електромагнетском моменту M_{em} који делује на ротор. Расподела снаге на губитке механичког подсистема, акумулацију и излазну снагу $p_m = M_m\Omega_m$ дата је на слици 2.42.

Слика 2.42 Биланс снага у механичком подсистему обртне електричне машине.

2.16.11 Губици у механичком подсистему

Губици у механичком подсистему представљају утрошак енергије на савладавање отпора трења о ваздух, који се има при обртању ротора, на савладавање трења у *лежајевима*, као и на губитке другачије природе и секундарног значаја. Снага губитака у механичком подсистему се мења у функцији брзине (2.42). Њена промена може бити сложена функција брзине. Како су губици у механичком подсистему обично мали, није од интереса уводити сложен модел, већ се најчешће уводи претпоставка да се моменат трења може сматрати пропорционалним брзини и моделовати изразом $k_F\,\Omega_m$, што даје израз за снагу губитака у механичком делу система

$$p_{\gamma m} = k_F \Omega_m^2 \tag{2.87}$$

Наведени модел губитака се јавља у веома великом броју књига и радова који се баве електричним машинама. Постоји, међутим, електричне машине и њихове примене у којима је дати модел губитака у механичком подсистему непримерен.

Модел губитака у механичком подсистему, дат на слици 2.42, настао је у времену када су електричне машине биле већином *машине за једносмерну струју*, подробније анализиране у наредним поглављима. Статор ових машина ствара непомично магнетско поље у коме се обрће ротор. Промена магнетске индукције у магнетском колу ротора одређена је брзином обртања Ω_m. Губици услед вихорних струја у гвожђу ротора стварају губитке

$$p_{Fe} = k_V \Omega_m^2 .$$

Услед губитака, јавља се моменат који се противи кретању ротора и који је пропорционалан брзини обртања

$$M_{Fe} = \frac{p_{Fe}}{\Omega_m} = k_V \Omega_m .$$

Добијени отпор кретању одговара моделу $p_{\gamma m} = k_F\, \Omega_m^2$, који се често користи у литератури[7].

Код електричних машина које раде са брзинама већим од хиљаду радијана у секунди, постоји значајан отпор ваздуха. Силе које се опиру кретању кроз ваздух су пропорционалне квадрату брзине, тако да снагу губитака услед трења о ваздух треба моделовати изразом

$$p_{\gamma m} = k_F \Omega_m^3 .$$

2.16.12 Кинетичка енергија

Акумулација енергије у обртним масама зависи од инерције ротора J. Ротор се може представити као хомогени цилиндар једнаке специфичне масе у свим својим деловима, полупречника R и масе m, и тада је његов моменат инерције $J = mR^2/2$. Кинетичка енергија ротора чији је моменат инерције J и који се врти брзином Ω_m је $W_{mehA} = ½\, J\Omega_m^2$. Код увећања кинетичке енергије, потребно је улагати снагу $\mathrm{d}(W_{mehA})/\mathrm{d}t = J\Omega_m\, \mathrm{d}\Omega_m/\mathrm{d}t$. Дакле, увећање брзине обртања захтева улагање снаге у залетеле обртне масе, односно, код успорења, изузимање снаге (улагање негативне снаге). Као по-

[7] Губици у магнетском колу ротора p_{Fe} машине за једносмерну струју припадају губицима у магнетском колу, то јест губицима у гвожђу. Ипак, услед губитака снаге p_{Fe} јавља се моменат M_{Fe} који се противи кретању. Од интереса је нагласити да код машина са сталним магнетима отпор кретању M_{Fe} постоји и у случају када у намотајима нема електричних струја. Отпор кретању M_{Fe} не припада механичким губицима, јер се не јавља услед трења у лежајевима нити услед трења о ваздух, већ се ради о специфичном *електричном трењу*. Постоји, дакле, недоумица у погледу тога треба ли снагу p_{Fe} сврстати у губитке у спрежном пољу или у губитке услед обртања. Недоумица се може решити јаснијим дефинисањем губитака услед обртања. Уколико се у губитке услед обртања сврстају сви отпори кретању, без обзира на то имају ли узрок у механичком трењу или не, тада у исту групу треба сврстати и губитке у магнетском колу ротора машине за једносмерну струју. Слична дилема се јавља код класификације губитака у гвожђу статора синхроних машина са сталним магнетима на ротору.

следица тога, моменат M_m, који се добија на вратилу машине, мањи је од електромагнетског момента M_{em} током интервала у којима се брзина увећава, зато што се један део снаге p_C, односно један део момента $M_{em} = p_C/\Omega_m$ улаже у повећање кинетичке енергије обртних маса.

Биланс снага, дат на слици 2.42, могуће је представити аналитичким изразом. Ако се посматра електромеханички претварач који има само један механички прикључак - вратило, излазна механичка снага је дата изразом

$$p_m = M_m \Omega_m .$$

Кинетичка енергија је дата изразом

$$W_{mahA} = \frac{1}{2} J\Omega_m^2 ,$$

тако да је снага која се улаже у кинетичку енергију једнака

$$\frac{\mathrm{d}W_{mahA}}{\mathrm{d}t} = J\Omega_m \frac{\mathrm{d}\Omega_m}{\mathrm{d}t} . \tag{2.88}$$

Полазећи од снаге електромеханичког претварања p_C, један део снаге се троши на губитке у механичком подсистему (2.87), други део се улаже у промену брзине обртања и промену кинетичке енергије обртних маса (једначина (2.88)), тако да је механичка снага која се има на вратилу (излазна снага) дата једначином (2.89).

$$p_c = \Omega_m M_{em} = \frac{\mathrm{d}W_{mahA}}{\mathrm{d}t} + p_{\gamma m} + p_m , \tag{2.89}$$

$$p_c = J\Omega_m \frac{\mathrm{d}\Omega_m}{\mathrm{d}t} + k_F \Omega_m^2 + M_m \Omega_m ,$$

$$p_m = p_c - J\Omega_m \frac{\mathrm{d}\Omega_m}{\mathrm{d}t} - k_F \Omega_m^2$$

2.16.13 Модел механичког подсистема

Једначина (2.89) се може поделити са угаоном брзином обртања ротора, чиме се добија једначина (2.90), у којој се одређује моменат M_m, који се преко вратила преноси радној машини.

$$M_m = M_{em} - J\frac{\mathrm{d}\Omega_m}{\mathrm{d}t} - k_F\Omega_m \tag{2.90}$$

У моторном режиму рада, моменат M_m делује на радну машину тако што поспешује њено кретање. Истовремено, моменат M_m се супротставља кретању ротора. Референтни смерови за моменат и брзину су дати на слици 2.43. Претходна једначина се може приказати у облику

$$J\frac{\mathrm{d}\Omega_m}{\mathrm{d}t} = M_{em} - M_m - k_F\Omega_m, \tag{2.91}$$

који представља Њутнову једначину за обртно кретање. Претходна једначина представља модел механичког подсистема електричне машине. У овој једначини, електромагнетском моменту M_{em} се супротставља моменат M_m као и моменат трења. У случају да електромагнетски моменат превладава, то јест да је $M_{em} > M_m$, брзина обртања се увећава. У противном, брзина се смањује. У устаљеном стању, електромагнетски моменат M_{em} је једнак збиру свих момената који се опиру кретању. Устаљено стање је описано једначинама

$$\frac{\mathrm{d}\Omega_m}{\mathrm{d}t} = 0,\ \ M_{em} = M_m + k_F\Omega_m .$$

Слика 2.43. Референтни смер електромагнетског момента и брзине обртања.

На слици 2.43 је приказан смер електромагнетског момента M_{em} и момента M_m којим се радна машина противи кретању. Позитивне вредности за дате референтне смерове одговарају моторном режиму рада. У случају *генераторског* рада, у коме се механички рад претвара у електричну енергију, улога и знак назначених момената се мења. Наиме, у генераторском раду моменат M_{em} има негативан предзнак и противи се кретању, док моменат M_m тежи да поспеши кретање. У том случају, моменат M_m се добија од погонске турбине генератора преко вратила. У пракси, референтни смер момента M_{em} и момента M_m може бити дефинисан другачије него на

слици. У оквиру књиге, теоријска разматрања и рачунски задаци ће бити у складу са референтним смеровима датим на слици 2.43, тако да ће у моторном раду бити M_{em} >0, M_m >0, док ће у генераторском раду бити M_{em} <0, M_m <0. Изузетно, може се дефинисати моменат *генератора* M_G = -M_{em}, који је у генераторском раду позитиван.

Спроведена анализа и добијени модел механичког подсистема односе се на електромеханички претварач који има само један механички прилаз, то јест само један степен слободе кретања, односно само једно вратило, па тиме и јединствен моменат и брзину обртања. Могуће је замислити, пројектовати и начинити електромеханичке претвараче чији би покретни делови имали више степена слободе кретања, па тиме и више различитих брзина кретања, као и одговарајући број сила и момената у различитим осама и правцима. Међутим, такви претварачи нису предмет изучавања у оквиру ове књиге.

2.16.14 Биланс снаге у електромеханичком претварачу

Дијаграм дат на слици 2.44 приказује токове снага у обртном електромеханичком претварачу који има N намотаја расподељених на статору и ротору, цилиндричан облик, и ради захваљујући магнетском спрежном пољу. Релевантне снаге дате на слици су образложене у следећој листи.

Снага на електричном прилазу машине, односно улазна[8] снага, то јест електрична снага коју извори предају претварачу је

$$p_e = \underline{i}^T \underline{u}\,.$$

Снага која се услед Џуловог ефекта губи у намотајима представља губитке у електричном подсистему. Ова снага се зове и *снага губитака у бакру* и једнака је

$$p_{Cu} = \underline{i}^T \underline{\underline{R}}\,\underline{i} = \sum_k R_k i_k^2\,.$$

Снага која одређује увећање енергије спрежног поља, односно снага акумулације у спрежном пољу је

$$p_{wm} = \frac{\mathrm{d}W_m}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\underline{i}^T \underline{\underline{L}}\,\underline{i}\right).$$

Снага губитака у магнетском колу, то јест снага губитака у гвожђу једнака је $p_{Fe} = \sigma_H B^2 f + \sigma_V B^2 f^2$, и она је током разматрања у овом поглављу занемарена. Снага електромеханичког претварања је

$$P_c = \frac{1}{2}\underline{i}^T \frac{\mathrm{d}\underline{\underline{L}}}{\mathrm{d}t}\underline{i}$$

Снага која одређује увећање кинетичке енергију обртних тела, односно снага акумулације у механичком подсистему је

$$p_{wk} = \frac{\mathrm{d}W_k}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(J\Omega_m^2\right).$$

Слика 2.44. Блок дијаграм процеса електромеханичког претварања.

Снага губитака у механичком подсистему, односно снага губитака услед обртања једнака је

$$p_{\gamma m} = k_F\Omega_m^2 .$$

Снага на механичком прилазу машине, односно излазна[8] снага, механичка снага, или снага на вратилу је

$$p_m = M_m\Omega_m .$$

[8] У случају да електрична машина ради као генератор, механичка снага се сматра улазном, док се електрична сматра излазном.

2.16.15 Једначине математичког модела

На основу претходних разматрања и уведених занемарења, математички модел електричне машине са N намотаја садржи N диференцијалних једначина равнотеже напона (2.74), матрицу индуктивности која даје везу струја и флуксева намотаја (2.76) израз за електромагнетски моменат (2.86) и Њутнову једначину кретања (2.91).

Диференцијалне једначине равнотеже напона дате су изразом

$$\underline{u} = \underline{R} \cdot \underline{i} + \frac{\mathrm{d}\underline{\psi}}{\mathrm{d}t}. \tag{2.92}$$

Веза флуксева и струја дата је нестационарном матрицом индуктивности

$$\underline{\psi} = \underline{L}(\theta_m) \cdot \underline{i}. \tag{2.93}$$

Електромагнетски моменат је одређен следећом једначином

$$M_{em} = \frac{1}{2} \underline{i}^T \frac{\mathrm{d}\underline{L}}{\mathrm{d}\theta_m} \underline{i} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left(i_k i_j \frac{\mathrm{d}L_{jk}}{\mathrm{d}\theta_m} \right). \tag{2.94}$$

Према једначини 2.91, прелазне појаве у механичком подсистему одређене су Њутновом диференцијалном једначином кретања. Промена брзине обртања одређена је изразом

$$J \frac{\mathrm{d}\Omega_m}{\mathrm{d}t} = M_{em} - M_m - k_F \Omega_m. \tag{2.95}$$

Четири горе дата израза дефинишу општи модел обртног електромеханичког претварача са магнетским спрежним пољем. Модел је изведен уз четири претходно наведена занемарења, међу којима је и претпоставка о линеарности феромагнетика и одсуству губитака у гвожђу.

Матрица индуктивности је нестационарна. У општем случају, елементи матрице могу бити функција угла, времена, као и флукса и струје, који могу мењати сопствене и међусобне индуктивности услед нелинеарности феромагнетика и појаве магнетског засићења. У оквиру разматрања која следе, сматра се да је феромагнетик линеаран и да матрица индуктивности и њени елементи зависе искључиво од угла θ_m. Ово занемарење је оправдано у највећем броју случајева и неће представљати препреку у разумевању рада и одређивању карактеристика електричних машина.

Треба уочити (2.94) да се електромеханичко претварање може остварити искључиво у случају да је барем један елемент матрице индуктивности

функција угла θ_m, била то сопствена индуктивност неког од намотаја или међусобна индуктивност између два намотаја.

У случају када електрична машина има N намотаја, израз (2.92) садржи N диференцијалних једначина напонске равнотеже, израз (2.93) даје везу између струја намотаја и њихових флуксева, израз (2.94) даје електромагнетски моменат, док је израз (2.95) заправо Њутнова диференцијална једначина која описује промену брзине обртања. Дакле, у датом моделу постоји N+1 диференцијалних једначина и исто толико *променљивих стања*.

Четири горе дата израза дефинишу општи модел обртног електромеханичког претварача са магнетским спрежним пољем. Модел је изведен уз четири претходно наведена занемарења, међу којима је и претпоставка о линеарности феромагнетика и одсуству губитака у гвожђу.

Матрица индуктивности је нестационарна. У општем случају, елементи матрице могу бити функција угла, времена, као и флукса и струје, који могу мењати сопствене и међусобне индуктивности услед нелинеарности феромагнетика и појаве магнетског засићења. У оквиру разматрања која следе, сматра се да је феромагнетик линеаран и да матрица индуктивности и њени елементи зависе искључиво од угла θ_m. Ово занемарење је оправдано у највећем броју случајева и неће представљати препреку у разумевању рада и одређивању карактеристика електричних машина.

Треба уочити (2.94) да се електромеханичко претварање може остварити искључиво у случају да је барем један елемент матрице индуктивности функција угла θ_m, била то сопствена индуктивност неког од намотаја или међусобна индуктивност између два намотаја.

У случају када електрична машина има N намотаја, израз (2.92) садржи N диференцијалних једначина напонске равнотеже, израз (2.93) даје везу између струја намотаја и њихових флуксева, израз (2.94) даје електромагнетски моменат, док је израз (2.95) заправо Њутнова диференцијална једначина која описује промену брзине обртања. Дакле, у датом моделу постоји N+1 диференцијалних једначина и исто толико *променљивих стања*.

2.17 Једнострано и двострано напајани претварачи

Електричне машине код којих се једна или више сопствених индуктивности L_{kk} мења у функцији угла θ_m најчешће се описују као *једнострано напајани претварачи*. Код ових претварача су са електричним извором повезани само намотаји статора (или само ротора). Постоје једнострано напајани претварачи који имају намотаје само на статору, док је ротор без намотаја и има магнетско коло чија магнетска отпорност зависи од правца у коме се јавља флукс.

Уколико се у функцији угла θ_m мења једна или више међусобних индуктивности L_{ij}, тада се говори о *двострано напајаном претварачу*. Двострано напајани претварач има намотаје на статору и на ротору. Синхроне машине и машине за једносмерну струју, које ће бити проучаване доцније, поседују намотаје на статору и на ротору. Њихови намотаји се напајају из два различита електрична извора, тако да постоји статорско и роторско напајање. Обострано напајање је разлог да се ове машине зову *двострано напајане машине*.

Постоје и машине које није могуће сврстати нити у једну од две поменуте групе. Као пример, асинхрони мотор, који ће бити проучаван доцније, има намотаје и на статору и на ротору. Занемарујући секундарне и паразитне ефекте, може се тврдити да су сопствене индуктивности статорског и роторског намотаја асинхроног мотора константне, док се међусобне индуктивности мењају у функцији угла, што може бити основ за сврставање асинхроних машина у двострано напајане машине. Ипак, асинхрони мотор се напаја само са стране статора, док је роторски намотај кратко спојен (кратко спојени роторски *кавез*). Будући да је асинхрони мотор једнострано напајан, не може се сврстати у двострано напајане машине. С друге стране, постоје асинхроне машине са засебно напајаним роторским намотајем, које у сваком погледу припадају двострано напајаним машинама. Истоветна дилема се јавља у сврставању синхроне машине у једностране или двострано напајане машине. У случају синхроне машине која на ротору има стални магнет, машина има намотаје на статору али не и намотаје на ротору, тако да није могуће уочити променљиву међусобну индуктивност између статорских и роторских намотаја јер машина нема роторских намотаја. С друге стране, стални магнет се може представити струјним плаштом, који се може узети за роторски намотај са својеврсним напајањем. Стога постоји основ за сврставање синхроних машина са сталним магнетима у групу двострано напајаних машина.

Слика 2.45. Особине једнострано и двострано напајаних машина.

2.17.1 Анализа једнострано напајаног претварача

На слици 2.46 је приказана елементарна једнострано напајана машина. Статорски намотај има N_1 навојака отпорности R_1, и напаја се из извора у коме постоји струја $i_1(t)$. У зависности од промене флукса и струје, на крајевима намотаја има се напон $u_1(t)$. Магнетско коло се састоји од статорског, непокретног дела чија је магнетска отпорност константна. Сматра се да је индукција B_1 у статору иста, па се флукс Φ_1 може одредити као B_1S_1, где је S_1 површина попречног пресека статора.

Ротор се обрће и његов отклон од хоризонталног положаја обележен је са θ_m. Магнетско коло ротора је начињено тако да магнетска отпорност зависи од правца у коме постоји флукс. Ротор није цилиндричан, већ има истурене полове[9]. У случају када је ротор у хоризонталном положају,

[9] (енг. *salient poles*)

флукс статора се затвара кроз релативно велики ваздушни зазор у коме је пермеабилност мала (ознака А на слици 2.46). После проласка кроз ваздух, флукс доспева у магнетско коло ротора начињено од феромагнетског материјала у коме је пермеабилност велика. Флукс потом напушта магнетко коло ротора (ознака В на слици 2.46), поново пролази кроз ваздух и улази у магнетско коло статора. Резултантна отпорност магнетског кола је тада релативно велика. Код вертикално постављеног ротора, линије поља пролазе кроз веома мали ваздушни зазор, па је тада магнетска отпорност релативно мала. Сопствена индуктивност статорског намотаја је $L_1 = N_1^2/R_\mu$, где је R_μ магнетска отпорност у магнетском колу статорског флукса. Будући да се магнетска отпорност мења у функцији угла, променљива је и сопствена индуктивност, тако да је испуњен услов за електромеханичко претварање.

Код приказане машине – претварача мења се магнетска отпорност, то јест *релуктанса*. Стога се ова врста машине назива релуктантном, док се остварени моменат зове *релуктантни моменат*.

Слика 2.46. Једнострано напајани претварач са променљивом магнетском отпорношћу.

2.17.2 Промена сопствене индуктивности

На слици 2.46, приказан је једнострано напајани претварач са променљивом магнетском отпорношћу. Посматрани претварач има само један намотај, тако да матрица индуктивности има само један елемент, сопствену ин-

дуктивност статорског намотаја $L_1(\theta_m)$. Моделирање процеса претварања захтева познавање функције

$$L_1(\theta_m) = \frac{N_1^2}{R_\mu(\theta_m)}.$$

Магнетска отпорност R_μ је количник магнетопобудне силе $F_1 = N_1 i_1$ и флукса у једном навојку $\Phi_1 = B_1 S_1$. Флукс статорског намотаја је $\Psi_1 = N_1 \Phi_1$. У складу са претходно усвојеним ознакама, флукс језгра, то јест флукс кроз контуру једног навојка има ознаку Φ, док се *флукс намотаја* означава са Ψ. У магнетком колу пресека S_{Fe} које има ваздушни зазор δ и гвоздено језгро у коме се има веома мала јачина магнетског поља H, магнетска отпорност је $R_\mu = \delta/(\mu_0 S_{Fe})$.

Магнетска отпорност $R_\mu(\theta_m)$ претварача на слици 2.46 има свој минимум у случају када је ротор у вертикалном положају. То се догађа у случају када је $\theta_m = \pi/2$ или $\theta_m = 3\pi/2$. Магнетска отпорност је највећа у случају да је ротор у хоризонталном положају, што се има за $\theta_m = 0$ и $\theta_m = \pi$, што је приказано на слици 2.47. При обртању ротора, промене у магнетском колу на слици 2.47 могу се моделирати променљивим еквивалентним ваздушним зазором. Може се закључити да је функција $R_\mu(\theta_m)$ периодична и да има период π. Зато је и функција $L_1(\theta_m)$ периодична и има исти период. Промена сопствене индуктивности зависи од облика магнетског кола статора и ротора.

Ради једноставније анализе и лакшег извођења закључака, функција $L_1(\theta_m)$ је представљена следећом тригонометријском функцијом

$$L_1(\theta_m) \approx L_{\min} + \frac{L_{\max} - L_{\min}}{2}\left(1 - \cos 2\theta_m\right)$$

која задовољава релације $L_1(\pi/2)=L_{\max}$, $L_1(3\pi/2)=L_{\max}$, $L_1(0)=L_{\min}$ и $L_1(\pi)=L_{\min}$. Дакле, током једног обртаја ротора, индуктивност има два минимума и два максимума. Функција $L_1(\theta_m)$ се може представити и у облику који је дат једначином (2.96)

$$L_1(\theta_m) = \frac{1}{2}(L_{\min} + L_{\max}) - \frac{1}{2}(L_{\max} - L_{\min})\cos 2\theta_m \tag{2.96}$$

Слика 2.47. Моделирање промене магнетске отпорности и сопствене индуктивности намотаја при обртању ротора.

2.17.3 Израз за снагу и моменат

Од интереса је одредити електромагнетски моменат и снагу електромеханичког претварања једнострано напајаног претварача датог на слици 2.46. У случају да је намотај статора прикључен на извор струје $i_1(t)$, енергија магнетског спрежног поља је

$$W_m = \frac{1}{2} L_1(\theta_m) \cdot i_1^2 .$$

Будући да је намотај прикључен на извор, моменат се може одредити као извод енергије поља по углу θ_m. Коришћењем израза (2.96) за индуктивност $L_1(\theta_m)$, електромагнетски моменат је одређен једначином (2.97).

$$M_{em} = \frac{\mathrm{d}W_m}{\mathrm{d}\theta_m} = \frac{1}{2} i_1^2 \frac{\mathrm{d}L_1}{\mathrm{d}\theta_m} = \frac{1}{2} i_1^2 (L_{\max} - L_{\min}) \sin 2\theta_m \tag{2.97}$$

Добијени моменат је пропорционалан разлици између максималне и минималне индуктивности, квадрату струје и синусу двоструког угла. Будући да је флукс пропорционалан струји, електромагнетски моменат се може изразити и у функцији квадрата флукса,

$$M_{em} \sim i^2 \sim \Phi^2 . \qquad (2.98)$$

Електромагнетски моменат има највећу вредност за $\theta_m = \pi/4$ и $\theta_m = 5\pi/4$, док му је вредност једнака нули у положајима $\theta_m = \pi/2$, $\theta_m = 3\pi/2$, $\theta_m = 0$ и $\theta_m = \pi$. У случају да је струја статора константна, то јест да је $i_1(t) = I_1$, при чему се ротор обрће константном брзином Ω_m, моменат је пропорционалан функцији $\sin(\Omega_m t + \theta_0)$ и има средњу вредност једнаку нули. Стога је и средња вредност снаге електромеханичког претварања једнака нули. Другим речима, претварач приказан на слици 2.46 не може обављати електромеханичко претварање енергије уколико се напаја сталном (једносмерном) струјом.

Моменат и снага средње вредности различите од нуле могу се добити у случају да у намотају постоји простопериодична струја. За струју кружне учестаности ω_s, амплитуде I_m и почетне фазе $-\varphi$, квадрат тренутне вредности је

$$i_1^2 = \left[I_{\max} \sin(\omega_s t - \varphi)\right]^2 = \frac{I_{\max}^2}{2}(1 - \cos(2\omega_s t - 2\varphi)) .$$

На основу резултата (2.97), електромагнетски моменат једнострано напајаног претварача са простопериодичном струјом у намотају је

$$M_{em} = \frac{I_{\max}^2}{4}\left(1 - \cos\left(2\omega_s t - 2\varphi\right)\right) \cdot (L_{\max} - L_{\min}) \sin 2\theta_m .$$

Уводећи константу

$$K_m = \frac{I_{\max}^2}{8}(L_{\max} - L_{\min}),$$

израз за електромагнетски моменат добија следећи облик

$$\begin{aligned} M_{em} &= 2K_m \sin 2\theta_m - 2K_m \cos\left(2\omega_s t - 2\varphi\right) \sin 2\theta_m \\ &= 2K_m \sin 2\theta_m - K_m \sin\left(2\theta_m + 2\omega_s t - 2\varphi\right) - \\ &\quad - K_m \sin\left(2\theta_m - 2\omega_s t + 2\varphi\right). \end{aligned}$$

Будући да се ротор обрће константном брзином, положај ротора је одређен изразом $\theta_m(t) = \Omega_m t + \theta_0$. Узимајући да је $\theta_m(0) = \theta_0 = 0$, положај ротора узима вредност $\theta_m(t) = \Omega_m t$, тако да је моменат једнак

$$M_{em} = 2K_m \sin 2\Omega_m t - K_m \sin\left(2\Omega_m t + 2\omega_s t - 2\varphi\right) - \\ - K_m \sin\left(2\Omega_m t - 2\omega_s t + 2\varphi\right). \tag{2.99}$$

Први сабирак у претходном изразу је простопериодична функција која има средњу вредност једнаку нулу. Исти закључак важи за други сабирак, осим у случају да је $\Omega_m+\omega_s = 0$. Трећи сабирак има ненулту средњу вредност уколико је $\Omega_m=\omega_s$. Дакле, ненулта средња вредност момента се може добити уколико је кружна учестаност статорске струје једнака угаоној брзини обртања. Моменат зависи и од почетног фазног става струје. Избором одговарајућег фазног става може се остварити позитивна или негативна средња вредност момента. У случају да је $\Omega_m=\omega_s$ и $\varphi = 3\pi/4$, средња вредност електромагнетског момента је

$$M_{sr} = \frac{I_{\max}^2}{8}(L_{\max} - L_{\min}).$$

За почетни фазни став $\varphi = \pi/4$, средња вредност електромагнетског момента је

$$M_{sr} = -\frac{I_{\max}^2}{8}(L_{\max} - L_{\min}).$$

Потребно је уочити да је рад посматране машине заснован на промени струје која је синхрона са кретањем ротора.

<u>Питање (2.15):</u>

У случају да је струја i_1 константна, показати да случај у коме је ротор заустављен у положају $\theta_m = \pi/2$ представља стабилну равнотежу, док се у положају $\theta_m = 0$ има лабилна равнотежа.

<u>Одговор (2.15):</u>

Електромагнетски моменат, дат једначином (2.97), пропорционалан је функцији $\sin(2\theta_m)$. Уколико је ротор заустављен у положају $\theta_m = \pi/2$, електромагнетски моменат је једнак нули. Хипотетички мали померај $\Delta\theta$ у позитивном смеру доводи ротор у нови положај у коме је $2\theta_m = \pi+2\Delta\theta$ док је $\sin(2\theta_m)<0$. Јавља се негативан моменат који тежи да врати ротор у почетни положај. У случају да ротор начини мали померај $\Delta\theta$ у негативном смеру, јавља се позитиван моменат који настоји да врати ротор у почетни положај. У случају да се ротор налази у положају $\theta_m = 0$, равнотежа је лабилна. Хипотетички мали померај $\Delta\theta$ у позитивном смеру доводи до стварања позитивног момента, пропорционалног фактору $\sin(\Delta\theta_m)$. Позитиван моменат тежи да увећа одступање ротора од почетног положаја. Одступање од

почетног положаја се кумулативно увећава и у случају када се начини хипотетички мали померај $\Delta\theta$ у негативном смеру.

Питање (2.16):

Може ли се остварити средња вредност момента различита од нуле са простопериодичном струјом другачије учестаности ($\omega_s \neq \Omega_m$)?

Одговор (2.16):

На основу једначине (2.99), ненулта средња вредност момента се може добити и у случају да је кружна учестаност струје $\omega_s = -\Omega_m$.

2.17.4 Анализа двострано напајаног претварача

Двострано напајана машина приказана на слици 2.48 има намотаје на покретном и на непокретном делу. Статор има магнетско коло и намотај са N_1 навојака отпорности R_1. Струја у намотају статора је $i_1(t)$, док напон $u_1(t)$ на крајевима намотаја зависи од промене флукса и струје статора. Ротор има цилиндрично магнетско коло на коме је уграђен роторски намотај N_2, отпорности R_2, са струјом $i_2(t)$. У зависности од промене флукса и струје ротора, на крајевима намотаја има се напон $u_2(t)$. Електромагнетска спрега статора и ротора остварује се преко променљиве међусобне индуктивности.

Линије поља флукса у статорском намотају једним делом (међусобни флукс) пролазе и кроз магнетско коло ротора и роторски намотај, простирући се у вертикалном правцу. Будући да је ротор цилиндричан, он пружа једнаку магнетску отпорност у свим правцима, то јест ротор је *изотропан*. Ваздушни зазор је константан, тако да обртање ротор не проузрокује промену магнетске отпорности на путу статорског флукса, па је сопствена индуктивност намотаја статора константна.

Облик магнетског кола приказан на слици 2.48 проузрокује мању или већу промену индуктивности L_2 роторског намотаја при обртању ротора. Правац флукса ротора је одређен положајем осе роторског намотаја. Угао θ_m одређује померај ове осе у односу на хоризонтални положај. Линије поља ротора наилазе на магнетску отпорност који зависи од положаја ротора θ_m. Наиме, за $\theta_m = \pi/2$, линије поља пролазе кроз релативно мали ваздушни зазор и прелазе у магнетско коло статора. Када је $\theta_m = 0$, роторски флукс по изласку из магнетског кола ротора прелази у околни ваздушни простор мале пермеабилности и велике магнетске отпорности. У случају када је $\theta_m = \pi/2$, пут линија магнетског поља кроз ваздух је краћи него у случају када је $\theta_m = 0$. Стога магнетска отпорност и сопствена индуктивност ротора зависе од положаја θ_m. Промена L_2 зависи од облика магнетског кола. Ако се

магнетско коло статора начини тако да у већој мери обухвата роторски цилиндар, промена индуктивности намотаја ротора ће бити мања.

Слика 2.48 Двострано напајани електромеханички претварач са магнетскним спрежним пољем.

У следећој анализи рада двострано напајаног претварача, промена сопствене индуктивности ротора у функцији помераја θ_m се занемарује и сматра се да је L_2 = const.

2.17.5 Промена међусобне индуктивности

Међусобна индуктивност статорског и роторског намотаја зависи од положаја ротора θ_m. Када је ротор у таквом положају да је оса роторског намотаја постављена хоризонтално, линије статорског поља не доприносе увећању роторског флукса (и обрнуто), па је тада међусобна индуктивност L_{12} једнака нули. С друге стране, за $\theta_m = \pi/2$ или $\theta_m = 3\pi/2$, спрега два намотаја је највећа, па тада међусобна индуктивност L_{12} има највећу апсолутну вредност L_m. Знак међусобне индуктивности зависи од дефиниције референтних смерова за флукс статора и ротора, који могу бити другачији него на слици 2.49. Физички, питање је да ли се флуксеви сабирају или пони-

штавају. Промена међусобне индуктивности у функцији угла ротора θ_m зависи од облика магнетског кола и расподеле проводника који чине намотаје. Ова се индуктивност у највећем броју случајева може моделирати простопериодичном функцијом

$$L_{12}(\theta_m) = L_m \sin\theta_m .$$

Слика 2.49. Одређивање сопствених индуктивности и међусобне индуктивности двострано напајаног претварача са магнетским спрежним пољем.

Матрица индуктивности даје везу укупног флукса статора Ψ_1 и ротора Ψ_2 са струјама намотаја i_1 и i_2. Сопствене индуктивности $L_{11}=L_1$ $L_{22} = L_2$ су на главној дијагонали матрице, док су преостали елементи матрице једнаки међусобној индуктивности између два намотаја $L_{12} = L_{21} = L_m \sin\theta_m$.

$$\underline{\psi} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & L_{12} \\ L_{12} & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \underline{L}\ \underline{i} \qquad (2.100)$$

Енергија магнетског поља се може изразити у функцији струја и елемената матрице индуктивности. Израз за енергију се може дати у виду суме, матричног или скаларног израза.

$$W_m = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} L_{jk} i_j i_k = \tag{2.101}$$

$$= \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + L_{12} i_1 i_2 = \frac{1}{2} \underline{i}^T \underline{L}\, \underline{i}$$

2.17.6 Израз за моменат

Будући да се међусобна индуктивност мења у зависности од положаја ротора, један од три сабирка у збиру (2.101), који даје енергију магнетског поља, мења се у функцији угла θ_m на начин дат једначином (2.102).

$$L_{12} i_1 i_2 = i_1 i_2 \; L_m \sin\theta_m \tag{2.102}$$

Електромагнетски моменат се може одредити као извод енергије поља по углу. Израз за електромагнетски моменат, дат једначином (2.103) показује да је моменат пропорционалан производу струје у намотају статора и струје у намотају ротора, да зависи од максималне вредности међусобне индуктивности (L_m), као и да зависи од функције cos θ_m.

$$M_{em} = \frac{\mathrm{d}W_m}{\mathrm{d}\theta_m} = \tag{2.103}$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta_m}\left[\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + L_{12} i_1 i_2\right] = i_1 i_2 L_m \cos\theta_m$$

Електромагнетски моменат двострано напајане машине се може изразити као производ две струје, али се може записати и као производ флуксева.

Да би се ово показало, потребно је изразити струје у функцији флукса, што се постиже инверзијом матрице индуктивности,

$$\underline{\psi} = \underline{L}\, \underline{i} \;\Rightarrow\; \underline{i} = \underline{L}^{-1} \underline{\psi} \,,$$

што даје израз за струје.

$$i_1 = \frac{L_2}{L_1L_2 - L_{12}^2}\psi_1 - \frac{L_{12}}{L_1L_2 - L_{12}^2}\psi_2,$$

$$i_2 = \frac{-L_{12}}{L_1L_2 - L_{12}^2}\psi_1 + \frac{L_1}{L_1L_2 - L_{12}^2}\psi_2$$

Множењем ових израза за струју, добија се израз за моменат у коме фигурише производ укупних флуксева $\Psi_1\Psi_2$. С друге стране, будући да је $\Psi_1 = N_1\Phi_1$ и $\Psi_2 = N_2\Phi_2$, то се моменат може изразити и у функцији производа флуксева у навојцима,

$$M_{em} \sim i_1 i_2 \sim \Phi_1 i_2 \sim \Phi_2 i_1 \sim \Phi_1\Phi_2 .$$

На основу добијених израза за моменат, може се закључити следеће

- Код једнострано напајане машине, електромагнетски моменат је пропорционалан квадрату струје i_1^2, односно квадрату укупног флукса Ψ_1^2, односно квадрату флукса у језгру Φ_1^2.
- Код двострано напајане машине, електромагнетски моменат се може изразити у функцији производа струја намотаја $i_1 i_2$ или производа укупних флуксева $\Psi_1\Psi_2$, односно производа флуксева у навојцима $\Phi_1\Phi_2$.

Средња вредност момента

Електромагнетски моменат двострано напајане машине је дат једначином (2.103). У случају да се ротор обрће константном угаоном брзином Ω_m, положај ротора је $\theta_m = \Omega_m t + \theta_0$. Може се сматрати да је у тренутку $t = 0$ угао $\theta_m(0) = \theta_0$ једнак нули, тако да је положај ротора $\theta_m = \Omega_m t$. Уколико су струје у намотајима непромењиве ($i_1 = I_1$ $i_2 = I_2$), закључује се да ће моменат имати простопериодичну промену cos $\Omega_m t$, са средњом вредношћу која је једнака нули. Дакле, двострано напајана машина која има сталне (једносмерне) струје у намотајима статора и ротора не може дати моменат средње вредности различите од нуле. Стога је и средња вредност снаге претварања у посматраном случају једнака нули. Уколико је једна од струја променљива, могуће је ускладити њену промену са обртањем ротора тако да се добије средња вредност различита од нуле.

<u>Питање (2.17):</u> Претпостављајући да је струја другог намотаја стална $i_2 = I_2$, као и да је $\theta_m = \Omega_m t$, одредити промену струје i_1 која ће дати моменат чија је средња вредност различита од нуле.

Одговор (2.17):

Према изразу за моменат (2.103), електромагнетски моменат је одређен производом функције cos $\Omega_m t$ и функције $i_1(t)$. Производ $i_1(t)$ cos $\Omega_m t$ може имати ненулту средњу вредност уколико је струја i_1 простопериодична, учестаности ω_1 која је једнака угаоној брзини обртања Ω_m.

Услови за развијање момента

Електромагнетски моменат двоструко напајане машине, код које у намотајима статора и ротора постоје простопериодичне струје, може имати средњу вредност различиту од нуле у случају да кружне учестаности струја и угаона брзина обртања задовољавају одговарајуће услове, на које ће бити указано у наредном пасусу. Уколико се струје представе функцијом $i = I\cos(\omega t - \varphi)$, могуће је анализирати случај када су обе струје простопериодичне, као и случај када је кружна учестаност једне од струја $\omega = 0$, што значи да се ради о сталној, једносмерној струји. Струје статора и ротора могу имати различите амплитуде, учестаности и различите почетне фазе. Нека је кружна учестаност струје у намотају статора ω_1, кружна учестаност струје у намотају ротора ω_2, релевантне амплитуде I_{1m} и I_{2m} и почетне фазе $-\varphi_1$ и $-\varphi_2$. Тренутне вредности струја у намотајима дате су једначином (2.104).

$$\begin{aligned} i_1 &= I_{1m}\cos(\omega_1 t - \varphi_1), \\ i_2 &= I_{2m}\cos(\omega_2 t - \varphi_2). \end{aligned} \tag{2.104}$$

Уврштавањем израза за струју у једначину 2.103, добија се да је електромагнетски моменат једнак

$$\begin{aligned} M_{em} &= i_1 i_2 L_m \cos\theta_m = \\ &= I_{1m}\cos(\omega_1 t - \varphi_1)\cdot I_{2m}\cos(\omega_2 t - \varphi_2)\cdot L_m\cos\theta_m . \end{aligned}$$

Будући да је $\theta_m = \Omega_m t$, добијена вредност момента је производ три простопериодичне функције. Увођењем коефицијента $K_n = L_m I_{1m} I_{2m}/4$, претходна једначина добија облик (2.105).

$$\begin{aligned} M_{em} = {} & K_n\cos(\omega_1 t - \varphi_1 + \omega_2 t - \varphi_2 + \Omega_m t) \\ & + K_n\cos(\omega_1 t - \varphi_1 + \omega_2 t - \varphi_2 - \Omega_m t) \\ & + K_n\cos(\omega_1 t - \varphi_1 - \omega_2 t + \varphi_2 + \Omega_m t) \\ & + K_n\cos(\omega_1 t - \varphi_1 - \omega_2 t + \varphi_2 - \Omega_m t) \end{aligned} \tag{2.105}$$

Електромагнетски моменат има амплитуду пропорционалну међусобној индуктивности и производу амплитуда струја у намотајима ($L_m I_{1m} I_{2m} = 4K_n$). Промена момента је одређена косинусним функцијама у којима је кружна учестаност једнака ($\omega_1 \pm \omega_2 \pm \Omega_m$). Функција $\cos(\omega t\text{-}\varphi)$ има ненулту вредност у случају да је кружна учестаност ω једнака нули. Средња вредност момента различита од нуле добија се у случају да кружне учестаности струја у намотајима и угаона брзина обртања задовољавају један од четири услова дата изразом 2.106

$$\begin{aligned} \Omega_m &= \omega_1 + \omega_2 \\ \Omega_m &= \omega_1 - \omega_2 \\ \Omega_m &= -\omega_1 + \omega_2 \\ \Omega_m &= -\omega_1 - \omega_2 \end{aligned} \tag{2.106}$$

2.17.7 Магнетски полови

Двострано напајана машина која је предмет анализе има магнетско коло на коме се могу уочити два магнетска пола статора и два магнетска пола ротора. Положај *северног* магнетског пола ротора може се одредити као зона у којој линије магнетског поља, створеног деловањем струје у роторском намотају, излазе из магнетског кола ротора и прелазе у ваздушни зазор. На сличан начин може се дефинисати и *јужни* пол, као и полови статора. Посматрана двострано напајана машина има два статорска и два роторска пола. Како је $L_{12} = L_m \sin\theta_m$, може се закључити да један циклус промене међусобне индуктивности одговара једном обртају машине.

Доцније, током курса, биће дефинисане и објашњене *вишеполне* машине. Ради се о електричним машинама које су начињене тако да имају већи број полова. Број полова статора и ротора је у највећем броју случајева једнак. Четворополна машина има два северна и два јужна пола на статору, једнако као и на ротору. За овакву машину кажемо да има $p = 2$ пара полова. Код четворополне двострано напајане машине, међусобна индуктивност се мења по закону $L_{12} = L_{\mathrm{m}} \sin(p\theta_{\mathrm{m}})$, тако да начини два циклуса током једног обртаја ротора. Средња вредност момента различита од нуле добија се у случају када је $\pm\omega_1 \pm\omega_2 \pm p\Omega_{\mathrm{m}} = 0$, где ознаком Ω_{m} обележавамо *механичку* угаону брзину обртања ротора. У даљем тексту, ознака ω ће означавати учестаност струја и напона, док ће се ознака Ω користити за механичку угаону брзину обртања (то јест брзину којом се у простору врте ротора, флукс, вектори струје итд.). Изрази *електрична* учестаност ω и

механичка брзина Ω биће ближе дефинисани током предавања, као и веза $\omega = p\Omega$.

Уколико није другачије наведено, у даљем тексту се подразумева да су посматране машине двополне, то јест да је $p = 1$ и $\omega = \Omega$.

2.17.8 Машине за једносмерну и наизменичну струју

Анализа двострано напајане машине се може користити за приказ основних принципа рада машина за једносмерну струју, асинхроних машина и синхроних машина. Наведене машине ће бити предмет изучавања у остатку књиге. Све три врсте машина имају намотаје и на статору и на ротору. Обртањем ротора, мења се међусобна индуктивност између статорских и роторских намотаја.

Као што је показано, развијање момента који има средњу вредност различиту од нуле захтева да кружна учестаност струја статора ω_1, учестаност струја ротора ω_2 и брзина обртања ротора Ω_m[10] морају задовољавати услов $\omega_1 \pm\omega_2 \pm\omega_m = 0$.

Машине за једносмерну струју у проводницима статора имају једносмерну струју ($\omega_1 = 0$) а у проводницима ротора наизменичну струју. Учестаност роторских струја је одређена брзином обртања, $\omega_2 = p\Omega_m$[11].

Асинхроне машине у проводницима статора и ротора имају наизменичне, то јест простопериодичне струје. Збир брзине обртања $p\Omega_m$[12] и роторске учестаности ω_2 једнак је учестаности статорских струја ω_1. Брзина обртања ротора $p\Omega_m$ заостаје за статорском учестаношћу за износ $\omega_2 = \omega_1 - p\Omega_m$, који се назива клизањем.

---

[10] У случају да машина има p пари полова, услов за развијање момента је $\omega_1 \pm\omega_2 \pm p\Omega_m = 0$. Ознака Ω_m је угаона брзина обртања ротора, односно *механичка* брзина. Кружна учестаност $\omega_m = p\Omega_m$ дефинише период $T_{\omega m} = 2\pi/\omega_m$ проласка магнетских полова ротора поред истоимених магнетских полова статора. Угаоно растојање између истоимених магнетских полова статора (као и ротора) је $\Omega_m T_{\omega m} = 2\pi/p$. Четворополна машина ($p$=2) има два северна и два јужна магнетска. Два северна пола су на угаоном растојању од $\Omega_m T_{\omega m} = 2\pi/2 = \pi$. Код двополне машине ($p$=1), полазећи од северног магнетског пола, треба прећи угаоно растојање од $\Omega_m T_{\omega m} = 2\pi/1 = 2\pi$ да би се дошло до следећег северног пола, то јест истог пола од кога се и пошло. Наиме, двополна машина има само један северни магнетски пол и само један јужни магнетски пол.

[11] Код двополне машине за једносмерну струју, број пари полова је $p = 1$, па наведени услов има облик $\omega_2 = \Omega_m$. У случају да је p>1, услов гласи $\omega_2 = \omega_m = p\Omega_m$.

[12] Код двополног асинхроног мотора је $p = 1$.

Синхроне машине у проводницима статора имају наизменичну струју док у проводницима ротора имају једносмерну струју. Будући да је $\omega_2 = 0$, брзина обртања је једнака статорској учестаности, $\omega_1 = p\Omega_m$. Једнакост брзине обртања ротора и учестаност статорских струје је разлог да се овакве машине зову синхроне.

2.17.9 Одређивање момента из векторског производа

Принципи рада и разлике између машина за једносмерну струју, асинхроних и синхроних машина могу се сагледати уз помоћ представљања флуксева одговарајућим векторима. Електромагнетски моменат се може израчунати као векторски производ вектора флукса статора и вектора флукса ротора, односно као производ алгебарских интензитета два вектора и синуса угла између њих. Доказ ове тврдње ће бити дат у овој књизи. Електромагнетски моменат се може одредити израчунавањем векторског производа

- статорског флукса и роторског флукса,
- магнетопобудне силе статора и магнетопобудне силе ротора,
- флукса статора и магнетопобудне силе ротора, као и
- флукса ротора и магнетопобудне силе статора.

Добијање електромагнетског момента из векторског производа флукса и струје се може приказати на примеру контуре постављене у страно, хомогено магнетско поље, као што је приказано на слици 2.50. Контуру чини проводник у коме постоји струја јачине I. Проводник је савијен тако да формира равну правоугаону површ ширине D и дужине L, тако да је њена површина $S = DL$. У посматраном положају, нормала n_1 на раван у којој лежи контура стоји под углом α у односу на вектор магнетске индукције. Угао α између нормале и вектора магнетске индукције одређује електромагнетски моменат који делује на контуру.

Вектор магнетског момента струјне контуре има правац и смер одређен нормалом n_1 на површ која се ослања на контуру. Нормала је оријентисана према референтном смеру струје у контури и по правилу десне завојнице. Алгебарски интензитет вектора магнетског момента m једнак је производу јачине струје I и површине површи S која се ослања на контуру.

$$\vec{m} = I \cdot S \cdot \vec{n}_1 \tag{2.107}$$

Електромагнетски моменат који делује на посматрану контуру једнак је векторском производу вектора магнетског момента m и вектора магнетске

индукције B. Моменат се може одредити из једначине (2.108). На слици 2.50, вектор момента лежи у оси око које се обрће контура и има смер који је одређен правилом десне завојнице и смером у коме делује спрег сила. Максимална вредност момента $M_m = D{\cdot}L{\cdot}I{\cdot}B$ се има у положају $\alpha = \pi/2$.

$$\vec{M}_{em} = \vec{m} \times \vec{B}, \quad \left|\vec{M}_{em}\right| = S \cdot I \cdot B \cdot \sin\alpha = D \cdot L \cdot I \cdot B \cdot \sin\alpha \tag{2.108}$$

Резултат (2.108) се може проверити анализом сила на делове правоугаоне контуре. На делове контуре дужине L, који су нормални на линије магнетског поља, електромагнетска сила је одређена изразом $F = L{\cdot}I{\cdot}B$. На попречне делове контуре дужине D делују силе у правцу осе ротације, али су оне колинеарне и супротног смера, тако да се њихова дејства поништавају. Крак силе K једнак је

$$K = \frac{D}{2}\sin\alpha\,,$$

тако да је електромагнетски моменат који делује на контуру дату на слици 2.50 једнак

$$M_{em} = 2 \cdot F \cdot K = 2\left(L \cdot I \cdot B\right)\frac{D}{2}\sin\alpha = D \cdot L \cdot I \cdot B \cdot \sin\alpha\,.$$

Слика 2.50. Моменат који делује на контуру у хомогеном, страном магнетском пољу једнак је векторском производу вектора магнетске индукције B и вектора магнетског момента контуре. Алгебарски интензитет вектора магнетског момента контуре једнак је производу струје у контури и површине површи која се ослања на контуру. Правац и смер му је одређен нормалом n_1, оријентисаном према референтном смеру струје у контури и по правилу десне завојнице.

Претходно добијени израз за моменат може се представити као функција флукса и магнетопобудне силе. Максимална вредност флукса кроз контуру је $\Phi_m = SB = DLB$, и она постоји у положају $\alpha = 0$. Будући да контура има један навојак (N=1), струја I у контури је уједно и магнетопобудна сила $F_m = NI = I$. Полазећи од израза (2.108), електромагнетски моменат се може представити изразом

$$M_{em} = F_m \cdot \Phi_m \cdot \sin\alpha \,. \qquad (2.109)$$

Флукс кроз контуру је оријентисани скалар који се може представити вектором чији правац одређује вектор магнетске индукције. Магнетопо-

будна сила контуре је вектор чију оријентацију одређује нормала n_1, односно вектор магнетског момента контуре. Дакле, вредност израза (2.109) је одређена векторским производом између вектора магнетопобудне силе и вектора флукса чији је алгебарски интензитет једнак Φ_m док му је оријентација одређена вектором магнетске индукције. На аналоган начин се може показати да је електромагнетски моменат цилиндричне обртне машине одређен векторским производом магнетопобудне силе статора и флукса ротора. Преуређивањем израза за моменат, могуће га је израчунати и из векторског производа статорског флукса и роторског флукса, магнетопобудне силе статора и магнетопобудне силе ротора, или флукса статора и магнетопобудне силе ротора.

2.17.10 Положај вектора флукса код обртних машина

Вектор флукса статора и вектор флукса ротора могу бити непомични или се могу обртати брзином која је одређена кружном учестаношћу струја у намотајима. Подробнија дефиниција флукса у навојку, флукса у намотају, као и начин представљања флукса вектором дати су у поглављу 2.13. Анализа која показује да се електромагнетски моменат машине може одредити из векторског производа флуксева и магнетопобудних сила део је поглавља у којима се проучавају поједине врсте машина. Машине за једносмерну струју, асинхроне и синхроне машине се разликују по односу брзине обртања ротора, кружне учестаности струја у намотајима статора и кружне учестаности струја у намотајима ротора.

Када је познат флукс статора у једном навојку (Φ_S), флукс ротора у једном навојку (Φ_R), као и угао $\Delta\theta$ између два вектора који представљају ова два флукса, електромагнетски моменат је одређен изразом $|\Phi_S \times \Phi_R| = \Phi_S \Phi_R \sin(\Delta\theta)$.

У случају да се релативни положај два флукса мења по закону $\Delta\theta = \omega t$, електромагнетски моменат ће, у складу са једначином (2.108), имати простопериодичну промену ($\sin \omega t$). Средња вредност момента ће тада бити једнака нули. Да би се створио електромагнетски моменат чија је средња вредност различита од нуле, потребно је да се релативни положај статорског и роторског флукса не мења. Угао између два вектора је непроменљив у случају када су оба вектора непомична, али и у случају када се ови вектори обрћу истом брзином у истом смеру.

Непроменљивост угаоног померај $\Delta\theta$ се не може остварити у случају када електрична машина има једносмерну струју у статорским проводницима и једносмерну струју у роторским проводницима. Наиме, намотаји са сталном струјом стварају магнетопобудну силу и флукс у правцу који се не помера у односу на саме намотаје. Дакле, једносмерна струја у ста-

торским проводницима ствара флукс који је непомичан, док једносмерна струја у проводницима ротора ствара флукс који се не помера у односу на ротор, али се обрће једнаком брзином као и ротор, тако да се он помера у односу на флукс статора.

Слика 2.51. Промена угла између статорског и роторског флукса у случају да у намотајима статора и ротора постоје једносмерне струје.

У посматраном случају, вектори флукса су приказани на слици 2.51. Флукс статора Φ_S се не помера док се флукс ротора Φ_R обрће брзином обртања ротора Ω_m. Тада је угао између вектора $\Delta\theta$ функција брзине обртања ротора $\Delta\theta = \Omega_m \cdot t$, док је промена момента одређена функцијом $\sin(\Omega_m \cdot t)$, тако да је његова средња вредност једнака нули. Да би се остварила константна вредност угла који образују вектори статорског и роторског флукса, два вектора морају бити у стању мировања, или се морају обртати једнаком брзином. У сваком случају, један од намотаја, статорски или роторски, мора стварати поље које се обрће у односу на сам намотај. Премда принципе рада машина за једносмерну струју, асинхроних машина и синхроних машина тек треба детаљније изложити и анализирати, од интереса је указати на положај који статорски и роторски флукс имају код ових машина.

Машина за једносмерну струју је приказана у делу А слике 2.52. Статорски флукс је представљен вектором Φ_S. Флукс Φ_S је непомичан, и створен је дејством једносмерне струје у проводницима статорског намотаја. Роторски флукс је представљен вектором Φ_R. Флукс Φ_R је створен дејством струје у проводницима ротора. Роторски намотај најчешће има већи број навојака, али је на слици 2.52 А представљен проводницима P1 и P2. У проводницима роторског намотаја постоји наизменична струја кру-

жне учестаности $\omega_2 = \Omega_m$. Током једног обртаја ротора, струја у проводницима P1 и P2 начини један циклус промене, током кога је њена јачина позитивна у једној половини периода а негативна у другој половини периода. Ротор машине за једносмерну струју се обрће брзином Ω_m. Будући да струја у проводницима роторског намотаја мења знак синхроно са обртањем, на месту проводника P1, то јест испод јужног магнетског пола статора, увек ће се имати струја у смеру ка посматрачу (⊙).

Претходно дату тврдњу је могуће поткрепити следећом дискусијом. У положају ротора који је приказан на слици 2.52A, проводник P2 се налази испод северног магнетског пола статора и има струју у смеру од посматрача (⊗). После једне половине обртаја ротора, проводник P2 ће доћи на место проводника P1, то јест испод јужног магнетског пола статора. Истовремено ће се променити и смер струје, тако да ће смер струје у роторском проводнику који се налази испод јужног магнетског пола статора и даље бити ка посматрачу. На сличан начин се може показати да ће се у роторском проводнику који се нађе испод северног магнетског пола статора имати струја у смеру од посматрача (⊗).

Будући да се расподела роторских струја не помера у односу на статор, струје ротора стварају магнетопобудну силу и флукс Φ_R који су непомични у односу на статор. Начин на који се постиже да је учестаност наизменичних струја ротора одређена брзином обртања биће детаљније изложен у поглављу о машинама за једносмерну струју.

У посматраним условима, наизменичне струје у проводницима ротора стварају флукс ротора Φ_R који се обрће у односу на сам ротор. Магнетско поље које се обрће у односу на намотаје чије га струје стварају зове се *обртно магнетско* поље. Услови под којима наизменичне струје могу стварати обртно магнетско поље ће бити детаљније анализирани у поглављу о асинхроним машинама.

При обртању ротора, вектор флукса ротора остаје непокретан у односу на статор и нормалан на вектор флукса статора, без обзира на брзину и смер обртања. Стога се магнетско поље ротора у машини за једносмерну струју може звати *заустављено обртно поље*.

Асинхроне машине у проводницима статора имају наизменичне струје учестаности ω_1, док у проводницима ротора имају наизменичне струје учестаности ω_2. На слици 2.52B, дата је упрошћена представа асинхроне машине која има један пар магнетских полова ($p = 1$).

На претходно приказаном примеру машине за једносмерну струју, показано је да наизменичне струје у проводницима ротора стварају магнетско поље ротора и вектор роторског флукса који се обрћу у односу на ротор. Брзина обртања поља у односу на сам намотај је одређена кружном учестаношћу струја у намотају.

На истоветан начин, флукс статора Φ_S се обрће брзином $\Omega_1 = \omega_1$ у односу на статор, док се флукс ротора Φ_R обрће брзином $\Omega_2 = \omega_2$ у односу на ротор. Будући да се ротор обрће брзином[13] $\Omega_m = \omega_m$, брзина обртања вектора роторског флукса је $\Omega_m + \omega_2$. Вектор статорског флукса се обрће брзином ω_1, тако да је разлика у брзини обртања статорског и роторског флукса једнака $\omega_1 - \Omega_m - \omega_2$. Према једначини (2.106) која даје услов за ненулту вредност средње вредности снаге и момента, збир $\omega_1 - \Omega_m - \omega_2$ треба да буде једнак нули.

На основу претходног разматрања рада асинхроне машине, могу се извести следећи закључци

- Вектори флукса статора и ротора се обрћу једнаком брзином. Брзина обртања магнетског поља асинхроне машине Ω_1 је одређена кружном учестаношћу статорских струја. Код двополне машине, ова брзине је $\Omega_1 = \omega_1$.
- Угао $\Delta\theta$ између вектора статорског и роторског флукса је у устаљеном стању непроменљив. Машина даје електромагнетски моменат пропорционалан функцији $\sin \Delta\theta$, који је у устаљеним стањима константан.
- Ротор двополне асинхроне машине се обрће брзином која се разликује од брзине обртања магнетског поља $\Omega_1 = \omega_1$. Разлика $\omega_2 = \omega_1 - \Omega_m$ у брзини се зове *клизање*. Клизање двополне асинхроне машине је једнако кружној учестаности роторских струја.

Синхроне машине имају наизменичну струју учестаности ω_1 у проводницима статора и једносмерну струју у проводницима ротора. Вектор флукса статора Φ_S се обрће брзином $\Omega_1 = \omega_1$ у односу на статор, док се вектор флукса ротора Φ_R обрће једнаком брзином као и ротор, $\Omega_m = \omega_m$. На слици 2.52 C, дата је упрошћена представа двополне синхроне машине. Стварање електромагнетског момента ненулте средње вредности захтева да се релативни положај два вектора флукса не мења, то јест да угао $\Delta\theta$ буде непроменљив. Стога је потребно да се ротор обрће истом брзином као и вектор статорског флукса. Дакле, код синхроне машине, вектори статорског и роторског флукса се обрћу синхроно са самим ротором. Код двополне синхроне машине, кружна учестаност статорских струја мора бити једнака брзини обртања ротора. Код машина са већим бројем пари полова (p>1), услов узима облик $\omega_1 = p\Omega_m$.

[13] Будући да се разматра двополна машина код које је број пари магнетских полова $p = 1$, постоји једнакост између механичких брзина обртања Ω и *електричних* кружних учестаности ω.

Слика 2.52. Положај статорског и роторског флукса код машина за једносмерну струју (A), асинхроних машина (B) и синхроних машина (C).

2.17.11 Обртно поље

Анализа спроведена у претходном одељку показује да је услов за развијање електромагнетског момента ненулте средње вредности непромењив релативни положај између вектора статорског и роторског флукса. Код машина за једносмерну струју, оба флукса мирују у односу на статор, док се код машина за наизменичну струју, у које спадају асинхроне и синхроне машине, два флукса обрћу једнаким брзинама.

Будући да се ротор машине обрће, то се бар један од два флукса (Φ_S или Φ_R) мора обртати у односу на намотаје чијом је магнетопобудном силом створен. Магнетско поље, које се обрће у односу на намотај чијом је магнетопобудном силом створено зовемо *обртно магнетско поље*. Доцније ће бити показано да стварање обртног поља код асинхроних и синхроних машина захтева да постоје два намотаја на статору. Уз одговарајући просторни померај између оса намотаја, наизменичне струје у намотајима одговарајуће амплитуде и учестаности, као и одговарајуће почетне фазе струја у појединим намотајима, могуће је добити обртно магнетско поље. Алгебарски интензитет вектора флукса статора и брзину обртања магнетског поља могуће је мењати променом амплитуде и учестаности струја у

намотајима статора. У оквиру овог поглавља, дат је једноставан пример обртног поља које стварају два намотаја.

Слика 2.53. Два статорска намотаја узајамно нормалних оса са простопериодичним струјама једнаке амплитуде и кружне учестаности стварају обртно магнетско поље које се може описати обртним вектором флукса константног алгебарског интензитета. Потребно је да се почетне фазе струја разликују за π/2.

На слици 2.53, приказана су два статорска намотаја која су међусобно просторно померена. Угао између оса намотаја је π/2. Осе намотаја су обележене ознакама α и β. Намотај у α оси има исто број навојака као и намотај у β оси. У намотајима постоје простопериодичне струје амплитуде I_m и учестаности ω_S,

$$i_\alpha(t) = I_m \cos(\omega_S t),$$

$$i_\beta(t) = I_m \cos\left(\omega_S t - \frac{\pi}{2}\right) = I_m \sin(\omega_S t),$$

чије се почетне фазе разликују за π/2. Сваки намотај ствара магнетопобудну силу у правцу своје осе. Магнетопобудне силе зависе од струје у навојцима и броја навојака. Флукс намотаја зависи од магнетопобудне силе и магнетске отпорности. Уколико су магнетска кола статора и ротора цилиндричног облика, магнетска отпорност R_μ је иста у свим правцима. Стога се може сматрати да је магнетска отпорност на путу флукса Φ_α једнака

магнетској отпорности на путу Φ_β. Максималне вредности флукса у навојцима имају вредност

$$\Phi_{\alpha\max} = \frac{N_\alpha I_m}{R_\mu} = \Phi_{\beta\max} = \frac{N_\beta I_m}{R_\mu} = \Phi_m ,$$

тако да су тренутне вредности флукса дате изразима

$$\Phi_\alpha(t) = \Phi_m \cos(\omega_S t),$$
$$\Phi_\beta(t) = \Phi_m \sin(\omega_S t).$$

Функције $\Phi_\alpha(t)$ и $\Phi_\beta(t)$ представљају пројекције вектора флукса амплитуде Φ_m који се обрће брзином $\Omega_S = \omega_S$. Дакле, резултантно магнетско поље које стварају два намотаја статора приказана на слици 2.53 обрће се у односу на намотаје брзином $\Omega_S = \omega_S$. Током обртања, алгебарски интензитет вектора флукса се не мења.

У оквиру књиге, проучавају се машине за једносмерну струју, асинхроне машине и синхроне машине. Код сваке од поменутих машина постоје намотаји у којима наизменична струја ствара магнетско поље које се обрће у односу на саме намотаје (то јест обртно магнетско поље).

2.17.12 Врсте електричних машина

Машине за једносмерну струју

Електричне машине код којих је у намотајима статора једносмерна струја, чији ротор има наизменичне струје у проводницима, и где су вектори статорског и роторског флукса непомични у односу на статор зову се *машине за једносмерну струју*. Статорски намотаји машина за једносмерну струју се напајају једносмерним, то јест сталним струјама. У проводницима ротора ових машина постоје наизменичне струје чија је учестаност одређена брзином обртања ротора. Извор који напаја ротор машине једносмерне струје не даје наизменичне већ једносмерне струје и напоне. Начин на који се струја једносмерног извора усмерава у проводнике ротора тако да се у њима добијају периодичне, то јест наизменичне струје чија је учестаност одређена брзином обртања ће бити објашњен у поглављу које се бави машинама за једносмерну струју.

Асинхроне и синхроне машине најчешће имају статор у коме постоје наизменичне струје кружне учестаности ω_1, које стварају обртно магнетско поље. Стога ове машине припадају групи *машина за наизменичну* струју. Брзина обртања магнетског поља је одређена кружном учестаношћу ω_1. Анализом структуре дате на слици 2.53 показано је да се обртно поље може створити коришћењем два међусобно нормална намотаја статора. Практичне машине за наизменичну струју најчешће имају систем статорских намотаја који има три дела, *три фазе*, то јест три *фазна намотаја* чије су осе просторно померене за $2\pi/3$, што је уједно и разлика почетних фаза наизменичних струја које постоје у намотајима. Амплитуда I_m одређује алгебарски интензитет вектора флукса док кружна учестаност $\omega_1 = \omega_S$ одређује брзину обртања магнетског поља Ω_S.

Асинхроне машине

Поред наизменичних струја у намотајима статора, асинхроне машине имају наизменичне струје и у проводницима ротора. Магнетско поље које стварају струје статора обрће се брзином $\Omega_1 = \omega_1$, док се роторско поље обрће брзином $\Omega_2 = \omega_2$ у односу на ротор. Брзине обртања вектора флукса статора и вектора флукса ротора су дискутоване у претходном одељку, где је дефинисана и веза кружних учестаности статорских струја, роторских струја, брзине обртања и учестаности клизања.

Синхроне машине

Као и асинхроне машине, синхроне машине имају систем статорских намотаја који ствара обртно магнетско поље чија је брзина обртања одређена кружном учестаношћу напајања. Струје роторског намотаја синхроне машине су сталне, и напајају се из извора једносмерне струје. Једносмерне струје стварају роторски флукс који се не помера у односу на ротор, и обрће се заједно са њим брзином Ω_m. Постоје и синхроне машине које на ротору немају намотаја, већ се роторски флукс добија уградњом сталних магнета у магнетско коло ротора. За рад са константним углом између вектора статорског и роторског флукса, потребно је да се магнетска поља статора и ротор обрћу истом брзином.

Међу поменутим електричним машинама, свака има своје предности, ограничења и своје специфично поље примене.

Даља анализа електричних машина захтева упознавање са начином формирања намотаја, анализу магнетског поља у зазору, као и принципе стварања обртног поља у магнетском колу машине.

2.18 Анализа магнетског поља у зазору

У оквиру поглавља, дата је анализа магнетског и електричног поља које постоји у ваздушном зазору цилиндричне машине услед деловања струје у намотајима машине. Магнетско поље у зазору настаје услед дејства струја у статору и ротору, које стварају одговарајуће магнетопобудне силе.

Статорски намотаји имају проводнике смештене у жлебове са унутрашње стране магнетског кола статора, док су проводници роторског намотаја смештени у роторске жлебове, са спољашње стране магнетског кола ротора. Жлебови имају отвор према ваздушном зазору (слика 2.54) тако да су проводници у непосредној близини ваздушног зазора.

У анализи се полази од претпоставке да су проводници распоређени тако да се њихова густина мења простопериодично, то јест, да је број проводника на делу обима $R{\cdot}\Delta\theta$ (слика 2.55) одређен функцијом cos θ. Тада струје намотаја стварају простопериодично расподељени струјни плашт, то јест *синусоидално расподељени струјни плашт*. Уз наведене претпоставке, у оквиру поглавља су изведени изрази за радијалне и тангенцијалне компоненте магнетског поља у ваздушном зазору, дефинисана је магнетопобудна сила намотаја статора и ротора, одређен је флукс кроз контуру једног навојка као и флукс намотаја и дефинисане ознаке за прегледније представљање намотаја, магнетопобудних сила и флуксева. Изведени су изрази за енергију магнетског поља у зазору и за електромагнетски моменат, који је мера механичке интеракције статора и ротора, а потом анализирана веза момента и димензија машине и проучено стварање обртног поља у зазору.

На основу анализе електромоторних сила, образложене су предности простопериодичне (*синусоидалне*) просторне расподеле проводника. Анализа електромоторних сила у концентрисаним намотајима и намотајима са несинусоидалном просторном расподелом проводника спроведена је у одељку *Електромоторне силе индуковане у намотајима*. .

Слика 2.54. Пресек магнетског кола електричне машине. Магнетско коло ротора (A), проводници у жлебовима ротора (B), магнетско коло статора (C), проводници у жлебовима статора (D).

2.18.1 Статорски намотај са расподељеним проводницима

Електричне машине су најчешће цилиндричног облика. Пример попречног пресека цилиндричне машине дат је на слици 2.54. Магнетско коло је најчешће начињено од лимова, како би се умањили губици у гвожђу. Лимови од којих се формирају магнетска кола статора и ротора имају облик приказан на слици 2.54 и слажу се коаксијално. Статор има облик шупљег цилиндра. Ротор има облик пуног цилиндра чији је пречник незнатно мањи од унутрашњег пречника статора. Растојање између статора и ротора δ је реда величине милиметра и назива се ваздушни зазор. Ваздушни зазор је значајно мањи од полупречника роторског цилиндра R, $\delta << R$. Лимови су начињени од гвожђа, феромагнетског материјала чија је пермеабилност много већа од μ_0, тако да је јачина магнетског поља у гвожђу H_{Fe} и до хиљаду пута мања од јачине магнетског поља у ваздушном зазору H_0 па се може занемарити у прорачунима. Стога се вредност сваког криволинијског интеграла магнетског поља у електричној машини своди на суму производа $H_0\delta$ који дају пад *магнетског напона* у ваздушном зазору.

Слика 2.55. Упрошћена представа електричне машине са цилиндричним магнетским колима од феромагнетика бесконачно велике пермеабилности. Сматра се да су проводници на површи која раздваја феромагнетик од ваздушног зазора.

Проводници намотаја статора и ротора постављени су дуж осе цилиндра и налазе се уз површ која дели магнетско коло и ваздушни зазор. Они могу постојати на статору и на ротору. На слици 2.55 приказани су проводници статора. Ознака ⊗ представља проводник у коме постоји струја у смеру од посматрача, док ознака ⊙ представља проводник у коме је струја у смеру ка посматрачу. Пар оваквих проводника повезан на ред представља једну контуру или један навојак. Проводници који творе један навојак најчешће су постављени на дијаметрално супротним локацијама. Већи број навојака чини намотај.

Проводници су постављени по обиму цилиндра тако да се њихова подужна густина (број проводника на јединичној дужини обима $R{\cdot}\Delta\theta$) мења у функцији угла θ на простопериодичан начин ($\cos\theta$). У случајевима када функција $\cos\theta$ сугерише негативан број проводника, подразумева се да је њихов број заправо позитиван, али је зато смер струје у овим проводницима промењен (дијаметрално супротни проводници, означени са ⊗ и ⊙).

Слика 2.56. Простопериодична просторна расподела проводника намотаја статора.

Подужна густина проводника намотаја који је приказан на слици 2.56 може се моделирати функцијом

$$N'_S(\theta) = N'_{S\max} \cdot \cos\theta \tag{2.110}$$

Функција $N_S'(\theta)$ даје број проводника по јединици дужине унутрашњег обима магнетског кола статора. Уколико се посматра врло мали одсечак $\mathrm{d}\theta$, тада је део обима који му одговара једнак $\mathrm{d}l = R\,\mathrm{d}\theta$, док је број проводника обухваћен посматраним одсечком једнак

$$\mathrm{d}N_S = N'_S(\theta)\mathrm{d}l = N'_S(\theta)R\,\mathrm{d}\theta = N'_{S\max} \cdot \cos\theta \cdot R\,\mathrm{d}\theta\,.$$

Имајући у виду пример дат на слици, највећа густина проводника са струјом смера ⊗ има се за $\theta = 0$, и она износи $N_S'(0) = N_{S\max}'$ Највећа густина проводника са струјом супротног смера (⊙) има се за положај $\theta = \pi$. Према слици 2.55, у интервалу од $\theta = -\pi/2$ до $\theta = \pi/2$ налазе се проводници у којима је референтни смер ⊗, док се у интервалу од $\theta = \pi/2$ до $\theta = 3\pi/2$ налазе проводници у којима је референтни смер ⊙.

Један пар дијаметрално супротних проводника (⊗ и ⊙) чини један навојак, односно једну контуру. Посматрани намотај се добија редним везивањем оваквих навојака. Укупан број *навојака* N_N може се одредити збрајањем проводника у којима је референтни смер ⊗, то јест, интеграцијом функције $N_S'(\theta)$ на интервалу од $\theta = -\pi/2$ до $\theta = \pi/2$.

$$N_N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} N_S'(\theta) R \,\mathrm{d}\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} N_{S\max}' \cos\theta \, R \,\mathrm{d}\theta = \tag{2.111}$$

$$= N_{S\max}' R \cdot \sin\theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = 2R \cdot N_{S\max}' .$$

Укупан број *проводника* посматраног намотаја N_P двоструко је већи од броја навојака, тако да је $N_P = 2N_N = 4R\, N_{S\max}'$.

Број проводника се може добити одређивањем интеграла функције $|N_S'(\theta)|$ по обиму машине, то јест на интервалу од $\theta = 0$ до $\theta = 2\pi$. Такав прорачун представља збрајање свих проводника, без обзира на одабрани референтни смер. Интеграцијом апсолутне вредности густине проводника обухваћени су проводници са референтним смером од посматрача (⊗) као и проводници са референтним смером ка посматрачу (⊙).

$$N_P = \int_0^{2\pi} \left| N_S'(\theta) \right| R \,\mathrm{d}\theta = R N_{S\max}' \int_0^{2\pi} \left| \cos\theta \right| \mathrm{d}\theta = 4R N_{S\max}' \tag{2.112}$$

2.18.2 Простопериодично расподељени струјни плашт

Када се у редно повезаним проводницима статорског намотаја успостави струја на унутрашњој површи статорског цилиндра формира се струјни плашт. Смер струја је од посматрача (⊗) на делу обима $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, односно ка посматрачу (⊙) на делу обима $\pi/2 < \theta < 3\pi/2$. Расподела површинских струја се може сагледати на слици 2.55.

Посматрани струјни плашт има подужну густину површинских струја која се мења у зависности од подужне густине проводника. Подужна густина струја струјног плашта на ободу унутрашње стране статорског цилиндра $J_S(\theta)$ је функција угла θ. Она је одређена густином проводника $N_S'(\theta)$ и јачином струје кроз проводнике. Будући да је намотај статора начињен редним везивањем навојака, у свим проводницима намотаја постоји струја исте јачине. Струја у проводницима је одређена референтним сме-

ром, приказаном на слици 2.55, и алгебарским интензитетом $i_1(t)$ који одговара струји на крајевима намотаја. Подужна густина површинских струја одређена је једначином (2.113).

$$J_S(\theta) = N'_S(\theta) \cdot i_1 = \left(N'_{S\max} \cdot i_1\right)\cos\theta . \qquad (2.113)$$

Ако се уведе вредност максималне подужне густине струје

$$J_{S0} = N'_{S\max} \cdot i_1 ,$$

добија се

$$J_S(\theta) = J_{S0}\cos\theta . \qquad (2.114)$$

Уколико се посматра врло мали одсечак $\mathrm{d}\theta$, тада је део обима који му одговара једнак $\mathrm{d}l = R\,\mathrm{d}\theta$, а укупна струја која постоји у посматраном одсечку једнака је

$$\mathrm{d}i = J_S(\theta) R\ \mathrm{d}\theta .$$

Струја у проводницима положеним паралелно са осом цилиндра ствара магнетско поље у машини. Посматрајући граничну површ између ваздушног зазора и магнетског кола начињеног од гвожђа (феромагнетика), - треба уочити да магнетски флукс који из области ваздушног зазора прелази у феромагнетик не мења вредност, тако да су нормалне компоненте магнетске индукције B у ваздуху и феромагнетику једнаке. Будући - да је пермеабилност феромагнетика значајно већа од пермеабилности у ваздуха зазору, оправдано је занемарити поља H_{Fe} у феромагнетику и сматрати да поље H постоји само у ваздушном зазору.

<u>Питање (2.18):</u>

У случају да је струја плашта једнака нули, може ли постојати тангенцијална компонента поља H у ваздуху, уз унутрашњу површ магнетског поља статора?

<u>Одговор (2.18):</u>

Потребно је анализирати магнетско поље у непосредној близини површи која дели ваздушни зазор и магнетско поље статора. У одсуству статорског струјног плашта, тангенцијална компонента магнетског поља у ваздуху мора бити једнака тангенцијалној компоненти поља у гвожђу. Будући да је пермеабилност гвожђа тако велика да се јачина магнетског поља у гвожђу може занемарити, тангенцијална компонента поља H у гвожђу се сматра једнаком нули. Стога је и тангенцијална компонента магнетског поља у ваздуху једнака нули.

2.18.3 Компоненте статорског поља

Потребно је одредити компоненте магнетског поља H које статорски струјни плашт ствара у ваздушном зазору. Зазор је цилиндричног облика, па је погодно усвојити цилиндрични координатни систем. Јединични вектори (ортови) који показују радијални, аксијални (z) и тангенцијални правац цилиндричног координатног система дати су на слици 2.57. Оса (z) је усмерена ка посматрачу (⊙). У погледу означавања појединих компоненти магнетског поља, вектора магнетске индукције и индукованог електричног поља у зазору, усвојено је следеће правило

- Компоненте поља које настају деловањем струја у намотају статора обележавају се ознаком `$S$` (H^S), док се компоненте поља које настају деловањем роторских струја обележавају ознаком `$R$` (H^R).
- Радијалне компоненте поља се означавају индексом `$r$` (H_r), тангенцијалне индексом `$\theta$` (H_θ), док се аксијалне компоненте означавају индексом `$z$` (H_z).

Тако се радијална компонента магнетског поља које ствара намотај статора означава са H_r^S, док се аксијална компонента магнетског поља коју ствара намотај ротора означава са H_z^R.

Слика 2.57. Јединични вектори цилиндричног координатног система. Ортови r_r, r_z и r_θ одређују правац и смер радијалне, аксијалне и тангенцијалне компоненте магнетског поља.

Аксијална компонента поља

У електричним машинама које имају магнетска кола цилиндричног облика и у којима су намотаји постављени тако да су проводници положени паралелно са осом цилиндра, то јест са осом z цилиндричног координатног система, аксијална компонента магнетског поља је једнака нули. Ову тврдњу је могуће доказати увидом у слику 2.58.

Слика 2.58. Попречни пресек (A) и уздужни пресек (B) узане правоугаоне контуре *C* постављене у правцу осе *z*. Ширина *a* контуре EFGH је знатно мања од дужине *L*. Ознаке ⊙ и ⊗ у левом делу слике указују на референтни смер обиласка контуре и не односе се на смер магнетског поља. Референтни смерови магнетског поља су дати на слици 2.57.

На слици је приказан бочни изглед затворене правоугаоне контуре *C*. Две дуже странице правоугаоне контуре су положене у правцу z осе. На пресеку машине, приказаном на слици, положај дужих страница контуре је обележен ознакама ⊙ и ⊗. Једна од две дуже странице контуре пролази кроз магнетко коло статора (⊗), на месту где постоји аксијална компонента магнетског поља у гвожђу, означена са $H_{z(\mathrm{Fe})}$. Друга дужа страница пролази кроз ваздушни зазор (⊙), на месту где постоји аксијална компонента магнетског поља у ваздуху, означена са $H_{z(\mathrm{V})}$. Уз претпоставку да у машини постоје струје у тангенцијалном правцу, оне се могу моделирати површинским или просторно расподељеним струјама густине J_θ, приказаном на слици 2.58. Површински интеграл густине J_θ тангенци-

јалних струја на површи S која се ослања на контуру C једнака је криволинијском интегралу магнетског поља по самој контури. Ако смер обиласка контуре није сагласан са референтним смером за радијалну и z-компоненту поља, величине H_z и H_r под интегралом имају негативан предзнак.

$$\int_S \vec{J}\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_S J_\theta\,\mathrm{d}S = \oint_C \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{l} =$$

$$= \int_{\mathrm{E}}^{\mathrm{F}} H_r\,\mathrm{d}l + \int_{\mathrm{F}}^{\mathrm{G}} \left(-H_{z(\mathrm{Fe})}\right)\mathrm{d}l + \int_{\mathrm{G}}^{\mathrm{H}} \left(-H_r\right)\mathrm{d}l + \int_{\mathrm{H}}^{\mathrm{E}} H_{z(\mathrm{V})}\,\mathrm{d}l$$

Претпоставља се да је контура врло дугачка, док су дуже странице постављене у непосредној близини површи која дели ваздушни зазор од магнетског кола статора. Стога је основано сматрати да су преостале две странице правоугаоне контуре значајно краће. Интеграл радијалне компоненте магнетског поља на страницама контуре EF и GH се могу занемарити, чиме се криволинијски интеграл магнетског поља по контури C своди на интеграл дуж страница контуре FG и HE.

$$\int_S J_\theta\,\mathrm{d}S = \int_{\mathrm{F}}^{\mathrm{G}} \left(-H_{z(\mathrm{Fe})}\right)\mathrm{d}l + \int_{\mathrm{H}}^{\mathrm{E}} H_{z(\mathrm{V})}\,\mathrm{d}l\,.$$

Будући да је пермеабилност гвожђа веома велика, а интензитет магнетске индукције B у гвожђу коначан, јачина магнетског поља $H_{Fe} = B/\mu_{Fe}$ у гвожђу се може сматрати једнаком нули. Стога се криволинијски интеграл магнетског поља по замишљеној контури, приказаној на слици 2.58, своди на интеграл магнетског поља дуж странице HE.

$$\int_S J_\theta\,\mathrm{d}S = \int_{\mathrm{H}}^{\mathrm{E}} H_{z(\mathrm{V})}\,\mathrm{d}l\,. \tag{2.115}$$

Електричне струје у обртним електричним машинама постоје једино у проводницима. Будући да су проводници положени у жлебове и паралелни оси цилиндра, односно z оси, у машини може постојати једино z компонента струје. Стога је густина тангенцијалних струја J_θ једнака нули, па је и вредност интеграла аксијалне компоненте магнетског поља дуж странице HE једнака нули.

У случају да је дужина L релативно мала, тако да нема значајних промена јачине поља $H_{z(\mathrm{V})}$ дуж странице HE, израз (2.115) узима вредност

$$\int_S J_\theta \, \mathrm{d}S = 0 = \int_{\mathrm{H}}^{\mathrm{E}} H_{z(\mathrm{V})} \, \mathrm{d}l \approx H_{z(\mathrm{V})} L \,. \tag{2.116}$$

што показује да је $H_{z(\mathrm{V})}$=0. Став $H_{z(\mathrm{V})}$=0 могуће је доказати и у условима када је дужина L тако велика да није основана тврдња $H_{z(\mathrm{V})}$=const.

Интеграл у оквиру израза (2.115) једнак је нули за произвољан избор тачака H и E, што је могуће имати једино у случају да је јачина аксијалне компоненте магнетског поља у ваздушном зазору $H_{z(\mathrm{V})}$ једнака нули у свим тачкама дуж осе z.

Тврдња да је у посматраној тачки E јачина поља $H_{z(\mathrm{V})}$ = 0 може се доказати полазећи од става да је криволинијски интеграл поља H једнак нули на дужи EH, али и на дужи $\mathrm{E_1H}$, где је тачка $\mathrm{E_1}$ толико блиска тачки E да се поље H_z на растојању $\mathrm{E_1E}$ не мења. Будући да је криволинијски интеграл магнетског поља једнак нули на дужи EH као и на дужи $\mathrm{E_1H}$, следи и то да је исти интеграл има вредност нула и на дужи $\mathrm{E_1E}$. Будући да се поље дуж пута $\mathrm{E_1E}$ не мења, јачина магнетског поља $H_{z(\mathrm{V})}$ у тачки E мора бити једнака нули.

Наведене тврдње важе за произвољан избор тачке E, чиме је показано да је у ваздушном зазору јачина аксијалне компоненте магнетског поља једнака нули.

На крајевима цилиндричне машине, то јест, у зони првог и последњег гвозденог лима у пакету лимова који граде магнетско коло машине, постоји локално расипање флукса у зони ваздушног зазора. Стога се у релативно малим областима изван машине, а у близини ивичних области ваздушног зазора код предње и задње основе цилиндра може јавити аксијална компонента магнетског поља. У оквирима ове књиге, ефекти ивичног расипања, то јест *ефекти крајева* се занемарују. Потребно је напоменути да ефекте ивичног расипања треба размотрити у анализи машина са неуобичајено малом осном дужином L, то јест, код којих је пречник машине $2R$ већи од осне дужине L.

Тангенцијална компонента поља

Циљ анализе која се спроводи у одељку је одређивање тангенцијалне компоненте магнетског поља H_θ^S која постоји у ваздушном зазору и која је последица струја у намотају статора. Посматра се јачина поља у ваздуху, непосредно уз унутрашњу страну статора, то јест, уз граничну површ која дели магнетско коло статора и ваздушни зазор.

Гранични услови за магнетско поље на површи која дели две средине су предмет проучавања електромагнетике. У случају да на граничној површи нема површинских струја, тангенцијалне компоненте вектора H су вектор-

ски једнаке са обе стране површи. Посматрајући површ која дели магнетско коло статора од ваздушног зазора (слика 2.59), може се тврдити да је тангенцијална компонента магнетског поља у гвожђу једнака нули стога што је магнетска индукција у гвожђу коначна, а пермеабилност гвожђа веома велика. Дакле, могуће је закључити да је тангенцијална компонента магнетског поља H_θ^S у ваздуху, уз унутрашњу страну статора, једнака нули у случају када нема струја у намотају статора.

У посматраном примеру анализира се магнетско поље у зазору које настаје услед деловања струја статора. Поред њих, у машини могу постојати и струје ротора. Будући да се у стању $J_S = 0$ уз унутрашњу страну статора има поље $H_\theta^S = 0$, без обзира на јачину роторских струја, може се закључити да струје ротора немају утицаја на тангенцијалну компоненту магнетског поља уз унутрашњу страну статора. Стога тангенцијална компонента магнетског поља уз статор није једнака тангенцијалној компоненти поља уз ротор.

Познато је да у близини равни у којој постоји униформни струјни плашт подужне густине σ постоји магнетско поље једнако $H = \sigma/2$, паралелно са равни и нормално на правац струје. Када струјни плашт постоји у равни која дели феромагнетик врло велике пермеабилности и ваздух, тада се у ваздуху има поље $H = \sigma$. Ова тврдња се може доказати уз помоћ слике 2.59. Слика приказује раван која дели простор испуњен ваздухом (лево) од феромагнетика (десно). У граничној равни постоји униформни струјни плашт подужне густине σ. Затворена контура EFGH има дужину L и ширину a која је знатно мања од дужине. Криволинијски интеграл магнетског поља по затвореној правоугаоној контури једнак је $L\sigma$, збиру свих струја које пролазе кроз контуру. Будући да је магнетско поље у феромагнетику врло мало, то се интеграл дуж странице FG може занемарити. Услед $a \ll L$, интеграл магнетског поља по затвореној контури се своди на производ дужине странице HE и јачине поља H_V. Будући да је $L\sigma = LH_V$, тиме је показано да је јачина поља у ваздуху једнака подужној (линијској) густини струје σ. По аналогији, може се закључити да ће тангенцијална компонента магнетског поља H_θ у ваздушном зазору цилиндричне електричне машине, уз унутрашњу страну статора, бити једнака подужној густини површинских струја статора, док ће поље H_θ уз ротор бити једнако густини струја ротора. Прва од две наведене тврдње ће бити доказана коришћењем слике 2.60.

Потребно је уочити затворену контуру EFGH чије су странице EF и GH врло кратке, док кружни лукови FG и HE имају приближно једнаку дужину $R\Delta\theta$, где је R унутрашњи полупречник статора. Кружни лук HE пролази кроз гвоздено магнетско коло статора, док кружни лук FG пролази кроз ваздух, у непосредној близини унутрашње стране статора.

Криволинијски интеграл магнетског поља по затвореној контури EFGH једнак је збиру свих струја које пролазе кроз површ ослоњену на контуру. У посматраном случају, постоје површинске струје статора са подужном (линијском) густином $J_S(\theta)$. Уколико се посматра релативно узан одсечак, такав да је $\Delta\theta << \pi$, оправдано је сматрати да се подужна густина струје $J_S(\theta)$ не мења дуж кружног лука FG, тако да је криволинијски интеграл магнетског поља по затвореној контури једнак

$$\oint_{EFGHE} \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{l} = \int_{\theta_{FE}}^{\theta_{GH}} J_S(\theta) R\,\mathrm{d}\theta \approx J_S(\theta)\cdot R\cdot\Delta\theta\,. \tag{2.117}$$

Слика 2.59. Јачина магнетског поља у близини граничне равни између феромагнетика и ваздуха једнака је подужној густини површинских струја.

Будући да је јачина магнетског поља у гвожђу врло мала, док су странице EF и GH врло кратке, криволинијски интеграл поља по затвореној контури се своди на интеграл компоненте H_θ^S магнетског поља у ваздуху дуж кружног лука FG. Уз претпоставку $\Delta\theta << \pi$, оправдано је сматрати да се јачина поља H_θ^S не мења дуж посматраног кружног лука, па се интеграл своди на

$$\oint_{EFGHE} \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{l} = \int_{\theta_{FE}}^{\theta_{GH}} H_\theta^S(\theta) R\,\mathrm{d}\theta \approx H_\theta^S(\theta)\cdot R\cdot\Delta\theta\,. \tag{2.118}$$

На основу израза (2.117) и (2.118), тангенцијална компонента магнетског поља у ваздушном зазору, уз унутрашњу површ статора једнака је подужној густини струја струјног плашта статора, то јест

$$H_\theta^S(\theta) = J_S(\theta) = J_{S0}\cos\theta\,. \tag{1.119}$$

Слика 2.60. Одређивање тангенцијалне компоненте магнетског поља у ваздушном зазору, на месту уз површ која раздваја зазор од магнетског кола статора.

Радијална компонента поља

Одређивање радијалне компоненте магнетског поља у ваздушном зазору захтева израчунавање криволинијског интеграла поља у затвореној контури EFGH, приказаној на слици 2.61. Страница EF посматране контуре је положена у радијалном правцу, на положају $\theta = 0$. Она полази из магнетског кола статора, пролази кроз ваздушни зазор у смеру који је супротан од референтног смера за радијалну компоненту поља и завршава у магнетском колу ротора. Страница GH је положена радијално, на положају $\theta = \theta_1$, она полази из магнетског кола ротора, пролази кроз ваздушни зазор у смеру који одговара референтном смеру за радијалну компоненту поља и

завршава у магнетском пољу статора. Контура има и два кружна лука FG и HE, приближно једнаке дужине $R\theta_1$, који пролазе кроз магнетска кола ротора и статора.

Услед врло велике пермеабилности гвожђа, јачина магнетског поља на деловима контуре који се налазе у гвожђу може се занемарити. Стога се може сматрати да магнетско поље постоји искључиво на деловима страница EF и GH који пролазе кроз ваздушни зазор. Посматрани делови страница имају дужину δ која је значајно мања од полупречника машине ($\delta << R$). Зато је оправдано претпоставити да се интензитет радијалне компоненте магнетског поља дуж делова страница EF и GH који леже у зазору не мења. У положају $\theta = 0$, има се $H_r^S(0)$, док се у положају $\theta = \theta_1$ има $H_r^S(\theta_1)$. Уз наведене претпоставке, криволинијски интеграл (циркулација) магнетског поља дуж контуре узима вредност

$$\oint_C \vec{H} d\vec{l} = +\delta \cdot H_r^S(\theta_1) - \delta \cdot H_r^S(0). \tag{2.120}$$

Негативан предзнак који у претходном изразу стоји уз $H_r^S(0)$ јавља се стога што је смер обиласка контуре дуж странице EF супротан од референтног смер за радијалну компоненту магнетског поља у цилиндричном координатном систему.

Циркулација вектора H дуж затворене контуре EFGH једнака је збиру свих струја које пролазе кроз површ ослоњену на контуру, односно, интегралу подужне густине површинских струја $J_S(\theta)$ од положаја $\theta = 0$ до положаја $\theta = \theta_1$. Поређењем слике 2.61 са сликама 2.55 и 2.56 закључује се да у положају $\theta = 0$ постоји највећа подужна густина проводника статорског намотаја, односно највећа подужна густина површинских струја статора. Подужна густина струја статора је одређена једначином (2.114).

$$\int_0^{\theta_1} J_S(\theta) R \, \mathrm{d}\theta = \int_0^{\theta_1} J_{S0} \cos\theta \cdot R \cdot \mathrm{d}\theta = R \cdot J_{S0} \cdot \sin\theta_1. \tag{2.121}$$

У положају θ_1, радијална компонента магнетског поља које постоји у ваздушном зазору услед дејства струја статора једнака је

$$H_r^S(\theta_1) = H_r^S(0) + \frac{J_{S0} R}{\delta} \sin\theta_1. \tag{2.122}$$

Ради израчунавања радијалне компоненте поља, потребно је одредити константу $H_r^S(0)$.

У случају да нема статорских струја ($J_{S0} = 0$), израз (2.122) за интензитет радијалне компоненте магнетског поља се своди на $H_r^S(\theta) = H_r^S(0)$. Уколи-

ко је константа $H_r^S(0)$ позитивна, радијална компонента магнетског поља у ваздушном зазору је непромењива дуж обима машине и има смер од ротора ка статору. Могуће је показати да константа $H_r^S(0)$ мора бити једнака нули.

Слика 2.61. Одређивање радијалне компоненте магнетског поља у ваздушном зазору.

Поље вектора магнетске индукције B није изворно, што значи да излазни флукс вектора на затвореној површи S мора бити једнак нули,

$$\oint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 .$$

Диференцијални облик претходне тврдње гласи

$$\mathrm{div}\, \vec{B} = 0.$$

Дивергенција је просторни извод вектора који се може користити за успостављање везе између површинског интеграла вектора на затвореној површи S са запреминским интегралом просторног извода вектора у домену кога обухвата површ S. Дакле, уколико је позната дивергенција вектора у домену запремине V, обухваћене затвореном површи S, излазни флукс вектора је одређен изразом

$$\oint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \mathrm{div}\,\vec{B} \cdot \mathrm{d}V \,.$$

Као последица нулте вредности дивергенције вектора магнетске индукције, интеграл вектора B на затвореној површи S једнак је нули,

$$\oint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 \tag{2.123}$$

Закон (2.123) се може искористити за доказ нулте вредности константе $H_r^S(0)$. Потребно је уочити затворену површ цилиндричног облика која обухвата ротор, тако да омотач цилиндра пролази кроз ваздушни зазор.

Слика 2.62. Изглед линија магнетског поља које у зони северног магнетског пола ротора излазе из магнетског кола ротора и прелазе у ваздушни зазор.

Затворена цилиндрична површ има предњу основицу, задњу основицу и омотач цилиндра. Једначина (2.116) показује да је аксијална компонента магнетског поља H_z у електричним машинама једнака нули. Као последица, флукс вектора магнетске индукције кроз предњу и задњу основицу затворене цилиндричне површи S једнака је нули. У складу са законом (2.123), нули је једнак и флукс кроз цилиндрични омотач који пролази кроз ваздушни зазор и обухвата ротор.

Релација $B = \mu_0 H$ повезује јачину магнетског поља H и магнетску индукцију у ваздуху. Будући да се пермеабилност μ_0 не мења, флукс вектора H кроз цилиндрични омотач се може одредити дељењем флукса вектора B кроз исту површ. Дакле, излазни флукс вектора магнетског поља кроз цилиндрични омотач који лежи у ваздушном зазору и обухвата ротор једнак је нули. У случају да је $J_{S0} = 0$ и $H_r^S(\theta) = H_r^S(0)$, флукс поља H кроз цилин-

дрични омотач једнак је $2\pi RL\ H_r^S(0)$, где је R полупречник а L дужина машине, чиме је доказано да константа $H_r^S(0)$ у једначини (2.122) мора бити једнака нули.

На слици 2.61, положај θ_1 странице GH контуре EFGH произвољно је одабран. Претходно изведени закључци важе за било који положај θ_1. Стога се може закључити да је радијална компонента магнетског поља које у ваздушном зазору стварају струје статора једнака

$$H_r^S(\theta) = \frac{J_{S0}R}{\delta}\sin\theta\,, \tag{2.124}$$

где променљива θ указује на произвољан положај у зазору у коме се посматра магнетско поље.

<u>Питање (2.19)</u>:

Посматрати затворену површ која једним делом пролази кроз ваздух, док другим делом обухвата феромагнетик као што је гвожђе. Може ли се тврдити да је излазни флукс поља H кроз овакву затворену површ једнак нули? Може ли се тврдити да је излазни флукс индукције B кроз овакву затворену површ једнак нули?

<u>Одговор (2.19):</u>

Према једначини (2.123) излазни флукс вектора магнетске индукције кроз затворену површ S једнак нули. Овај закон важи за хомогене средине, у којима се пермеабилност не мења, али и за средине које имају променљиву пермеабилност, односно, средине које се састоје од делова чије се пермеабилности разликују. Дакле, излазни флукс магнетске индукције једнак је нули и кроз затворену површ која једним делом пролази кроз ваздух а другим делом кроз гвожђе. Једначина (2.123) се може применити и на магнетско поље једино у случају да однос $\mu = B/H$ не мења вредност на целој површи. Уколико површ S пролази кроз разнородне средине, не може се тврдити да ће излазни флукс поља H кроз затворену површ бити једнак нули.

2.18.4 Преглед компоненти магнетског поља статора

Предмет анализе спроведене у претходном одељку је цилиндрична електрична машина са роторским магнетским колом дужине L, пречника $2R$, смештеним у унутрашњост шупљег, цилиндричног магнетског кола статора тако да између ротора и статора постоји ваздушни зазор $\delta << R$.

Анализирано је магнетско поље које у ваздушном зазору ствара статорски намотај са простопериодичном расподелом проводника по обиму. Ус-

постављањем струје i_1 у проводницима намотаја статора, на унутрашњој страни статорског магнетског кола ствара се струјни плашт. Подужна густина површинских струја има простопериодичну промену, једнако као и густина проводника статорског намотаја. Магнетско поље постоји у ваздушном зазору. Услед врло велике пермеабилности гвожђа, оправдано је сматрати да је јачина магнетског поља у гвожђу једнака нули.

У цилиндричном координатном систему, аксијална компонента поља H у ваздушном зазору једнака је нули, док су тангенцијална и радијална компонента дате изразима (2.126) и (2.127) .

$$H_z^S(\theta) = 0 \tag{2.125}$$

$$H_\theta^S(\theta) = J_{S0} R \cdot \cos\theta \tag{2.126}$$

$$H_r^S(\theta) = \frac{J_{S0} R}{\delta} \sin\theta \tag{2.127}$$

Будући да је $\delta << R$, радијална компонента поља је значајно већа од тангенцијалне. Разлика у јачини радијалне и тангенцијалне компоненте магнетског поља је до два реда величине.

<u>Питање (2.20):</u>

Посматрати цилиндричну машину познатих димензија, која на статору има један навојак који чине проводници А1 и А2. Проводник А1 има струју у смеру од посматрача (⊗) и налази се у положају $\theta = 0$. Други проводник статорског намотаја (А2) је на положају $\theta = \pi$, и има струју у супротном смеру (⊙). Проводници А1 и А2 су повезани на ред и прикључени на извор струје I_0. Одредити промену радијалне компоненте магнетског поља $H_r^S(\theta)$ у функцији угла. Уколико се ротор обрће, који облик има електромоторна сила која би се индуковала у једном проводнику постављеном на површ роторског цилиндра у правцу осе машине (аксијално)? Који облик има ова електромоторна сила у случају да је радијална компонента статорског поља простопериодична функција угла?

<u>Одговор (2.20):</u>

Произвољна контура која пролази кроз оба магнетска кола, која обухвата навојак А1-А2 и два пута пролази кроз ваздушни зазор дуж радијуса има циркулацију вектора магнетског поља једнаку I_0. Стога је интензитет радијалне компоненте магнетског поља у зазору једнак $H_m = I_0/(2\delta)$. Дуж једне половине обима, полазећи од проводника А1 и крећући се према проводнику А2 у смеру казаљке на сату, смер магнетског поља је од статора ка ротору, док је у преосталој половини обима смер поља од ротора ка статору. Дакле, промена магнетског поља у зазору се може описати функцијом $H_r^S(\theta) = H_m \operatorname{sgn}(\sin\theta)$. У случају да се ротор обрће брзином Ω, поло-

жај у коме се налази један проводник ротора је $\theta = \theta_0 + \Omega t$. Електромоторна сила индукована у проводнику једнака је $e = LvB$, где је L дужина проводника, $v = R\Omega$ његова периферна брзина, док је $B = \mu_0 H_r^S$ алгебарски интензитет вектора магнетске индукције у околини проводника. Дакле, облик електромоторне силе је одређен обликом функције $H_r^S(\theta) = H_r^S(\theta_0 + \Omega t)$. Уколико поље $H_r^S(\theta)$ има простопериодичну промену, у проводнику ће се индуковати простопериодична електромоторна сила.

2.18.5 Конвенција о представљању поља вектором

Предмет анализе у претходном одељку било је поље које ствара намотај статора. На слици 2.63 су приказане линије радијалног поља које ствара један статорски намотај. Проводници намотаја нису приказани на слици, већ је коришћењем ознака ⊗ и ⊙ назначен смер струје и положај у коме се има максимална подужна густина простопериодично расподељеног струјног плашта. Линије поља приказане на слици одговарају простопериодичној промени јачине магнетског поља H и магнетске индукције B дуж обима машине, у складу са једначином (2.127). Делови унутрашње површи магнетског кола статора у којима постоји највећа густина линија поља означени су као северни (N) и јужни (S) магнетски пол. У зони северног магнетског пола статора линија поља излазе из магнетског кола статора и улазе у ваздушни зазор, док у зони јужног пола линије поља из ваздушног зазора улазе у магнетско коло.

Покушај да се резултантна расподела магнетске индукције која настаје садејством већег броја намотаја прикаже на начин приказан на слици 2.63 резултовао би сликом која није прегледна.

За потребе даљих анализа, магнетско поље једног намотаја машине може се приказати на сажет начин, увођењем *вектора флукса намотаја*. Магнетски флукс је усмерени скалар, али се може представити вектором тако што се скаларној вредности флукса придружи правац и смер. Представљање флукса кроз контуру (навојак) одговарајућим вектором, образложено у одељку 2.13.4, заснива се на одређивању нормале на површ ослоњену на контуру.

Будући да се намотај састоји од већег броја редно везаних контура, где нормале на површ ослоњену на поједине контуре нису колинеарне, јавља се потреба за одређивањем правца и смера флукса намотаја. У случају да је намотај концентрисан, све контуре (навојци) леже у истом положају, тако да су нормале колинеарне и леже на оси намотаја.

Флукс приказан на слици 2.63 је створен струјама у проводницима чија је просторна расподела простопериодична. Пар дијаметрално супротних проводника чини једну контуру, односно један навојак. Нормале на поје-

дине контуре нису колинеарне, али се флукс намотаја може представити вектором који је колинеаран са осом намотаја. Одређивање осе намотаја је описано у одељку 2.15.5. Сажетак начина на који се одређује оса намотаја са просторно расподељеним проводницима дат је у наредном одељку.

Вектор флукса је одређен правцем, смером и амплитудом. Вектор дат у десном делу слике 2.63 представља простопериодичну расподелу магнетске индукције *B* дату у левом делу слике. Правац флукса је одређен линијама поља, које полазе од северног магнетског пола статора (N) и продиру кроз ваздушни зазор, прелазе у магнетско коло ротора, потом по други пут продиру кроз зазор и улазе у магнетско коло статора у зони јужног магнетког пола (S). Смер флукса[14] је одређен смером поља *H*, односно индукције *B*.

[14] Интерпретација магнетског флукса као вектора може се разумети као конвенција и веома погодан инжењерски приступ анализи сложених процеса у електричним машинама. Ипак, магнетски флукс је скалар. Можемо га звати *усмерени скалар*, јер се из његовог знака може репродуковати смер вектора магнетске индукције. Флукс се може упоредити са јачином струје која квалитативно и квантитативно описује појаву организованог кретања наелектрисања. Наредна слика приказује просторне струје које пролазе кроз површ *S*, ослоњену на контуру *c*.

Вектор густине струје *J* даје смер струје *I* кроз контуру, а његов интеграл на површи *S* (то јест флукс) даје јачину струје *I*. У случају да је вектор просторних струја *J* једнаког интензитета и исте оријентације у свим тачкама на површи *S*, јачина струје се може одредити на основу следећег израза

$$I = \int_S \vec{J}\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_S J\cos\left(\vec{J},\vec{n}\right)\mathrm{d}S = J\cos\left(\vec{J},\vec{n}\right)S\,.$$

На линијском проводнику, приказаном на наредној слици, орт нормале на површ *S* еволуира у *референтни смер* за струју, или референтни смер гране електричног кола.

Слика 2.63. Конвенција о представљању магнетског поља и флукса вектором.

Амплитуда вектора флукса Φ_S је површински интеграл вектора магнетске индукције B на површи која се ослања на један навојак у намотају статора. Може се дефинисати и укупни флукс намотаја Ψ_S, који представља збир флуксева у навојцима[15].

На основу знака јачине струје I може се репродуковати смер струје, као и смер вектора густине струје. Стога се за јачину струје може рећи да је *усмерени скалар*. Узимањем вектора магнетске индукције B и магнетског флукса Φ на место вектора просторне густине струје J и јачине струје I, претходна разматрања могу показати да је и магнетски флукс усмерени скалар. Вектор флукса кроз контуру c има оријентацију орта нормале на површ S и алгебарски интензитет одређен интегралом магнетске индукције на површи S.

[15] Укупни флукс Ψ_S статорског намотаја са N_N навојака и са простопериодичном расподелом проводника по обиму статора није једнак $N_N\Phi_S$, зато што флуксеви појединих навојака нису једнаки. Флукс Φ_S у једном навојку (контури) је функција положаја θ.

Питање (2.2.1):

Посматрати слику 2.63, на којој ознаке ⊗ и ⊙ означавају смер струје у проводницима статорског намотаја, који има укупно $2N_N$ проводника са струјом I, који су простопериодично расподељени по обиму машине. Извести израз за максималну вредност радијалне компоненте поља H_r^S које постоји у ваздушном зазору у зони северног и јужног магнетског пола (користити претходно добијене изразе, као и везу максималне подужне густине проводника N_{Smax} и укупног броја проводника, $N_N = 2RN_{Smax}$, $H = N_N I/(2\delta)$. Колика је амплитуда F магнетопобудне силе статора?

Одговор (2.21):

Потребно је одредити криволинијски интеграл поља H по затвореној контури која полази од северног магнетског пола статора, креће се вертикално према јужном магнетском полу, затварајући се потом кроз магнетско коло статора. Циркулација вектора H је $N_N I = 2\delta H$. Јачина магнетског поља једнака је $H = N_N I/(2\delta)$. Магнетопобудна сила F је једнака циркулацији вектора H, $F = N_N I$.

Питање (2.22):

Претпоставити сада да се број статорских проводника и струја статора не мењају, али да су проводници смештени на месту где су на слици 2.63 уцртане ознаке ⊗ и ⊙. Проводници сада нису расподељени по обиму већ концентрисани. Овакав намотај назива се *концентрисаним намотајем*. Колика је у овом случају вредност криволинијског интеграла магнетског поља? Хоће ли се променити максималан интензитет поља H, која се има испод северног и јужног магнетског пола? Колика је амплитуда F магнетопобудне силе статора?

Одговор (2.22):

Јачина магнетског поља H и магнетопобудне силе F су једнаке као и у претходном случају, $H = N_N I/(2\delta)$, $F = N_N I$.

Питање (2.23):

Упоредити расподелу поља $H(\theta)$ у случају када су намотаји расподељени са расподелом која се има за случај да су намотаји концентрисани.

Одговор(2.23):

На основу претходно изведених израза, магнетско поље намотаја са простопериодичном расподелом густине проводника ($\cos\theta$) има простопериодичну расподелу магнетског поља ($\sin\theta$) у ваздушном зазору. У случају да су намотаји концентрисани, радијална компонента магнетског поља $H_r^S(\theta) = H_m \operatorname{sgn}(\sin\theta)$ има константну амплитуду и смер који је у једној половини обима позитиван а у другој негативан. У оба случаја, максималан интензитет поља једнак је $H = N_N I/(2\delta)$.

Питање (2.24):

Одредити флукс кроз контуру који чине два проводника означена на слици 2.63 ознакама ⊗ и ⊙, у случају када се има концентрисани намотај са N_N проводника. Сви проводници посматраног намотаја који имају референтни смер ка посматрачу налазе се у положају који је обележен ознаком ⊙. Преостали проводници, супротног референтног смера су у положају ⊗.

Одговор (2.24):

Потребно је уочити да у посматраном случају магнетско поље у зазору има јачину једнаку $H = +N_N I\ /(2\delta)$ на интервалу $\theta \in [0\ ..\ \pi]$, односно $H = -N_N I\ /(2\delta)$ на интервалу $\theta \in [\pi\ ..\ 2\pi]$. Флукса кроз контуру се добија израчунавањем површинског интеграла магнетске индукције кроз површ ослоњену на контуру. Будући да поље вектора магнетске индукције није изворно (div $B = 0$), у било којој површи која се ослања на контуру има се једнак флукс. Дакле, постоји могућност да се површ одабере на начин који ће резултовати лакшим израчунавањем. За површ која се налази у ваздушном зазору, познат је интензитет магнетске индукције. На интервалу [0 .. π], магнетска индукција у зазору има радијални правац и интензитет $B = +\mu_0 N_N I/(2\delta)$. Површ која се ослања на контуру може бити одређена полукружно савијеним правоугаоником који се ослања на проводник ⊗, пролази кроз ваздушни зазор дуж интервала [0 .. π], и ослања се на проводник ⊙, који се на слици 2.63 налази у положају $\theta = \pi$. Посматрана површ има дужину L, ширину πR и површину $S = L\pi R$. У свим деловима, вектор магнетске индукције је нормалан на површ, тако да је флукс кроз површ, односно флукс кроз контуру једнак $\Phi = BS = \mu_0\, \pi L R\, N_N I\ /(2\delta)$.

Питање (2.25):

Одредити флукс контуре коју чине два проводника означена на слици 2.63 ознакама ⊗ и ⊙, у случају када се има намотај са простопериодичном расподелом проводника.

Одговор (2.25):

Потребно је уочити да је у зони полова, у положајима $\theta = \pi/2$ и $\theta = 3\pi/2$, јачина магнетског поља у ваздушном зазору једнака као и у претходном случају, али је промена јачине поља дуж обима машине одређена функцијом $\sin\theta$. Као и у претходном случају, флукс контуре се може добити израчунавањем површинског интеграла вектора магнетске индукције кроз полукружно савијену правоугаону површ дужине L и ширине πR, која пролази кроз ваздушни зазор и ослања се на проводнике ⊗ и ⊙. Посматрана површ има површину $S = L\pi R$. Флукс кроз контуру је једнак производу $\mu_0 H_{sr} S$, где је H_{sr} средња вредност јачине поља у ваздушном зазору на интервалу $\theta \in [0\ ..\ \pi]$. Однос средње и максималне вредности јачине поља

једнак је средњој вредности функције $\sin(\theta)$ на интервалу од 0 до π, која износи $2/\pi$. Флукс кроз контуру је $\Phi = BS = \mu_0 LR\, N_N I / \delta$.

Питање (2.26):

Користећи резултате добијене решавањем претходна два питања, одговорити како се мења магнетопобудна сила а како флукс контуре претварањем намотаја са концентрисаним проводницима у намотај са простопериодично расподељеним проводницима? Постоје ли разлози који иду у прилог коришћењу намотаја са простопериодично расподељеним проводницима?

Одговор (2.26):

Уколико посматрана два намотаја имају једнаку јачину струје у проводницима и исти број навојака, у оба случаја има се иста максимална вредност јачине магнетског поља у зазору и иста магнетопобудна сила. У случају концентрисаног намотаја, јачина поља задржава исту вредност дуж сваке половине обима, док се код намотаја са расподељеним проводницима јачина поља смањује у складу са функцијом $\sin(\theta)$. Стога је флукс кроз контуру мањи код намотаја са расподељеним проводницима. Однос флуксева који се имају у два посматрана случаја одређен је фактором $2/\pi$. Премда је флукс који се има у случају да постоји простопериодична расподела проводника мањи од флукса који даје концентрисани намотај, постоје разлози који иду у прилог примени намотаја са расподељеним проводницима. У случају да је расподела проводника простопериодична, електромоторна сила индукована у намотају је простопериодична чак и у случају када магнетско поље има сложенопериодичну просторну расподелу са значајним износом виших хармоника. Дакле, намотај са одговарајућом просторном расподелом проводника има улогу филтра. Доказ ове тврдње ће бити изведен у последњим одељцима овог поглавља.

2.18.6 Компоненте роторског поља

Поред статорског намотаја, машина има и намотај на ротору. Ротор може имати више намотаја, али се у даљој анализи посматра ротор са једним намотајем. Проводници посматраног намотаја ротора су уграђени уз површ роторског магнетског кола, непосредно уз ваздушни зазор, на начин приказан на слици 2.64. На слици су проводници са референтним смером од посматрача обележени ознаком $\otimes$, док су проводници са референтним смером ка посматрачу обележени ознаком $\odot$. Један пар дијаметрално супротних проводника ствара једну контуру, односно један навојак роторског намотаја. Редно повезани навојци ротора стварају намотај.

Проводници ротора су постављени по обиму цилиндра тако да се њихова подужна густина мења у функцији угла θ на простопериодичан начин. Функција $N_R^{'}(\theta)$ одређује број проводника ротора на јединичној дужини обима $R{\cdot}\Delta\theta$. Аргумент функције је положај θ, мерен од референтне осе статора, која је обележена ознаком (A) на слици 2.64, и у којој је θ једнако нули. Угао θ_m је означен на слици и представља померај ротора у односу на референтну (хоризонталну) осу статора. Када се ротор обрће константном брзином Ω_m, положај ротора одређен је изразом $\theta_m = \theta_0 + \Omega_m t$, у коме је θ_0 почетни положај. Референтна оса ротора је обележена ознаком (B), и у њој је $\theta = \theta_m$. Произвољан положај (C) је померен за $\theta - \theta_m$ у односу на референтну осу ротора. Будући да се највећа подужна густина роторских проводника $N_{R\max}^{'}$ има у положају $\theta = \theta_m$, простопериодична расподела проводника се може описати функцијом (2.128).

$$N_R'(\theta) = N_{R\max}' \cdot \cos(\theta - \theta_m) \qquad (2.128)$$

Уколико се у намотају ротора има струја i_2, тада је амплитуда простопериодично расподељеног струјног плашта ротора једнака $J_{R0} = N_{R\max}^{'} i_2$.

У случају да у проводницима ротора постоји стална струја $i_2 = I_2$, струјни плашт ротора ће у ваздушном зазору стварати магнетско поље чији је положај одређен положајем ротора. По аналогији са пољем статора датим на слици 2.63, северни магнетски пол ротора биће у положају $\theta = \theta_m + \pi/2$, док ће јачина радијалне компоненте роторског поља у положају $\theta = \theta_m$ бити једнака нули. У случају да ротор мирује, положај магнетских полова ротора се неће мењати. Када се ротор обрће, поље које стварају сталне струје у роторским проводницима обрће се у односу на статор брзином једнаком брзини обртања ротора. Положај северног магнетског пола ротора је тада $\theta = \theta_m + \pi/2 = \theta_0 + \Omega_m t + \pi/2$, где је θ_0 положај ротора у тренутку $t = 0$.

Подужна густина површинских струја ротора дата је функцијом

$$J_R(\theta) = N_R'(\theta) \cdot i_2 = \left(N_{R\max}' \cdot i_2\right)\cos(\theta - \theta_m) = J_{R0}\cos(\theta - \theta_m) \qquad (2.129)$$

где је $J_{R0} = N_{R\max}^{'} i_2$ максимална вредност подужне густине струје роторског струјног плашта.

У оквиру одељка 2.18.3, анализиране су компоненте магнетског поља које у ваздушном зазору ствара расподељени намотај статора. На истоветан начин, потребно је одредити аксијалну, тангенцијалну и радијалну компоненту магнетског поља које у ваздушном зазору ствара роторски расподељени намотај. Зазор је цилиндричног облика, па је погодно усвојити јединичне векторе цилиндричног координатног система. Оса (z) је усмерена ка посматрачу ($\odot$), док су радијални и тангенцијални правац за

положај θ приказани на слици 2.64. На основу усвојених правила за означавање компоненти поља, аксијална, тангенцијална и радијална компонента магнетског поља које стварају роторске струје се обележавају ознакама H_z^R, H_θ^R, и H_r^R.

Слика 2.64. Роторски струјни плашт је померен у односу на статор за θ_m. Максимална густина проводника ротора има се у положају $\theta = \theta_m$.

<u>Питање (2.27):</u>

Проводници статора и ротора уграђују се тако да леже у непосредној близини ваздушног зазора. Које негативне ефекте би имала уградња проводника ротора дубље у магнетско коло, на већој удаљености од ваздушног зазора?

<u>Одговор (2.27):</u>

Линије магнетског поља проводника који је уграђен у унутрашњост магнетског кола ротора имају тенденцију да се затворе кроз феромагнетик, где је магнетска отпорност мања. Уколико је проводник уграђен дубоко у магнетском колу, на великој удаљености од зазора, магнетско поље ротора ће постојати углавном у магнетском колу ротора, и неће допирати до ва-

здушног зазора нити до навојака статора. Стога ће изостати магнетска спрега између намотаја статора и ротора, неопходна за електромеханичко претварање. С друге стране, полагањем проводника у жлебове, у непосредној близини ваздушног зазора, магнетско поље проводника ротора пролази кроз ваздушни зазор и обухвата проводнике статора.

Аксијална компонента поља

У одељку 2.18.3 доказано је да је аксијална компонента магнетског поља једнака нули у цилиндричним машинама са проводницима постављеним паралелно са осом цилиндра. Будући да електричне струје постоје у проводницима положеним дуж осе z цилиндричног координатног система, не постоје струје у тангенцијалном правцу. Као последица, аксијална компонента магнетског поља у ваздушном зазору једнака је нули. Анализа циркулације поља дуж контуре приказане на слици 2.58 доказује да је аксијална компонента поља у зазору једнака нули без обзира на присуство струја у проводницима статора или ротора.

Тангенцијална компонента поља

При одређивању тангенцијалне компоненте магнетског поља H_θ^R која постоји у ваздушном зазору као последица струја у проводницима ротора, посматра се јачина поља у ваздуху непосредно уз ротор, то јест, уз граничну површ која дели магнетско коло ротора и ваздушни зазор.

Анализа циркулације вектора магнетског поља по контури приказаној на слици 2.59, показано је да је јачина магнетског поља у близини граничне равни између феромагнетика и ваздуха једнака подужној густини површинских струја које постоје у граничној равни. Стога се може тврдити да је јачина поља H_θ^R одређена подужном густином струје $J_R(\theta)$. Исказана тврдња ће бити доказана коришћењем примера датог на слици 2.65.

Треба уочити затворену контуру EFGH чије су радијално постављене странице EF и GH врло кратке, док кружни лукови FG и HE имају приближно једнаку дужину $R\Delta\theta$, где је R полупречник ротора. Кружни лук FG пролази кроз гвоздено магнетско коло, док кружни лук HE пролази кроз ваздух, у непосредној близини ротора. Циркулација вектора магнетског поља по затвореној контури EFGH једнак је збиру свих струја које пролазе кроз површ ослоњену на контуру. У посматраном случају, постоје површинске струје ротора, подужне густине $J_R(\theta)$. Уколико је $\Delta\theta << \pi$, оправдано је сматрати да се подужна густина струје не мења дуж кружног лука HE, тако да је криволинијски интеграл магнетског поља по затвореној контури једнак производу $J_R(\theta)$ и дужине лука HE, према једначини (2.130).

$$\oint_{EFGHE} \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{l} = \int_{\theta_{GH}}^{\theta_{FE}} J_R(\theta) R\,\mathrm{d}\theta \approx J_R(\theta)\cdot R\cdot \Delta\theta\,. \tag{2.130}$$

Будући да су странице EF и GH врло кратке док је јачина магнетског поља у гвожђу врло мала, криволинијски интеграл поља по затвореној контури се своди на интеграл компоненте H_θ^S магнетског поља у ваздуху дуж кружног лука HE. Уз претпоставку $\Delta\theta << \pi$, оправдано је сматрати да се јачина поља H_θ^R не мења дуж посматраног кружног лука, па се интеграл своди на

$$\oint_{EFGHE} \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{l} = \int_{H}^{E} H_\theta^R(\theta)\,\mathrm{d}l = \int_{\theta_{GH}}^{\theta_{FE}} H_\theta^R(\theta) R(-\mathrm{d}\theta) \approx -H_\theta^R(\theta)\cdot R\cdot \Delta\theta\,. \tag{2.131}$$

Слика 2.65. Одређивање тангенцијалне компоненте магнетског поља у ваздушном зазору, у непосредној близини ротора. Магнетско поље је последица струја у проводницима ротора.

Смер тангенцијалне компоненте магнетског поља H_θ^R, која постоји у ваздушном зазору уз површину ротора, супротан је од референтног смера за тангенцијални правац цилиндричног координатног система, и супротан од

смера тангенцијалне компоненте статорског поља. Стога се у једначини (2.131) јавља знак минус.

На основу израза (2.130) и (2.131) компонента магнетског поља H_θ^R уз површ ротора једнака је подужној густини струја струјног плашта ротора, то јест

$$H_\theta^R(\theta) = -J_R(\theta) = -J_{R0}\cos(\theta - \theta_m). \tag{2.132}$$

Радијална компонента поља

Радијална компонента магнетског поља коју у ваздушном зазору стварају струје у проводницима ротора може се одредити израчунавањем криволинијског интеграла поља у затвореној контури EFGH, приказаној на слици 2.66. Страница EF посматране контуре је положена у радијалном правцу, на положају $\theta = \theta_m$, у области где постоји највећа густина проводника ротора оријентисаних у смеру од посматрача. Положај θ_m представља померај ротора у односу на референтну осу статора. Страница EF полази из магнетског кола статора, пролази кроз ваздушни зазор у смеру супротном од референтног и завршава у магнетском колу ротора. Страница GH је положена радијално, на положају $\theta = \theta_1$. Она полази из магнетског кола ротора, пролази кроз ваздушни зазор у смеру који одговара референтном смеру за радијалну компоненту поља и завршава у магнетском пољу статора. Контура има и два кружна лука FG и HE, приближно једнаке дужине $R(\theta_1\text{-}\theta_m)$, који пролазе кроз магнетска кола ротора и статора. Будући да је јачина магнетског поља у гвожђу врло мала, може се сматрати да магнетско поље постоји искључиво на деловима страница EF и GH који пролазе кроз ваздушни зазор, који имају дужину значајно мању од полупречника машине ($\delta << R$). Стога је оправдано претпоставити да се интензитет радијалне компоненте магнетског поља дуж делова страница EF и GH који леже у зазору не мења. Уз наведене претпоставке, циркулација магнетског поља дуж контуре узима вредност

$$\oint_C \vec{H}d\vec{l} = +\delta \cdot H_r^R(\theta_1) - \delta \cdot H_r^R(\theta_m). \tag{2.133}$$

Циркулација вектора магнетског поља једнака је збиру свих струја које пролазе кроз површ ослоњену на контуру. У случају контуре која је приказана на слици 2.66, струје кроз контуру се одређују израчунавањем интеграла подужне густине површинских струја $J_R(\theta)$ од положаја $\theta = \theta_m$ до положаја $\theta = \theta_1$.

$$\int_{\theta_m}^{\theta_1} J_R(\theta) R \,\mathrm{d}\theta = \int_{\theta_m}^{\theta_1} J_{R0} \cos(\theta - \theta_m) \cdot R \cdot \mathrm{d}\theta = R \cdot J_{S0} \cdot \sin(\theta_1 - \theta_m). \tag{2.134}$$

Слика 2.66. Одређивање радијалне компоненте магнетског поља роторских проводника. Положај θ_m одговара референтној оси ротора, док θ_1 представља произвољни положај у коме се одређује радијална компонента магнетског поља ротора.

У положају θ_1, радијална компонента магнетског поља које постоји у ваздушном зазору услед дејства струја ротора једнака је

$$H_r^R(\theta_1) = H_r^R(\theta_m) + \frac{J_{R0} R}{\delta} \sin(\theta_1 - \theta_m). \tag{2.135}$$

Ради израчунавања радијалне компоненте поља, потребно је одредити константу $H_r^R(\theta_m)$. У одељку 2.18.3, где је спроведен прорачун радијалне компоненте магнетског поља статора, доказано је да средња вредност радијалне компоненте поља $H(\theta)$ у ваздушном зазору мора бити једнака нули. Доказ је заснован на томе да поље вектора магнетске индукције није изворно (div B = 0). Као последица, константа $H_r^R(\theta_m)$ у једначини (2.135) мора бити једнака нули. Будући да је положај θ_1 могуће одабрати произвољно, коначан израз за радијалну компоненту магнетског поља ротора узима облик

$$H_r^R(\theta) = \frac{J_{R0}R}{\delta}\sin(\theta - \theta_m). \tag{2.136}$$

Преглед компоненти магнетског поља ротора

Предмет анализе спроведене у претходном одељку је магнетско поље које у ваздушном зазору ствара намотај ротора чији су проводници простопериодично расподељени по обиму машине, тако да имају највећу густину у положају θ_m, који је усвојен за референтну осу ротора. Успостављањем струје i_2 у проводницима ротора, на спољашњој површи роторског магнетског кола ствара се струјни плашт $J_R(\theta)$. Подужна густина површинских струја има простопериодичну промену, једнако као и густина проводника ротора. Магнетско поље постоји у ваздушном зазору, док је јачина поља у гвожђу врло мала услед велике пермеабилности гвожђа. У цилиндричном координатном систему, аксијална компонента поља H у ваздушном зазору једнака је нули, док су тангенцијална и радијална компонента одређене изразима (2.138) и (2.139)

$$H_z^R(\theta) = 0. \tag{2.137}$$

$$H_\theta^R(\theta) = -J_R(\theta) = -J_{R0}\cos(\theta - \theta_m) \tag{2.138}$$

$$H_r^R(\theta) = \frac{J_{R0}R}{\delta}\sin(\theta - \theta_m) \tag{2.139}$$

Ваздушни зазор δ је значајно мањи од полупречника машине R, тако да је радијална компонента поља значајно већа од тангенцијалне.

<u>Питање (2.28):</u>

Посматрати цилиндричну машину познатих димензија, која има једнак број проводника статора и ротора. Познато је да наспрам сваког статорског проводника са струјом смера ⊗, са друге стране зазора стоји роторски проводник са струјом супротног смера ⊙. Одредити магнетско поље које ће постојати у зазору.

<u>Одговор (2.28):</u>

Будући да је ваздушни зазор δ врло мали ($\delta << R$), наспрамни проводници статора и ротора се налазе у непосредној близини. На растојању δ од сваког статорског проводника са струјом смера ⊗ налази се роторски проводник са струјом супротног смера ⊙. Стога је циркулација вектора магнетског поља по контури EFGH, приказаној на слици 2.66, једнака нули, па тако и радијална компонента поља. У погледу тангенцијалне компонен-

те поља, потребно је уочити да супротан смер струје у наспрамном проводницима статора и ротора доводи до сабирања одговарајућих тангенцијалних компоненти вектора H, тако да ће у зазору постојати магнетско поље у тангенцијалном правцу.

2.18.7 Конвенција о представљању поља вектором

У претходном одељку, предмет анализе било је поље које ствара намотај ротора чији су проводници простопериодично расподељени дуж обима машине. У левом делу слике 2.67 су приказане линије радијалног поља које ствара роторски намотај. Ознаке ⊗ и ⊙ показују положаје у којима постоји максимална густина роторских проводника, и који одређују референтну осу ротора θ_m. У истим положајима има се максимална подужна густина простопериодично расподељеног струјног плашта. Линије поља приказане на слици одговарају простопериодичној промени јачине магнетског поља H и магнетске индукције B дуж обима машине. Део површи магнетског кола ротора у коме постоји највећа густина линија поља у смеру из магнетског кола према ваздушном зазору означен је као северни (N) магнетски пол. На сличан начин се одређује и означава јужни магнетски пол (S).

Слика 2.67. Конвенција о векторској представи магнетског поља и флукса које стварају струје у проводницима ротора.

У претходном одељку, предмет анализе било је поље које ствара намотај ротора чији су проводници простопериодично расподељени дуж обима машине. У левом делу слике 2.67 су приказане линије радијалног поља које ствара роторски намотај. Ознаке ⊗ и ⊙ показују положаје у којима по-

стоји максимална густина роторских проводника, и који одређују референтну осу ротора θ_m. У истим положајима има се максимална подужна густина простопериодично расподељеног струјног плашта. Линије поља приказане на слици одговарају простопериодичној промени јачине магнетског поља H и магнетске индукције B дуж обима машине. Део површи магнетског кола ротора у коме постоји највећа густина линија поља у смеру из магнетског кола према ваздушном зазору означен је као северни (N) магнетски пол. На сличан начин се одређује и означава јужни магнетски пол (S).

Магнетско поље роторског намотаја може се приказати на сажет начин, увођењем *вектора роторског флукса*. Премда је флукс усмерени скалар, могуће је представити га вектором тако што се скаларној вредности придружи правац и смер.

Вектор флукса је одређен правцем, смером и амплитудом. Вектор Φ_R, дат у десном делу слике 2.67, представља простопериодичну расподелу магнетске индукције B представљене у левом делу слике. Правац вектора флукса одређен је линијама поља, односно положајем магнетских полова ротора. Вектор флукса је усмерен у складу са смером линија поља H, односно индукције B. Амплитуда вектора флукса Φ_R је површински интеграл вектора магнетске индукције по површи која се ослања на репрезентативни навојак ротора. Алтернативно, може се дефинисати флукс Ψ_R, који представља укупни флукс намотаја, који зависи од броја навојака у роторском намотају.

Питање (2.29):

Посматрати леви део слике 2.67 и уочити уцртане роторске проводнике који формирају једну контуру (навојак) ротора. Претпоставити сада да су проводници померени за неколико милиметара и смештени са друге стране ваздушног зазора, приљубљени уз магнетско коло статора. При томе се јачина и смер струје у њима не мењају. На описани начин се добија једна контура/навојак статора. Како су проводници ⊗ и ⊙ сада на површи магнетског кола статора, магнетско поље које се јавља као последица постојања струје у проводницима тада постаје статорско поље. Скицирати линије поља и упоредити их са линијама које постоје на слици лево. Означити положај северног и јужног магнетског пола статорског флукса који стварају ови проводници.

Одговор (2.29):

Радијална компонента магнетског поља у зазору се неће променити измештањем проводника. Промениће се смер тангенцијалне компоненте поља. Будући да је радијална компонента поља вишеструко већег интензитета, може се закључити да измештање проводника неће имати утицај на об-

лик линија поља. Посматрајући слику 2.67, северни пол статора се налази наспрам јужног пола ротора.

2.18.8 Интеракција статорског и роторског поља

Електричне машине најчешће имају намотаје и на статору и на ротору. Струје намотаја стварају статорски и роторски флукс. Постоје и машине које уместо статорског или роторског намотаја имају стални магнет. Магнетско поље у ваздушном зазору има радијалну и тангенцијалну компоненту. Радијална компонента магнетског поља је R/δ пута већа од тангенцијалне. Она одређује просторну расподелу магнетске енергије поља као и правац и смер линија поља.

Слика 2.68. Магнетска поља статора и ротора.

Приказ статорског и роторског поља може се добити суперпозицијом поља статора и ротора, чије су линије приказане на слици 2.68. На слици је дат правац и смер магнетских поља статора и ротора. Претпоставља се да намотај статора има већи број простопериодично расподељених проводника. Ради прегледности, на слици 2.68 је приказан мањи број проводника који означавају расподељени намотај. Проводници S1 и S2 статорског намотаја леже у положају са највећом густином проводника. Нормала на контуру S1-S2 је уједно и оса статорског намотаја. На исти начин, оса роторског намотаја је одређена нормалом на контуру R1-R2.

На слици 2.68, правац статорског поља и статорског флукса одређен је нормалом n_S на контуру S1-S2. Нормала лежи у правцу помереном за $\pi/2$ у односу на положај θ=0, у коме постоји максимална густина проводника статора. Правац роторског поља и роторског флукса одређен је нормалом n_R на контуру R1-R2, која лежи у правцу помереном за $\pi/2$ у односу на положај $\theta=\theta_m$, у коме постоји максимална густина проводника ротора. Стога је правац роторског флукса померен за $\theta_m + \pi/2$ у односу на положај θ=0. Када у проводницима статора и ротора постоје сталне струје, вектор статорског флукса је непомичан, док је положај роторског флукса одређен положајем ротора. У том случају обртање ротора доводи до промене угла $\Delta\theta = -\theta_m$ између два вектора флукса. Међутим, ако уместо једног намотаја са сталним струјама постоје два или више намотаја са наизменичним струјама, угао $\Delta\theta$ између вектора статорског и роторског флукса може се разликовати од $-\theta_m$. На слици 2.53 дат је пример у коме два статорска намотаја са простопериодичним струјама стварају обртно магнетско поље. Положај вектора флукса као и угао $\Delta\theta$ у том случају зависе од положаја ротора, али и од тренутних вредности струје у намотајима.

Слика 2.69. Међусобни положај вектора статорског и роторског флукса.

Приказ и даља анализа су олакшани векторском представом статорског и роторског поља, на начин приказан на слици 2.69. Поље вектора магнетске индукције се може представити вектором флукса, у складу са закључцима датим у одељку 2.13.4, одељку 2.15.5, као одељку 2.18.5, у коме је дата конвенција о представљању магнетског поља вектором. *Вектор флукса* навојка се добија тако што се скалару Φ придружи правац и смер орта нормале на површ S, која се ослања на навојак. проводника. Слика 2.69 приказује вектор флукса кроз контуру S1-S2 и вектор флукса кроз контуру

R1-R2. Ради се о векторима који представљају магнетска поља статора и ротора приказана на слици 2.68. Скаларна вредност Φ_S је флукс кроз контуру одређену проводницима статора S1-S2, положеном у зони максималне густине проводника статора. Вектор Φ_S има правац и смер нормале на површ одређену контуром S1-S2. На истоветан начин, скаларна вредност Φ_R је флукс кроз контуру одређену проводницима ротора R1-R2, положеном у зони максималне густине проводника ротора. Вектор флукса ротора има правац и смер нормале на површ одређену контуром R1-R2.

Садејством магнетских поља статора и ротора ствара се електромагнетски моменат, који је мера механичке интеракције статора и ротора. Будући да се ротор може кретати, добијени моменат може довести ротор у обртно кретање или проузроковати промену брзине обртања. Моменат се јавља услед интеракције статорског и роторског магнетског поља, па се стога назива електромагнетским моментом, M_{em}. Имајући у виду чињеницу да се различити магнетски полови привлаче, може се закључити да ће постојати моменат који тежи да покрене ротор тако да северни пол роторског флукса дође наспрам јужног пола статора, односно, да вектори статорског и роторског флукса дођу у исти положај. Дакле, електромагнетски моменат је резултат интеракција статорског и роторског поља и може се одредити из векторског производа статорског и роторског флукса.

Питање (2.30):

Претпоставити да се статорски магнетски полови не могу померати у односу на статор. Поред тога, претпоставити и да се роторски полови не могу померати у односу на ротор. Уколико се ротор обрће константном брзином, какав ће бити моменат који делује на ротор?

Одговор (2.30):

У посматраном случају угао $\Delta\theta$ између вектора флукса статора и ротора једнак је померају θ_m. Ако се ротор обрће, створени електромагнетски моменат се простопериодично мења.

2.18.9 Енергија магнетског поља у зазору

Од интереса је одредити електромагнетски моменат који делује на ротор и статор цилиндричне машине. Моменат се може одредити као извод енергије спрежног поља по угаоном померају ротора θ_m. На основу једначина у одељку 2.16.9, прираштај механичког рада $\mathrm{d}W_{meh} = M_{em}\cdot\mathrm{d}\theta_m$ је једнак прираштају енергије магнетског поља $\mathrm{d}W_m$, тако да је моменат могуће одредити као први извод енергије магнетског поља по померају ротора θ_m. Стога је потребно одредити функцију промене енергије магнетског поља у зависности од положаја ротора, $W_m(\theta_m)$.

Енергија магнетског поља се одређује израчунавањем интеграла просторне густине енергије w_m у целом домену у коме постоји поље. Просторна густина енергије w_m се изражава у J/m^3 и представља енергију која је садржана у јединичној запремини тако да је $w_m = \Delta W_m/\Delta V = \mathrm{d}W_m/\mathrm{d}V$. Израз $w_m = ½\ \mu H^2$ одређује густину енергије поља у линеарној средини, тако да је у ваздушном зазору $w_m = ½\ \mu_0 H^2$.

Магнетско поље постоји у деловима магнетских кола статора и ротора који су начињени од гвожђа, као и у ваздушном зазору. Будући да магнетска индукција B има једнаку вредност у зазору и гвожђу, при чему је пермеабилност гвозденог језгра μ_{Fe} неколико редова величине већа од пермеабилности ваздуха μ_o, то се јачина поља у гвожђу H_{Fe} и одговарајућа енергија поља могу занемарити. На тај начин, укупна енергија спрежног магнетског поља може се одредити интеграцијом просторне густине енергије магнетског поља (специфичне енергије) у целом домену ваздушног зазора.

У изразу за просторну густину поља у ваздушном зазору

$$w_m = \frac{1}{2}\mu_0 H^2 ,$$

ознака H представља јачину резултантног магнетског поља у ваздушном зазору, то јест збир статорског и роторског поља. Пошто су тангенцијалне компоненте поља занемариве, јачина резултантног магнетског поља у ваздушном зазору једнака је збиру радијалних компоненти статорског и роторског поља, па израз за густину енергије поља добија облик

$$w_m = \frac{1}{2}\mu_0 \left(H_r^S + H_r^R\right)^2 .$$

Коришћењем једначина (2.127) и (2.132), које дају јачину радијалне компоненте поља статора и ротора у ваздушном зазору при углу θ, добија се функција која одређује промену просторне густине енергије магнетског поља у функцији угла θ,

$$w_m(\theta) = \frac{\mu_0}{2}\left(\frac{R}{\delta}\right)^2 \left[J_{R0}\sin(\theta - \theta_m) + J_{S0}\sin\theta\right] \tag{2.140}$$

Укупна енергија магнетског поља дата је изразом

$$W_m = \int_V w_m(\theta)\mathrm{d}V ,$$

где је V укупна запремина ваздушног зазора. Пошто се елементарна запремина dV добија као

$$\mathrm{d}V = L \cdot \delta \cdot R \cdot \mathrm{d}\theta ,$$

укупна енергија магнетског поља у електричној машини цилиндричног облика, дужине L, полупречника R и ваздушног зазора δ добија се израчунавањем интеграла

$$W_m = L\delta R \int_0^{2\pi} w_m(\theta)\mathrm{d}\theta \tag{2.141}$$

Увођењем смене (2.140) у израз (2.141), добија се израз

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{\mu_0 R^3 L}{2\delta} \left[\int_0^{2\pi} J_{R0}^2 \sin^2(\theta - \theta_m)\mathrm{d}\theta + \right. \\ &\left. + \int_0^{2\pi} J_{S0}^2 \sin^2(\theta)\mathrm{d}\theta + \int_0^{2\pi} 2 J_{R0} J_{S0} \sin(\theta - \theta_m)\sin(\theta)\mathrm{d}\theta \right] = \\ &= \frac{\mu_0 R^3 L}{2\delta} \left[J_{R0}^2 I_1 + J_{S0}^2 I_2 + 2 J_{R0} J_{S0} I_3 \right], \end{aligned} \tag{2.142}$$

у коме J_{R0} представља максималну вредност подужне густине струје у роторском струјном плашту, док J_{S0} представља одговарајућу величину статорског струјног плашта. Одређивање вредности израза (2.142) захтева решавање три одређена интеграла са тригонометријским подинтегралним функцијама, I_1, I_2 и I_3. Будући да је

$$\sin^2\theta = \frac{1}{2}\left[1 - \cos(2\theta)\right], \quad \sin^2(\theta - \theta_m) = \frac{1}{2}\left[1 - \cos(2\theta - 2\theta_m)\right],$$

два интеграла узимају вредност

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{2\pi} \sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left[1 - \cos(2\theta)\right]\mathrm{d}\theta = \pi, \\ I_2 &= \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta - \theta_m)\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left[1 - \cos(2\theta - 2\theta_m)\right]\mathrm{d}\theta = \pi. \end{aligned}$$

Коришћењем једнакости

$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)],$$

добија се да је подинтегрална функција трећег интеграла једнака

$$\sin(\theta-\theta_m)\sin(\theta) = \frac{1}{2}[\cos(-\theta_m)-\cos(2\theta-\theta_m)],$$

тако да је одређени интеграл у границама од 0 до 2π једнак

$$I_3 = \int_0^{2\pi}\sin(\theta-\theta_m)\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}[\cos(-\theta_m)-\cos(2\theta-\theta_m)]\,\mathrm{d}\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\cos\theta_m\,\mathrm{d}\theta + \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\cos(2\theta-\theta_m)\,\mathrm{d}\theta = \pi\cos\theta_m.$$

Коначно, израз за енергију магнетског поља добија облик

$$W_m = \frac{\mu_0 R^3 L\pi}{2\delta}\left[J_{R0}^2 + J_{S0}^2 + 2J_{R0}J_{S0}\cos\theta_m\right] \tag{2.143}$$

У посматраном случају, полази се од претпоставке да у намотају статора и намотају ротора постоје сталне струје, тако да је угао $\Delta\theta$ између вектора статорског и роторског флукса једнак $-\theta_m$. На основу једначине (2.143), енергија магнетског поља је највећа у случају да се вектор статорског флукса поклапа са вектором роторског флукса, односно да је $\Delta\theta = \theta_m = 0$.

У општем случају, на статору и/или ротору може бити више намотаја чије су осе просторно померене. Простопериодичне струје одговарајуће амплитуде, учестаности и почетне фазе могу створити резултантну магнетопобудну силу и флукс који се могу представити обртним векторима. Један од начина на који систем намотаја са простопериодичним струјама може створити обртно магнетско поље дат је на слици 2.53. Код машина које на статору и/или ротору имају наизменичне струје, угао који постоји између вектора статорског флукса и вектора роторског флукса није једнозначно одређен положајем ротора, већ зависи и од тренутних вредности струја у појединим намотајима. Стога се не може узети да је $\Delta\theta = -\theta_m$, што је случај за систем са сталним струјама дат на слици 2.68. У општем случају, израз за укупну енергију магнетског поља добија облик

$$W_m = \frac{\mu_0 R^3 L \pi}{2\delta} \left[J_{R0}^2 + J_{S0}^2 + 2 J_{R0} J_{S0} \cos(\Delta\theta) \right]. \tag{2.144}$$

где је $\Delta\theta$ угао између вектора статорског и роторског флукса.

2.18.10 Електромагнетски моменат

Енергија магнетског поља електричне машине приказане на слици 2.68 дата је изразом (2.143). Посматрана машина има један расподељени намотај на статору и један расподељени намотај на ротору. У намотајима постоје сталне струје. Коришћењем израза за енергију поља могуће је одредити електромагнетски моменат.

Електромагнетски моменат је мера механичке интеракције статора и ротора. У условима када је статор учвршћен и непокретан, моменат делује на ротор. Угао θ_m означава померај ротора у односу на статор. У датим условима, угао θ_m одређује и померај између оса два намотаја, као и угао $\Delta\theta$ између вектора флукса статора и вектора флукса ротора. Израз за моменат M_{em} = +dW_m/dθ_m има позитиван предзнак стога што се посматра електромеханички претварач са спрегнутим намотајима код кога су извори прикључени. Наиме, претпостављено је да је у статорским и роторским проводницима струја константна, што се остварује тако што крајеве намотаја статора и ротора прикључимо на одговарајуће струјне изворе. Будући да се у случају са прикљученим изворима моменат одређује на основу извода енергије поља по померају, израз за електромагнетски моменат добија облик

$$M = +\frac{\mathrm{d}W_m}{\mathrm{d}\theta_m} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta_m} \left\{ \frac{\mu_0 R^3 L \pi}{2\delta} \left[J_{R0}^2 + J_{S0}^2 + 2 J_{R0} J_{S0} \cos\theta_m \right] \right\}$$

односно

$$M = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta_m} \left\{ \frac{\mu_0 R^3 L J_{R0} J_{S0}}{\delta} \pi \cos\theta_m \right\} \tag{2.145}$$

Вредност момента, дата изразом (2.146), пропорционална је четвртом степену димензија машине и обрнуто пропорционална ваздушном зазору δ.

$$M = -\frac{\mu_0 \pi R^3 L}{\delta} J_{R0} J_{S0} \sin\theta_m \tag{2.146}$$

Знак добијеног момента је негативан. Ово значи да моменат делује у смеру супротном од референтног. Код приказа попречног пресека машине у цилиндричном координатном систему, као што је дат на претходним странама, z оса је оријентисана ка посматрачу (⊙). Моменат представљен вектором колинеараним са z осом поспешује обртно кретање супротно од смера казаљке на часовнику. Када моменат има негативан предзнак, тада он поспешује обртно кретање у смеру казаљке. У посматраном случају, управо такав моменат делује на ротор, тежећи да доведе разнородне полове статора и ротора једне наспрам других.

Моменат је пропорционалан производу амплитуда статорског и роторског струјног плашта као и синусу угаоног померајa између оса намотаја статора и ротора (θ_m). У посматраном случају су струје у статорском и роторском намотају непромењиве (једносмерне), па је положај статорског флукса Φ_S одређен положајем статора. Другим речима, флукс статора је непомичан док је положај роторског флукса Φ_R одређен померајем ротора. Дакле, вектори статорског и роторског флукса образују угао θ_m. Моменат је пропорционалан синусу угла између два флукса, па постоји основ за тврдњу да је вектор момента могуће изразити преко векторског производа флукса статора и флукса ротора, што ће бити доказано у наредним одељцима.

Питање (2.31):

Претпоставити да се ротор обрће константном брзином. Колика је средња вредност момента у случају да су у статору и ротору сталне струје?

Одговор (2.31):

Електромагнетски моменат је простопериодична функција угла између вектора флуксева статора и ротора. У случају када нема промене релативног положаја два флукса, постоје услови за стварање момента чија је средња вредност различита од нуле. Уколико се угао између два флукса непрекидно мења, електромагнетски моменат је простопериодична функција времена па је тада средња вредност момента једнака нули. У намотајима постоје сталне струје, па је положај сваког од флуксева одређен положајем статора, односно ротора. Будући да се ротор обрће, то ће се и флукс ротора обртати у односу на статор, па је средња вредност момента једнака нули.

Израз електромагнетски моменат

Једначина (2.146) даје електромагнетски моменат који делује на ротор електричне машине дате на слици 2.68, у чијим намотајима постоје сталне струје. У случају када нема промене тренутних вредности струје у намотајима, положај вектора флукса статора је једнозначно одређен положајем

статора, док је положај вектора флукса ротора једнозначно одређен положајем ротора. Стога је угао између два вектора једнак $\Delta\theta = -\theta_m$.

Уколико на статору и/или ротору постоји систем намотаја са наизменичним струјама, положај вектора флукса није једнозначно одређен положајем самог намотаја. Уз одговарајуће услове, наизменичне струје стварају обртно магнетско поље, то јест поље које се обрће у односу на саме намотаје. стварање обртног поља је детаљније анализирано у одељку *Обртно магнетско поље*. Од интереса је показати како се може одредити електромагнетски моменат у случају када намотаји статора и/или ротора имају наизменичне струје и стварају обртно магнетско поље.

На основу слика 2.68 и 2.69, положај вектора статорског флукса $\theta_{\psi S}$ и положај вектора роторског флукса $\theta_{\psi R}$ су у случају када у намотајима постоје сталне струје једнаки

$$\theta_{\psi S} = \frac{\pi}{2}, \quad \theta_{\psi R} = \theta_m + \frac{\pi}{2}.$$

У случају да постоје барем два просторно померена статорска намотаја са наизменичним струјама, флукс статора се обрће у односу на сам статор, тако да је његов правац одређен изразом

$$\theta_{\psi S} = \frac{\pi}{2} + \theta_{iS},$$

у коме је угао θ_{iS} одређен тренутним вредностима струја статора. Ако и на ротору постоји систем намотаја који ствара обртно поље ротора, тада је угао флукса ротора

$$\theta_{\psi R} = \frac{\pi}{2} + \theta_m + \theta_{iR},$$

где је угао θ_{iR} одређен тренутним вредностима струја ротора. Угао између вектора статорског флукса и вектора роторског флукса једнак је

$$\Delta\theta = \theta_{\psi S} - \theta_{\psi R} = -\theta_m + \theta_{iS} - \theta_{iR}.$$

Полазећи од израза (2.144) за енергију магнетског поља, електромагнетски моменат се одређује из једначине (2.147). Приликом одређивања извода енергије магнетског поља по координати θ_m, сматра се да су струје константне, тако је извод збира $-\theta_m+\theta_{\psi S}-\theta_{\psi R}$ по θ_m једнак -1.

$$M_{em} = +\frac{\mathrm{d}W_m}{\mathrm{d}\theta_m} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta_m}\left\{\frac{\mu_0 R^3 L\pi}{2\delta}\left[J_{R0}^2 + J_{S0}^2 + 2J_{R0}J_{S0}\cos(\Delta\theta)\right]\right\} = \quad (2.147)$$

$$= \frac{\mu_0 R^3 L\pi}{\delta} J_{R0} J_{S0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta_m}\left[\cos(-\theta_m + \theta_{iS} - \theta_{iR})\right] =$$

$$= \frac{\mu_0 R^3 L\pi}{\delta} J_{R0} J_{S0} \sin(-\theta_m + \theta_{iS} - \theta_{iR}) =$$

$$= \frac{\mu_0 R^3 L\pi}{\delta} J_{R0} J_{S0} \sin\Delta\theta$$

Добијени израз показује да је моменат пропорционалан производу амплитуда статорског и роторског струјног плашта као и синусу угла $\Delta\theta$ између вектора статорског флукса и вектора роторског флукса. Да би се показало да електромагнетски моменат зависи од векторског производа флукса статора и флукса ротора, потребно је ближе одредити везу флукса у навојку, флукса намотаја и амплитуду вектора флукса.

2.18.11 Флукс навојка и флукс намотаја

У овом делу се дају ближа објашњења вектора флукса намотаја и вектора резултантног флукса. Алгебарски интензитет вектора флукса се израчунава и повезује са флуксом у једном навојку и флуксом намотаја. То је потребно да би се моменат машине могао представити као векторски производ флукса статора и флукса ротора.

Ради лакше анализе електричних машина, усмерени скалари као што су магнетопобудне силе и флуксеви могу се представити векторима. У одељку 2.13.4 је показано како се поље вектора магнетске индукције може представити вектором флукса кроз контуру. У одељку 2.15.5 је дефинисана оса намотаја док је у одељку 2.18.5 дата конвенција о представљању магнетског поља вектором. Наведени резултати се користе у овом делу књиге да би се ближе дефинисао флукс намотаја и резултантни флукс.

У машини се магнетско поље јавља као последица деловања статорског и роторског струјног плашта. Пример електричне машине са статорским и роторким намотајем дат је на слици 2.68. У посматраном примеру, сматра се да у проводницима намотаја постоје сталне струје као и да је магнетско коло линеарно. Ради прегледности, приказан је мањи број проводника, при чему се подразумева да је по обиму статора и ротора расподељен значајно већи број проводника који на слици нису приказани. На левој и десној

страни слике 2.68 засебно су приказани ефекти струја статора и ротора. Резултантни флукс се добија суперпозицијом, то јест сабирањем флукса статора и флукса ротора. У посматраној тачки магнетског кола, сабирају се вектори магнетске индукције створене дејством струја статора и магнетске индукције створене дејством струја ротора. Потребно је показати да се резултантно магнетско поље може приказати вектором који је једнак збиру вектора статорског флукса и вектора роторског флукса.

Када се говори о *флуксу статора***,** подразумева се да је то флукс који настаје дејством магнетопобудне силе статорских струја. Флукс статора је одређен површинским интегралом вектора магнетске индукције B^S која је последица дејства статорских струја. Резултантна магнетска индукција је једнака B^S у случају да нема роторских струја већ постоји једино струја у проводницима статора. На исти начин, *флукс ротора* представља површински интеграл вектора магнетске индукције B^R, која настаје дејством струја ротора, и која би постојала у машини у случају да се укину струје статора и задрже струје ротора. *Резултантна магнетска индукција* $B^{Rez} = B^S + B^R$ постоји у машини у присуству статорских и роторских струја. Резултантни флукс се одређује као површински интеграл резултантног вектора магнетске индукције.

Флукс навојка (контуре) одређује се као површински интеграл вектора магнетске индукције B кроз површ која се ослања на контуру. Референтни смер који треба уважити при интеграцији одређује се по правилу десног навоја. Када се десна шака постави тако да четири прста указују на смер проводника ⊙ (слика 2.70), док је корен шаке ближе проводнику ⊗, тада испружени палац показује референтни смер флукса. Позитивна струја у контури створиће позитиван флукс у референтном правцу и смеру.

Посматрајући слику 2.70, уочава се једна статорска контура (навојак) постављена тако да проводници који чине контуру леже на хоризонталној линији. Усмерене линије указују на правац и смер линија поља магнетске индукције. Флукс кроз контуру се одређује израчунавањем површинског интеграла вектора магнетске индукције кроз било коју површ која се ослања на контуру. Та површ може бити правоугаоник површине D x L, чија је једна димензија пречник D а друга осна дужина машине L. Међутим, аналитички израз за магнетску индукцију B у роторском магнетском колу није познат. С друге стране, постоји израз за магнетску индукцију $B(\theta)$ у ваздушном зазору. Стога се интеграција обавља по површи која пролази кроз ваздушни зазор и ослања се на посматрану контуру.

Слика 2.70. Одређивање флукса кроз контуру.

Флукс кроз један навојак статора

Од интереса је одредити флукс који кроз контуру S1-S2 статорског намотаја ствара статорско магнетско поље, то јест статорски флукс. Посматрана контура представља део расподељеног статорског намотаја и лежи у положају где је густина проводника расподељеног намотаја највећа.

Простопериодично расподељени проводници статора, у којима постоји стална струја у смеру приказаном на сликама 2.68 и 2.70, у ваздушном зазору машине стварају радијалну компоненту магнетског поља одређену једначином (2.112),

$$H_r^S(\theta) = \frac{J_{S0}R}{\delta}\sin\theta .$$

Средина у којој се посматра магнетско поље и магнетска индукција је испуњена ваздухом, тако да је одговарајућа магнетска индукција једнака

$$B_r^S(\theta) = \mu_0 \frac{J_{S0}R}{\delta}\sin\theta .$$

Магнетска индукција $B_r^S(\theta)$ је створена дејством статорских струја. Она одређује резултантну магнетску индукцију која би постојала у ваздушном зазору у случају да у проводницима ротора нема струја. Максимална јачина магнетске индукције $B_m = \mu_0(R/\delta)\, J_{S0}$ постоји у зони јужног магнетског

пола статора, у горњем делу слике, где линије поља из зазора прелазе у феромагнетик статора. Да би се одредио флукс кроз контуру S1-S2, потребно је одредити површину површи која се ослања на контуру. Будући да се располаже изразом за јачину магнетске индукције у зазору, најпогодније је за површ интеграције усвојити полуцилиндар полупречника R и дужине L, који представља половину омотача ротора у горњем делу слике 2.70, где линије поља напуштају магнетско коло ротора, пролазе кроз ваздушни зазор и улазе у магнетско коло статора. Површина S једнака је

$$S = \pi \cdot R \cdot L .$$

Флукс кроз посматрану контуру статора добија се израчунавањем површинског интеграла магнетске индукције на површи S,

$$\Phi_{S1} = \int_S B_r^S(\theta)\,\mathrm{d}S ,$$

где је

$$\mathrm{d}S = L \cdot R \cdot \mathrm{d}\theta ,$$

тако да је

$$\Phi_{S1} = \int_0^\pi B_r^S(\theta) L \cdot R\,\mathrm{d}\theta = \frac{\mu_0 L R^2}{\delta} J_{S0} \int_0^\pi \sin(\theta)\mathrm{d}\theta = \tag{2.148}$$

$$= \frac{\mu_0 L R^2}{\delta} J_{S0} \left(-\cos\theta\right)\Big|_0^\pi = \frac{2\mu_0 L R^2}{\delta} J_{S0} .$$

Флукс кроз један навојак ротора

У претходном одељку је одређен флукс кроз један навојак статора. На сличан начин се може добити флукс контуре R1-R2 роторског намотаја (слика 2.68). Приликом израчунавања површинског интеграла магнетске индукције треба узети у обзир B_r^R, магнетску индукцију коју ствара расподељени намотај ротора. У изразу за радијалну компоненту роторског поља

$$B_r^R(\theta) = \mu_0 \frac{J_{R0} R}{\delta} \sin(\theta - \theta_m),$$

ознака J_{R0} представља максималну вредност подужне густине роторских струја, док угао θ_m представља положај ротора, односно разлику у положају оса роторског и статорског намотаја на слици 2.68. Флукс кроз контуру R1-R2 ротора једнак је

$$\Phi_{R1} = \int_{\theta_m}^{\pi+\theta_m} B_r^R(\theta) L \cdot R \,\mathrm{d}\theta = \frac{\mu_0 L R^2}{\delta} J_{R0} \int_{\theta_m}^{\pi+\theta_m} \sin(\theta - \theta_m) \mathrm{d}\theta = \tag{2.149}$$

$$= \frac{\mu_0 L R^2}{\delta} J_{R0} \left[-\cos(\theta - \theta_m)\right]_{\theta_m}^{\pi+\theta_m} = \frac{2\mu_0 L R^2}{\delta} J_{R0} \,.$$

Прорачун флукса у једном навојку се може обавити на краћи начин, множењем површине $S = \pi RL$ са средњом вредношћу магнетске индукције $B_r(\theta)$. Флукс Φ_{S1} кроз статорску контуру S1-S2 може се израчунати као производ површине полуцилиндра и средње вредности магнетске индукције $B_r^S(\theta)$ на интервалу $\theta \in [0 .. \pi]$. Будући да је промена магнетске индукције простопериодична, средња вредност облика $B_r^S(\theta)$ је $\pi/2$ пута мања од максималне вредности, па је $B_{sr} = (2/\pi)\, B_{max} = 2\mu_0 R J_{S0}/(\delta\pi)$. Множењем средње вредности индукције са површином $S = \pi RL$, добија се израз за Φ_{S1} који је у складу са једначином (2.148).

Треба уочити да су контуре S1-S2 и R1-R2 одабране тако да су им проводници положени у зоне са највећом густином проводника. Вектор статорског флукса, приказан на слици 2.68, поклапа се са нормалом на контуру. Дакле, од свих контура (навојака) статора, највећи флукс постоји у контури S1-S2. На исти начин, вектор роторског флукса, приказан на слици 2.68, поклапа се са нормалом на контуру R1-R2. Дакле, флукс кроз контуру R1-R2 представља максималну вредност флукса у роторском навојку.

У случају да нормала на контуру не лежи на истом правцу као и вектор флукса, флукс одговарајућег навојка је мањи од вредности које дају изрази (2.148) и (2.149). Као пример, биће одређен флукс кроз навојак статора чији је проводник ⊗ положен у положај $\theta = \theta_1$, док му је проводник ⊙ у положају $\theta = \pi + \theta_1$. Нормала на посматрани навојак је померена за угао θ_1 у односу на нормалу на контуру S1-S2. Флукс $\Phi_S(\theta_1)$ се одређује израчунавањем површинског интеграла магнетске индукције статора на површи облика полуцилиндра која се ослања на проводник ⊗ у положају $\theta = \theta_1$ и проводник ⊙ у положају $\theta = \pi + \theta_1$.

$$\Phi_S(\theta_1) = \int_{\theta_1}^{\pi+\theta_1} B_r^S(\theta) L \cdot R \,\mathrm{d}\theta = \frac{\mu_0 L R^2}{\delta} J_{S0} \int_{\theta_1}^{\pi+\theta_1} \sin(\theta) \mathrm{d}\theta = \tag{2.150}$$

$$= \frac{\mu_0 L R^2}{\delta} J_{S0} \left(-\cos\theta\right)\Big|_{\theta_1}^{\pi+\theta_1} = \frac{2\mu_0 L R^2}{\delta} J_{S0} \cos\theta_1 = \Phi_{S1} \cos\theta_1$$

Једначина (2.150) показује да је флукс кроз контуру статора померену за угао θ_1 простопериодична функција угла. У случају да је $\theta_1 > \pi$, флукс

кроз статорску контуру добија негативну вредност. На исти начин, може се показати да је флукс који роторске струје стварају у једном навојку ротора одређен углом θ_2 који постоји између нормале одабране контуре и нормале n_R на контуру R1-R2 (слика 2.68). Флукс роторског навојка $\Phi_R(\theta_2)$ се одређује израчунавањем површинског интеграла магнетске индукције ротора на површи која се ослања на проводник ⊗ у положају $\theta = \theta_m + \theta_2$ и проводник ⊙ у положају $\theta = \pi + \theta_m + \theta_2$.

Резултати (2.150) и (2.151) показују да флукс кроз једну контуру статора или ротора зависи од косинуса угла између нормале на контуру и вектора флукса који својом амплитудом, правцем и смером представља поље магнетске индукције.

Начин на који се поље магнетске индукције може представити вектором флукса је дискутован у одељку 2.13.4 и сажето приказан сликама 2.68 и 2.69.

$$\begin{aligned}\Phi_R(\theta_2) &= \frac{\mu_0 L R^2}{\delta} J_{R0} \int_{\theta_2+\theta_m}^{\pi+\theta_2+\theta_m} \sin(\theta-\theta_m)\,\mathrm{d}\theta = \\ &= \frac{\mu_0 L R^2}{\delta} J_{R0} \left(-\cos(\theta-\theta_m)\right)\Big|_{\theta_2+\theta_m}^{\pi+\theta_2+\theta_m} = \\ &= \frac{2\mu_0 L R^2}{\delta} J_{R0} \cos\theta_2 = \Phi_{R1}\cos\theta_2\end{aligned} \tag{2.151}$$

Флукс намотаја

Флукс намотаја је збир флуксева појединих навојака који чине намотај. Код намотаја који има N навојака формираних на правом феромагнетском штапу, у сваком од навојака постоји исти флукс Φ (слика 2.71). Тада се укупан флукс целог намотаја ψ одређује као производ броја навојака N и флукса по навојку Φ, па је $\psi = N\Phi$. То је последица чињенице да површи које се ослањају на навојке имају једнаке површине и нормале оријентисане у истом правцу и смеру. Намотај у коме сваки навојак има једнак флукс зовемо *концентрисани* намотај.

Слика 2.71. Флукс концентрисаног намотаја.

Као и флукс навојка, флукс намотаја се може одредити као површински интеграл вектора магнетске индукције по површи која се ослања на намотај. *Површ намотаја* је нешто теже сагледати од површи која се ослања на контуру. На слици 2.72 приказан је концентрисани намотај чији су крајеви затворени. Три навојка који чине овакав намотај формирају једну сложену контуру. У десном делу слике, приказана је површ ослоњена на намотај. Уколико је растојање између навојака довољно мало, оправдано је претпоставити да су флуксеви навојака једнаки. Дакле, свака од посматраних линија магнетског поља три пута пролази кроз површ намотаја, што даје релацију $\psi = N\Phi = 3\Phi$.

Слика 2.72. Површ ослоњена на намотај са три навојка.

У цилиндричној машини са расподељеним намотајима, контуре (навојци) статора и ротора су распоређене по обиму ваздушног зазора. Два наспрамна, дијаметрално супротна проводника чине једну контуру, то јест један навојак. Један намотај чини редна веза већег броја контура, док је

флукс намотаја једнак збиру флуксева кроз поједине контуре. Флукс контуре зависи од њеног релативног положаја у односу на магнетско поље. За случај да су линије поља нормалне на површ која се ослања на посматрану контуру, флукс контуре има максималну вредност. За контуру чија је површ паралелна са линијама поља, флукс је једнак нули.

Познато је да је флукс контуре пропорционалан косинусу угла између вектора магнетске индукције и нормале на површ коју дефинише контура. Оваква нормала се назива осом контуре и нормална је на линију која на слици 2.69 спаја проводнике који чине контуру (⊗ -- ⊙). Дакле, за контуру на угаоном положају θ може се одредити флукс контуре $\Phi(\theta)$, који ће бити функција угла. На основу једначина (2.150) и (2.151), флукс контуре зависи од угла између нормале на контуру и правца у коме је усмерено магнетско поље, односно правца вектора флукса. Будући да контуре расподељеног намотаја нису оријентисане у истом правцу, контуре једног намотаја имају различите флуксеве. Стога се укупни флукс не може добити као производ флукса у једној контури и укупног броја контура.

У општем случају, флукс намотаја се одређује збрајањем свих појединачних доприноса контура (навојака). У случају када је намотај концентрисан, амплитуда вектора флукса намотаја одређена је изразом $\psi = N\Phi$. У случају да је намотај расподељен тако да је подужна густина проводника једнака $N'(\theta)$, тада је број проводника који лежи у једном одсечку угаоне ширине $\mathrm{d}\theta$ једнак

$$\mathrm{d}N = N'(\theta)R\,\mathrm{d}\theta,$$

где је R полупречник машине. Сваки од проводника на интервалу $\theta \in [0 .. \pi]$ формира једну контуру са дијаметрално супротним проводником који лежи на интервалу $\theta \in [\pi .. 2\pi]$. Флукс кроз једну контуру је одређен оријентацијом њене нормале, и зависи од угла θ. Допринос свих $\mathrm{d}N$ навојака укупном флуксу намотаја једнак је

$$\mathrm{d}\psi = N'(\theta)\Phi(\theta)R\,\mathrm{d}\theta,$$

па је укупни флукс намотаја једнак

$$\psi = \int_0^{\pi} N'(\theta)\Phi(\theta)R\,\mathrm{d}\theta. \tag{2.152}$$

Једначина (2.152) се може једнако користити за одређивање флукса у статорском или роторском намотају. У случају када треба одредити флукс статорског намотаја који настаје услед магнетопобудне силе статорских струја, при израчунавању површинског интеграла који даје флукс $\Phi(\theta)$ у

једној контури, треба узети у обзир вектор магнетске индукције B_r^S, који настаје као последица магнетопобудне силе статорских струја. Количник флукса у статорском намотају и струје статора дао би коефицијент сопствене индуктивности статорског намотаја.

Уколико би се у претходном прорачуну на место B_r^S уврстила магнетска индукција B_r^R, која настаје услед магнетопобудне силе роторских струја, одређивање статорског флукса према изразу (2.152) дало би флукс који настаје у статорском намотају услед деловања роторских струја. Дељењем са струјом ротора добио би се коефицијент међусобне индуктивности статорског и роторског намотаја.

Коришћењем једначине (2.152) биће одређен флукс статорског намотаја електричне машине дате на слици 2.68 који настаје услед статорских струја. Дакле, посматра се магнетско поље које постоји у ваздушном зазору у случаја када су струје ротора једнаке нули. Расподељени намотај статора се може сагледати као скуп $N_N = N_P/2$ контура. Ознака N_P представља укупни број проводника статорског намотаја док је N_N укупни број навојака, то јест, контура. Према једначини (2.111), број навојака једнак је $N_N = 2R\, N_{Smax}$, где је N_{Smax} максимална подужна густина проводника статора, која постоји на месту где су положени проводници S1 и S2 на слици 2.68.

Ради израчунавања флукса намотаја, потребно је најпре одредити флукс кроз навојак. За навојак чији је проводник ⊗ положен у положај θ док му је проводник ⊙ у положају $\pi+\theta$, флукс $\Phi_S(\theta)$ је одређен једначином 2.150 и износи

$$\Phi_S(\theta) = \Phi_{S1}\cos\theta\,.$$

Будући да је подужна густина проводника статора једнака

$$N'(\theta) = N_{S\max}\cos\theta\,,$$

једначина (2.152) постаје

$$\begin{aligned}\psi_S &= \int_0^{\pi} N_{S\max}\cos\theta\cdot\Phi_{S1}\cos\theta\cdot R\cdot \mathrm{d}\theta = \\ &= N_{S\max}\Phi_{S1}R\int_0^{\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \\ &= \frac{\pi}{2}N_{S\max}\Phi_{S1}R = \frac{\pi}{4}N_N\Phi_{S1}\end{aligned} \tag{2.153}$$

Будући да је $\pi/4 < 1$, из једначине (2.153) се закључује да је флукс расподељеног намотаја мањи од флукса концентрисаног намотаја са једнаким бројем навојака. Концентрисан намотај би се добио тако што би сви проводници били у положени на место S1 и S2 на слици 2.68. Флукс концентрисаног намотаја био би N_N пута већи од флукса у једном навојку.

Вектор флукса намотаја

Укупни флукс намотаја се може представити вектором који је одређен правцем, смером и амплитудом. Флукс намотаја се може представити вектором који је једнак збиру вектора флуксева појединачних навојака. У случају да вектори флукса навојака имају различите оријентације, потребно је одредити правац и смер вектора флукса намотаја.

У одељку 2.13.4 дата је конвенција о представљању флукса једне контуре вектором. Правац и смер вектора флукса у контури одређени су ортом нормале на површ ослоњену на контуру. У одељку 2.15.5, оса намотаја је дефинисана на основу правца и смера линија магнетског поља које стварају струје самог намотаја. Правац осе намотаја је одређен положајем магнетских полова које стварају струје намотаја у магнетском колу. У одељку 2.18.5 је дата конвенција о представљању магнетског поља које ствара расподељени намотај вектором. И ту је правац и смер вектора флукса одређен оријентацијом магнетског поља, односно положајем магнетских полова. Дакле, израчунавање правца и смера вектора флукса једног намотаја укључује одређивање просторне расподеле магнетског поља које стварају струје намотаја. Коришћењем примера датог на слици 2.68, смер вектора флукса намотаја одређује се на основу смера линија поља, док је правац одређен магнетским половима, односно дијаметрално супротним зонама магнетског кола у којима постоји максимална вредност магнетске индукције. Користећи описани поступак, магнетска поља статора и ротора представљена су векторима датим на слици 2.69.

Одређивање правца вектора флукса намотаја и оријентације осе намотаја може се објаснити и на другачији начин, векторским сабирањем магнетопобудних сила које стварају поједине контуре, односно сабирањем њихових флуксева. На слици 2.73 приказан је статорски намотај који има три контуре, A1-A2, B1-B2 и C1-C2. У горњем делу слике, дати си вектори магнетопобудних сила сваке од три контуре које чине намотај. Магнетопобудне силе су означене векторима F_A, F_B и F_C и одређене ортом нормала одговарајућих контура. Магнетопобудна сила F_A определила би правац и смер флукса намотаја у случају да контуре B и C не постоје. Резултантна магнетопобудна сила F_S статорског намотаја сачињеног од три контуре дата је у доњем делу слике. Вектор резултантне магнетопобудне силе добија се векторским сабирањем F_A, F_B и F_C. Будући да је флукс одређен колич-

ником магнетопобудне силе и магнетске отпорности, правац и смер вектора који представља флукс намотаја одређен је резултантним вектором магнетопобудне силе. Као што је приказано на слици, вектор флукса намотаја је колинеаран са нормалом на средишњу контуру A1-A2.

Слика 2.73. Одређивање осе намотаја.

2.18.12 Положај осе намотаја и правац вектора флукса

У претходним разматрањима су ближе дефинисани оса намотаја, правац вектора флукса у једном навојку, као и правац вектора флукса намотаја. Овде се даје кратак преглед закључака који налазе примену у наредним разматрањима. Преглед је илустрован сликом 2.74.

На слици је дат расподељени намотај са простопериодичном променом подужне густине проводника. Максимална подужна густина постоји на месту проводника A1 и A2. Максимална вредност флукса у једном навојку Φ_{S1} постоји у навојку A1-A2.

Правац вектора флукса Φ_{S1} је одређен ортом нормале n_{S1}. Нормала n_{S1} је управна на површ која се ослања на контуру A1-A2.

Правац вектора флукса статорског намотаја Ψ_S је одређен ортом нормале n_S која представља осу намотаја. Дакле, вектор флукса као и оса простопериодично расподељеног намотаја имају једнак правац и смер као и вектор флукса Φ_{S1} у навојку A1-A2, чији су проводници положени на место са највећом густином проводника.

Слика 2.74. Положај вектора флукса у навојку (A), осе намотаја (B) и вектора флукса намотаја.

2.18.13 Векторски производ флукса статора и ротора

На слици 2.68, приказане су линије магнетског поља статора и магнетског поља ротора цилиндричне електричне машине која у оба намотаја има сталне струје. Садејством два поља добија се електромагнетски моменат одређен једначином (2.146) у којој угао θ_m представља положај ротора у односу на статор. Уз сталне струје у намотајима, угао θ_m је уједно и угао између вектора статорског и роторског флукса.

У општем случају, и на статору и на ротору може бити више намотаја са сталним или наизменичним струјама. Наизменичне струје могу створити обртно поље које се представља обртним вектором флукса. У случају да струје у намотајима статора стварају обртно поље, оријентација вектора статорског флукса $\theta_{\Psi S}$ тада зависи од струја у намотајима статора. Ако роторски намотаји стварају обртно поље, тада оријентација роторског флукса $\theta_{\Psi R}$ није једнозначно одређена положајем ротора θ_m, већ се мења у функцији струја ротора. Дакле, у општем случају, угао $\Delta\theta = \theta_{\Psi S} - \theta_{\Psi R}$ који постоји између вектора статорског флукса и вектора роторског флукса за-

виси од угла θ_m, али и од струја у намотајима машине, што је приказано сликом 2.75. На основу једначине (2.147), израз за електромагнетски моменат узима облик

$$M_{em} = \frac{\mu_0 \pi R^3 L}{\delta} J_{R0} J_{S0} \sin \Delta\theta \,. \tag{2.154}$$

Максимална вредност момента се достиже у случају када је разлика у оријентацији статорског и роторског флукса $\theta_{\Psi S} - \theta_{\Psi R}$ једнака $\Delta\theta = \pi/2$.

$$M_{\max} = \frac{\mu_0 \pi R^3 L}{\delta} J_{R0} J_{S0} \tag{2.155}$$

Електромагнетски моменат се може представити као векторски производ вектора статорског флукса Φ_{S1} и роторског флукса Φ_{R1}. Флуксеви Φ_{S1} и Φ_{R1} постоје у навојку S1-S2 статора и навојку R1-R2 ротора електричне машине приказане на слици 2.68. Флукс Φ_{S1} постоји кроз контуру S1-S2 у случају када у машини постоје само статорске струје, док флукс Φ_{R1} постоји кроз контуру R1-R2 у случају када у машини постоје само струје ротора. На основу једначина 2.149 и 2.150, амплитуде два вектора одређене су изразима

$$\Phi_{S1} = \frac{2\mu_0 L R^2}{\delta} J_{S0}, \qquad \Phi_{R1} = \frac{2\mu_0 L R^2}{\delta} J_{R0} \,.$$

Будући да је моменат одређен функцијом $\sin\Delta\theta$, могуће га је израчунати као векторски производ статорског и роторског флукса. Израз за моменат је могуће представити у облику

$$\frac{\mu_0 \pi R^3 L}{\delta} J_{R0} J_{S0} \sin \Delta\theta =$$
$$= \left(\frac{\pi\delta}{4\mu_0 L R} \right) \left(\frac{2\mu_0 L R^2}{\delta} J_{S0} \right) \left(\frac{2\mu_0 L R^2}{\delta} J_{R0} \right) \sin \Delta\theta$$

који садржи амплитуду векторског производа два флукса и може се представити једначином (2.156)

$$\vec{M}_{em} = \left(\frac{\pi\delta}{4\mu_0 L R} \right) \cdot \left[\vec{\Phi}_R \times \vec{\Phi}_S \right] = k \left[\vec{\Phi}_R \times \vec{\Phi}_S \right] \tag{2.156}$$

у којој је константа k једнака

$$k = \frac{\pi\delta}{4\mu_0 LR}.$$

Будући да флуксеви навојака Φ_{S1} и Φ_{R1} имају исту просторну оријентацију као и флуксеви статорског и роторског намотаја, електромагнетски моменат је могуће изразити и као векторски производ флуксева Ψ_S и Ψ_R. На основу једначине (2.153), амплитуде вектора Ψ_S и Ψ_R одређене су изразима

$$\psi_S = \frac{\pi}{4} N_{NS}\Phi_{S1}, \quad \psi_R = \frac{\pi}{4} N_{NR}\Phi_{R1},$$

у којима су N_{NS} и N_{NR} бројеви навојака статорског и роторског намотаја. Пошто су вектори флукса навојака колинеарни са векторима флукса намотаја, једначина (2.156) добија облик

$$\begin{aligned}\vec{M}_{em} &= \left(\frac{\pi\delta}{4\mu_0 LR}\right)\cdot\left[\vec{\Phi}_R \times \vec{\Phi}_S\right] = \\ &= \left(\frac{\pi\delta}{4\mu_0 LR}\right)\cdot\left(\frac{4}{\pi N_{NS}}\right)\left(\frac{4}{\pi N_{NR}}\right)\left[\vec{\psi}_R \times \vec{\psi}_S\right] = \\ &= \left(\frac{4\delta}{\mu_0 \pi LRN_{NS}N_{NR}}\right)\cdot\left[\vec{\psi}_R \times \vec{\psi}_S\right] = \\ &= k_1 \cdot \left[\vec{\psi}_R \times \vec{\psi}_S\right],\end{aligned} \tag{2.157}$$

у коме је константа k_1 једнака

$$k_1 = \frac{4\delta}{\mu_0 \pi LRN_{NS}N_{NR}}.$$

Једначине (2.156) и (2.157) дају вектор електромагнетског момента. Правац добијеног вектора је одређен осом z цилиндричног координатног система, односно осом око које се обрће ротор. Смер вектора момента је сагласан са референтним смером осе z у случају да се дејством момента на ротор увећава угао θ_m, што одговара кретању супротном од смера казаљке на сату. Амплитуда момента је одређена једначином

$$M_{em} = k\left|\vec{\Phi}_R \times \vec{\Phi}_S\right|.$$

Слика 2.75. Правац статорског флукса одређен је струјама статорских намотаја. Правац роторског флукса зависи од положаја ротора и струја роторских намотаја. Електромагнетски моменат је одређен векторским производом роторског и статорског флукса.

Питање (2.32):

У изразу за моменат датом у једначини (2.146) постоји предзнак минус. Треба ли у случају датом на слици 2.68 очекивати негативну вредност момента? Зашто једначина (2.154) нема негативан предзнак?

Одговор (2.32):

Електромагнетски моменат је одређен функцијом sin $\Delta\theta$, где је угао $\Delta\theta$ једнак $\theta_{\Psi S}$-$\theta_{\Psi R}$. Углови $\theta_{\Psi S}$ и $\theta_{\Psi R}$ одређују правце вектора статорског и роторског флукса. На слици 2.68 су приказани правци два флукса за случај када у намотајима машине постоје сталне струје. Тада је $\theta_{\Psi S} = \pi/2$, док је $\theta_{\Psi R} = \pi/2+\theta_m$, што даје $\Delta\theta = -\theta_m$. У посматраном случају, моменат је пропорционалан функцији sin $\Delta\theta = -\sin\theta_m$, што даје предзнак минус у једначини (2.146).

2.18.14 Услови за стварање константног момента

Електромагнетски моменат се може израчунати из векторског производа флукса Φ_{S1} који струје статора стварају у навојку S1-S2 статора (слика 2.68), и флукса Φ_{R1} који стварају роторске струје у навојку R1-R2 ротора. Израз за моменат је дат једначином (2.156). Једначина (2.157) даје израз за моменат у коме постоји векторски производ између вектора флукса статорског намотаја и вектора флукса роторског намотаја.

Моменат је пропорционалан синусу угла $\Delta\theta$ који затварају вектори статорског и роторског флукса. У случају када су струје у намотајима сталне, флукс статора се не помера у односу на статор, док се флукс ротора не помера у односу на ротор, тако да флукс статора предњачи у односу на флукс ротора за $\Delta\theta = -\theta_m$.

При константној брзини обртања ротора Ω_m, положај ротора је $\theta_m = \Omega_m t$. Уколико се при томе имају сталне струје у намотајима машина, угао $\Delta\theta$ је једнак θ_m тако да је електромагнетски моменат пропорционалан функцији $\sin(\Omega_m t)$. Средња вредност момента и средња снага електромеханичког претварања $P_{em} = M_{em}\Omega_m$ тада је једнака нули. Дакле, електрична машина која има сталне (једносмерне) струје у статорским и роторским проводницима не може дати средњу снагу конверзије различиту од нуле.

Ненулта средња вредност момента добија се у случају да је угао $\Delta\theta$ који затварају вектори статорског и роторског флукса буде константан. За дате струје, моменат има највећу вредност када је угао $\Delta\theta$ једнак $\pi/2$.

На слици 2.52 приказана су три начина да се оствари константан релативни положај два вектора флукса. Дати примери су овде поновљени и објашњени уз коришћење дефинисаних вектора флукса.

Услов за стварање електромагнетског момента ненулте средње вредности је константан угао $\Delta\theta$. Другим речима, вектори флукса статора и ротора морају бити у истом међусобном положају, то јест, угао који затварају вектори статорског и роторског флукса не сме се мењати. Постоје три случаја у којима је наведени услов остварен:

(A) Поље статора стоји у односу на статор. Поље ротора се обрће у односу на ротор супротно од смера обртања ротора, тако да се поље ротора не креће у односу на статор.

(B) Поље статора се обрће у односу на статор. Поље ротора се обрће у односу на ротор. Збир брзине обртања ротора и брзине са којом се поље ротора обрће у односу на ротор једнак је брзини обртања поља статора.

(C) Поље статора се обрће у односу на статор брзином која је једнака брзини обртања ротора. Поље ротора се не обрће у односу на ротор.

За стварање поља статора/ротора које се не обрће у односу на статор/ротор довољно је имати један намотај и у њему сталне струје. Стварање обртног поља захтева постојање најмање два просторно померена намотаја са наизменичним струјама. Услови за стварање обртног поља су дискутовани у одељку о обртном пољу.

Случај (A) је приказан на слици 2.52A и јавља се код машина за једносмерну струју. Вектор статорског флукса је непомичан у односу на статор

стога што у проводницима статора постоје сталне струје. Да би и вектор роторског флукса био непомичан у односу на статор и на вектор статорског флукса, потребно је да струје у проводницима ротора стварају поље које се обрће у односу на ротор брзином $-\Omega_m$. Пошто се сам ротор и роторски проводници обрћу брзином Ω_m, вектор роторског флукса ће остати непомичан у односу на статор. Машине за једносмерну струју имају механички комутатор, направу која усмерава струју извора у проводнике ротора тако да се добија наизменична струја чија је кружна учестаност одређена брзином обртања ротора. Комутатор ће бити подробније представљен у поглављу *Машине за једносмерну струју*. Захваљујући комутатору, вектор флукса Φ_{R1} остаје непомичан у односу на вектор флукса Φ_{S1}, тако да је угао $\Delta\theta$ константан.

Случај (B) је дат на слици 2.52B и јавља се код асинхроних машина. У намотајима статора и ротора постоје простопериодичне струје кружних учестаности ω_s и ω_k, респективно. Вектор флукса статора се обрће у односу на статор брзином Ω_s која је одређена кружном учестаношћу ω_s. Вектор флукса ротора се обрће у односу на ротор брзином Ω_k коју одређује кружна учестаност ω_k. Разлика кружних учестаности ω_s - ω_k одговара брзини обртања ротора Ω_m, тако да се вектори флукса статора и ротора обрћу истом брзином (Ω_s), па се њихов међусобно положај $\Delta\theta$ не мења.

Случај (C) је приказан на слици 2.52C и јавља се код синхроних машина. У проводницима ротора постоје сталне струје или се на ротор уграђују стални магнети, тако да се вектор флукса ротора Φ_{R1} обрће једнаком брзином као и сам ротор. Статор машине има систем намотаја са две или више фаза у којима постоје простопериодичне струје. Кружна учестаност ω_s струја у проводницима статора и стварају статорско магнетско поље које се обрће брзином $\Omega_s = \Omega_m$. Брзина обртања поља Ω_s је једнозначно одређена кружном учестаношћу ω_s. Вектори Φ_{R1} и Φ_{S1} се обрћу истом брзином, тако да се њихов међусобно положај $\Delta\theta$ не мења.

<u>Питање (2.33):</u>

Написати израз за моменат који делује на струјну контуру (то јест кружну контуру познатог пречника и струје) у хомогеном магнетском пољу, при чему нормала на површ одређену контуром стоји под углом θ у односу на вектор индукције хомогеног поља вектора магнетске индукције, као што је приказано на слици 2.16. Претпоставити да се контура обрће око осе која је нормална на правац простирања поља, при чему је брзина обртања позната и непромењива. Одредити тренутну и средњу вредност момента који делује на контуру. Уз претпоставку да је могуће мењати струју у контури, али не и поље, одредити један од облика струје који ће дати средњу вредност момента различиту од нуле.

Уз претпоставку да је могуће мењати индукцију, али не и струју, одредити једно од решења $B(\theta)$ које ће дати средњу вредност момента различиту од нуле.

Одговор (2.33):

Електромагнетски моменат M_{em} који делује на контуру једнак је $I \cdot B \cdot S \cdot \sin\theta$. Када се контура обрће угаоном брзином Ω, моменат се мења по функцији $\sin \Omega t$ и има средњу вредност једнаку нули. У случају да нема промене магнетске индукције, али постоји промена струје $i(t) = I \sin\omega t$, при чему је кружна учестаност ω једнака брзини обртања Ω, моменат је пропорционалан функцији $(\sin\omega t)^2$ и има ненулту средњу вредност. Ако у контури постоји стална струја I, простопериодична промена магнетске индукције може дати моменат ненулте средње вредности у случају да се индукција мења по закону $B(t) = B_m \cdot \sin\omega t$.

2.18.15 Веза момента и димензија машине

Израз за електромагнетски моменат (2.155) показује да је моменат пропорционалан R^3L, то јест осној дужини машине и трећем степену полупречника. Полупречник R и осна дужина L су линеарне димензије машине за које се може користити заједничка ознака l. Дакле, електромагнетски моменат је пропорционалан четвртом степену линеарних димензија машине, $M \approx l^4$. Запремина машине је пропорционална трећем степену линеарних димензија, $V \approx l^3$, тако да је моменат $M \approx V^{4/3}$. Електричне машине су начињене од гвожђа и бакра, материјала чија је специфична маса позната[16].

Дакле, може се закључити да је маса m електричне машине одређена електромагнетским моментом за који је машина пројектована. Маса m и моменат M су повезани релацијом $M \approx m^{4/3}$. Дакле, удвостручавањем све три димензије електричне машине добија се нова, која може развијати $2^4 = 16$ пута већи моменат.

Закључак $M \approx V^{4/3}$ је могуће потврдити и на други начин. Моменат се може изразити као векторски производ два флукса. Флукс који се у машини може постићи дефинисан је површином ($S \approx l^2$) и магнетском индукцијом $B < B_{max}$, која је ограничена појавом магнетског засићења феромагнетика и не може прећи (1.5 ÷ 1.7) T. Производ два флукса, статорског и роторског, зависиће од четвртог степена димензије l.

Снага машине зависи од момента и брзине обртања Ω. Тако је $P \approx V^{4/3}\Omega$. Дакле, од две машине једнаких димензија, већу снагу може дати она која има већу брзину обртања. У случајевима када је потребно развити од-

[16] $\gamma_{Fe} = \Delta m_{Fe}/\Delta V = 7874$ kg/m^3, $\gamma_{Cu} = \Delta m_{Cu}/\Delta V = 8020$ kg/m^3

ређену механичку снагу P, при чему се брзина обртања електричне машине која ради као мотор може произвољно бирати (решења у којима се механичка снага преноси системом зупчаника – преносника – чији се однос може подесити по вољи), од користи је одабрати што већу брзину обртања, јер ће тада потребни моменат $M = P/\Omega$ па тако и габарит и маса електричне машине бити мањи.

Анализом израза за моменат долази се до закључка да је, у условима датих струја, моменат обрнуто пропорционалан ваздушном зазору δ. Једначина сугерише да се моменат може произвољно увећати уколико се начини довољно мали ваздушни зазор. Овакав закључак је погрешан. Израз за моменат је добијен као резултат анализе која занемарује засићење у гвозденим лимовима од којих је начињено магнетско коло. Стога се добијени израз може користити под условом да у гвозденим деловима магнетског кола нема појаве магнетског засићења. Спроведена анализа показује да је магнетска индукција у ваздушном зазору и гвозденим деловима магнетског кола обрнуто пропорционална зазору. Дакле, прогресивно умањење зазора доводи до увећања магнетске индукције. Вредности индукције $B >$ (1,5 ÷ 2) T доводе до магнетског засићења у гвожђу. Као последица, пермеабилност μ_{Fe} опада, па се јачина магнетског поља у гвожђу не може занемарити, тако да једначина (2.154) као и резултати добијени уз занемарење засићења више не могу користити у прорачуну. Током пројектовања електричних машина настоји се да ваздушни зазор буде што мањи, како би се потребна јачина поља у зазору постигла са мањим јачинама струје. Постоје, међутим, ограничења механичке природе која ограничавају практичне вредности зазора на опсег од једног до неколико милиметара. Потреба да се избегне додир између непомичног магнетског кола статора и покретног ротора у условима коначних толеранција у изради механичких делова машине представља препреку коришћењу машина са зазором мањим од једног милиметра.

<u>Питање (2.34):</u>

Изведени изрази за електромагнетски моменат и снагу електричне машине дају вредности обрнуто пропорционалне ваздушном зазору δ. На основу добијених израза могао би се извући закључак да је, без увећања струја намотаја, могуће произвољно увећати снагу и моменат. Навести два разлога који указују да наведена очекивања нису реална.

<u>Одговор (2.34):</u>

Израз за моменат сугерише да се умањењем зазора δ могу остварити већи моменат и снага претварања. Постоје два ограничења која ово онемогућују. Једно се огледа о неопходном минималном зазору (1 mm) који мора постојати између статора и ротора како покретни делови не би дошли у

додир са непокретним. Друго се огледа у засићењу магнетског кола. Наиме, у условима када постоји магнетопобудна сила $Ni = 2H\delta$, магнетска индукција $B = \mu_0 Ni/(2\delta)$ при умањењу зазора расте и долази до магнетског засићења. Даље увећање индукције у феромагнетику одређено је изразом $\Delta B \approx \mu_0 \Delta H$, јер је пермеабилност засићеног материјала блиска μ_0, што ствара исте ефекте као и уклањање магнетског кола.

2.18.16 Обртно магнетско поље

Као што је речено у претходном одељку, услов за стварање електромагнетског момента чија је средња вредност различита од нуле је непроменљив међусобни положај $\Delta\theta$ вектора који представљају флуксеве статора и ротора. Код машина за једносмерну струју оба флукса мирују у односу на статор, док се код машина за наизменичну струју, у које спадају асинхроне и синхроне машине, ова два флукса обрћу истом брзином.

Будући да се ротор машине обрће, то се бар један од два флукса (Φ_S или Φ_R) мора обртати у односу на намотаје чијом је магнетопобудном силом створен. Магнетско поље, које се обрће у односу на намотаје чијом је магнетопобудном силом створено, зовемо *обртно магнетско поље*. У овом поглављу се показује да систем од најмање два намотаја са одговарајућим просторним померајем између оса, са наизменичним струјама одговарајућих учестаности, амплитуда и почетних фаза стварају магнетопобудну силу и флукс који се обрћу у односу на саме намотаје.

Систем са два ортогонална намотаја

Електромагнетски моменат је одређен векторским производом статорског и роторског флукса и зависи од синуса угла $\Delta\theta$ који постоји између та два вектора. Континуално претварање енергије са константним моментом и снагом захтева да је угао $\Delta\theta$ константан. Стога је потребно да систем статорских (и/или роторских) намотаја ствара обртно поље.

На слици 2.76 приказан је статор на коме су два намотаја, α и β. Сваки од намотаја има N навојака. Намотаји могу бити простопериодично расподељени или концентрисани. Начин извођења намотаја не утиче на закључке који ће бити изведени, па ће се сматрати да су навојци намотаја α и β концентрисани. Флукс кроз један навојак концентрисаног намотаја означава се ознаком Φ и једнак је количнику магнетопобудне силе $F = Ni$ и магнетске отпорности R_μ. Услед врло велике пермеабилности у гвожђу, магнетско поље H_{Fe} се може занемарити, па се јачина магнетског поља које концентрисани намотај ствара у ваздушном зазору може одредити из

релације $Ni = 2\delta H_0$, док је магнетска индукција у зазору једнака $B_0 = \mu_0 H_0$. Површ S_{Fe} која се ослања на навојке концентрисаног намотаја има облик полуцилиндра и површину πLR, па је флукс навојка једнак

$$\Phi = B_0 S_{Fe} = \mu_0 H_0 \pi LR = \frac{\mu_0 \pi LR}{2\delta} Ni\,.$$

Претходно добијени израз се може проверити одређивањем количника $\Phi = F/R_\mu$. Магнетска отпорност R_μ је једнака

$$R_\mu = \frac{1}{\mu_0}\frac{2\delta}{\pi LR}\,,$$

где $\pi LR = S_{Fe}$ представља површину попречног пресека магнетског кола док μ_0 представља пермеабилност средине. Величина 2δ представља дужину дела магнетског кола у коме постоји пад магнетског напона. Ради се о двострукој ширини ваздушног зазора стога што линије магнетског поља два пута пролазе кроз зазор. Израз $\Phi = F/R_\mu$ узима облик

$$\Phi = \frac{F}{R_\mu} = \frac{Ni}{\left(\dfrac{1}{\mu_0}\dfrac{2\delta}{\pi LR}\right)} = \frac{\mu_0 \pi LR}{2\delta} Ni\,. \qquad (2.158)$$

Осе намотаја α и β су колинеарне са апсцисом и ординатом правоуглог координатног система датог на слици 2.76. Оса намотаја α постављена је хоризонтално, у правцу који дефинише орт α_0. Успостављањем струје i_α, има се магнетопобудна сила $F_\alpha = N\, i_\alpha$ у правцу и смеру орта α_0. Флукс навојка добија се дељењем магнетопобудне силе и магнетске отпорности, $\Phi_\alpha = Ni_\alpha / R_\mu$. Претпоставља се да су намотаји концентрисани, тако да је флукс намотаја Ψ_α једнак $N\Phi_\alpha = N^2 i_\alpha / R_\mu$. Оса намотаја β постављена је вертикално, у правцу који дефинише орт β_0. Магнетопобудна сила F_β и флукс Φ_β овог намотаја оријентисани су према вертикалној оси β и пропорционални струју намотаја i_β. Користећи јединичне векторе оса, флукс у навојцима α и β може се представити изразом

$$\vec{\Phi}_\alpha = \frac{N}{R_\mu} i_\alpha \cdot \vec{\alpha}_0, \quad \vec{\Phi}_\beta = \frac{N}{R_\mu} i_\beta \cdot \vec{\beta}_0\,.$$

Слика 2.76. Систем са два ортогонална намотаја.

У намотајима α и β се успостављају простопериодичне струје једнаке амплитуде I_m и једнаке кружне учестаности ω_S. Ознака ω_S представља кружну учестаност струја у намотајима статора. Почетна фаза се одређује тако да струја у намотају α предњачи за π/2. Промена струје у намотајима је дата једначином (2.159).

$$i_\alpha = I_m \cos(\omega_S t) = I_m \cos\theta_S, \qquad (2.159)$$
$$i_\beta = I_m \cos\left(\omega_S t - \frac{\pi}{2}\right) = I_m \sin(\omega_S t) = I_m \sin\theta_S.$$

Вектори резултантне магнетопобудне силе статора F_S и резултантног флукса статора Φ_S добијају се векторским сабирањем њихових α и β компоненти. Уколико ортогонални намотаји на слици 2.76 имају струје дате једначином (2.159), вектор магнетопобудне силе F_S је дат једначином (2.160), док је вектор флукса дат једначином (2.161). Будући да су α и β компоненте пропорционалне функцијама cos θ_s и sin θ_s, при чему је $\theta_s = \omega_s t$, једначина описује вектор статорског флукса који се обрће брзином ω_s и при томе има константну амплитуду. Једначина (2.161) даје резултантни вектор флукса навојка. Будући да се ради о концентрисаним намотајима, резултантни вектор флукса намотаја се добија множењем са бројем навојака и дат је једначином (2.162).

$$\vec{F}_S = R_\mu \vec{\Phi}_S = NI_m(\vec{\alpha}_0 \cos\theta_s + \vec{\beta}_0 \sin\theta_s) = \\ = NI_m\left[\vec{\alpha}_0 \cos(\omega_s t) + \vec{\beta}_0 \sin(\omega_s t)\right] \tag{2.160}$$

$$\vec{\Phi}_S = \frac{NI_m}{R_\mu}(\vec{\alpha}_0 \cos\theta_s + \vec{\beta}_0 \sin\theta_s) \tag{2.161}$$

$$\vec{\psi}_S = N\vec{\Phi}_S = \frac{N^2 I_m}{R_\mu}(\vec{\alpha}_0 \cos\theta_s + \vec{\beta}_0 \sin\theta_s) \tag{2.162}$$

Сада се може рећи да су компоненте статорског флукса Φ_α и Φ_β пројекције вектора Φ_S, датог једначином (2.161), на осе координатног система дефинисаног ортовима α_0 и β_0. Пројекције вектора Φ_S на осе α и β су уједно и флуксеви у навојку одговарајућих намотаја. Осе намотаја приказаних на слици 2.76 су узајамно нормалне, тако да струје у намотају α не доводе до промене флукса у оси β, нити струје намотаја β делују на флукс у оси α. Будући да обртни вектор има α и β компоненте флукса, може се закључити да стварање обртног поља захтева постојање барем два просторно померена намотаја.

У једначини (2.161),уз компоненте флукса Φ_α и Φ_β стоје јединични вектори α_0 и β_0. Запис се може начинити једноставнијим уз претпоставку да раван α-β представља комплексну раван, са осом α као реалном, и осом β као имагинарном осом. За формално превођење једначина из координатног система α-β у комплексну раван довољно је уместо орта α_0 писати 1, а уместо орта β_0 треба писати имагинарну јединицу j. На тај начин једначина (2.161) добија облик

$$\underline{\Phi}_S = \Phi_\alpha + \mathrm{j}\Phi_\beta = \frac{NI_m}{R_\mu}(\cos\theta_s + \mathrm{j}\sin\theta_s) = \frac{NI_m}{R_\mu} e^{\mathrm{j}\theta_S} . \tag{2.163}$$

На основу спроведене анализе, закључује се да систем од два ортогонална међусобно независна намотаја може створити обртно магнетско поље. Уколико у намотајима постоје простопериодичне струје исте кружне учестаности ω_S, једнаке амплитуде I_m и почетних фаза које се разликују за $\pi/2$, тада у машини постоји магнетопобудна сила и флукс који се могу представити обртним векторима. Вектори се обрћу брзином Ω_S која је одређена кружном учестаношћу ω_S. Током обртања не долази до промене амплитуде вектора. За систем од два намотаја, приказан на слици 2.76, брзина Ω_S је једнака кружној учестаности ω_S.

Питање (2.35):

Претпоставити да су струје у намотајима статора датог на слици 2.76 једнаке

- Одредити и описати вектор статорског флукса у случају када је $\varphi = 0$.
- Одредити и описати вектор статорског флукса у случају када је $\varphi = \pi/2$.
- Показати да се у случају када је $0 < \varphi < \pi/2$ вектор статорског флукса може представити као збир два вектора, од којих се један обрће брзином $\Omega_s = \omega_s$, не мењајући при томе амплитуду, док други пулсира не мењајући правац.

Одговор (2.35):

Једначина (2.158) омогућује да се флукс навојка у једном од намотаја израчуна као количник магнетопобудне силе $F = Ni$ и магнетске отпорности R_μ,

$$\Phi = \frac{\mu_0 \pi L R}{2\delta} Ni = \frac{Ni}{\left(\frac{1}{\mu_0}\frac{2\delta}{\pi L R}\right)} = \frac{Ni}{R_\mu} .$$

Када су познате струје i_α и i_β, компоненте вектора статорског флукса су одређене изразом

$$\vec{\Phi}_\alpha = \frac{N}{R_\mu} i_\alpha \cdot \vec{\alpha}_0, \quad \vec{\Phi}_\beta = \frac{N}{R_\mu} i_\beta \cdot \vec{\beta}_0 .$$

У случају када је $\varphi = 0$, постоји једнакост између струја i_α и i_β, тако да је резултантни вектор флукса једнак

$$\vec{\Phi}_S = \frac{N}{R_\mu} I_m \cos(\omega_S t) \cdot \left(\vec{\alpha}_0 + \vec{\beta}_0\right).$$

Дакле, у случају када је $\varphi = 0$, вектор флукса не мења правац и усмерен је под углом од $\pi/4$ у односу на апсцису. Амплитуда вектора простопериодично осцилује са кружном учестаношћу ω_s.

У случају када је $\varphi = \pi/2$, вектор магнетопобудне силе је одређен једначином (2.160), док је резултантни вектор флукса навојака једнак

$$\vec{\Phi}_S = \frac{NI_m}{R_\mu}\left[\vec{\alpha}_0 \cos(\omega_s t) + \vec{\beta}_0 \sin(\omega_s t)\right]$$

У општем случају, струја у намотају β се може записати у облику

$$i_\beta = I_m \cos(\omega_S t - \varphi) = I_m \cos(\omega_S t)\cos\varphi + I_m \sin(\omega_S t)\sin\varphi .$$

док се струја у намотају α може представити збиром

$$i_\alpha = I_m \cos(\omega_S t) = I_m \cos(\omega_S t)(1 - \sin\varphi) + I_m \cos(\omega_S t)\sin\varphi.$$

Вектор флукса се може представити као збир вектора

$$\vec{\Phi}_S = \vec{\Phi}_{SO} + \vec{\Phi}_{SP} ,$$

где су сабирци одређени једнакостима

$$\vec{\Phi}_{SO} = \frac{NI_m}{R_\mu} \cdot \sin\varphi \cdot \left[\vec{\alpha}_0 \cos(\omega_s t) + \vec{\beta}_0 \sin(\omega_s t)\right],$$

$$\vec{\Phi}_{SP} = \frac{NI_m}{R_\mu} \cdot \cos(\omega_s t) \cdot \left[\vec{\alpha}_0 (1 - \sin\varphi) + \vec{\beta}_0 \cos\varphi\right].$$

Вектор Φ_{SO} представља обртно поље чија је брзина $\Omega_s = \omega_s$. Амплитуда вектора се не мења при обртању и пропорционална је синусу угла φ. Дакле, када је $\varphi = 0$, не постоји обртно поље у машини. Вектор Φ_{SP} има правац који се не мења и који је одређен углом φ. Уз $\varphi = 0$, правац пулсационог поља Φ_{SP} је под углом од $\pi/4$ у односу на апсцису. Флукс Φ_{SP} не ротира већ пулсира дуж назначеног правца.

Систем са три намотаја

Асинхроне и синхроне машине се најчешће напајају из напонских извора са симетричним трофазним системом напона и струје. Када раде као генератори, они дају систем трофазних напона на прикључцима статора. Зато статор асинхроних и синхроних машина најчешће има трофазни намотај. Три засебна намотаја на статору зову се намотаји фаза *a, b,* и *c*. Осе фазних намотаја су просторно померене за угао $2\pi/3$. На слици 2.77 је приказана машина у чијим фазним намотајима *a, b,* и *c* постоје простопериодичне струје једнаких амплитуда I_m, једнаких кружних учестаности ω_S и почетних фаза које се међусобно разликују за $\pm 2\pi/3$. Фазни померај између појединих струја одговара просторном померају између оса намотаја у којима постоје струје.

Слика 2.77. Положај вектора магнетопобудних сила, оса намотаја и јединичних вектора правоуглог координатног система.

Магнетопобудне силе намотаја F_a, F_b и F_c имају амплитуде Ni_a, Ni_b и Ni_c. Њихова оријентација одређена је осама намотаја, а њихови правци се могу изразити у функцији јединичних вектора α_0 и β_0,

$$\vec{a}_0 = \vec{\alpha}_0, \qquad \vec{b}_0 = -\frac{1}{2}\vec{\alpha}_0 + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\beta}_0, \qquad \vec{c}_0 = -\frac{1}{2}\vec{\alpha}_0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\beta}_0 \ . \tag{2.164}$$

Струје фазних намотаја су одређене једначинама

$$\begin{aligned} i_a &= I_m \cos\omega_S t, \\ i_b &= I_m \cos(\omega_S t - 2\pi/3), \\ i_c &= I_m \cos(\omega_S t - 4\pi/3), \end{aligned} \tag{2.165}$$

тако да су вектори магнетопобудних сила појединих фаза дати изразима

$$\vec{F}_a = Ni_a\vec{a}_0, \qquad \vec{F}_b = Ni_b\vec{b}_0, \quad \vec{F}_c = Ni_c\vec{c}_0.$$

Коришћењем везе (2.164), вектори фазних магнетопобудних сила се могу изразити у функцији јединичних вектора α_0 и β_0,

$$\vec{F}_a = Ni_a\vec{\alpha}_0, \tag{2.166}$$
$$\vec{F}_b = Ni_b(-\frac{1}{2}\vec{\alpha}_0 + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\beta}_0),$$
$$\vec{F}_c = Ni_c(-\frac{1}{2}\vec{\alpha}_0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\beta}_0).$$

Резултантна магнетопобудна сила статорских намотаја добија се векторским сабирањем магнетопобудних сила фаза и дата је једначином

$$\vec{F} = \vec{F}_a + \vec{F}_b + \vec{F}_c = \frac{3}{2}NI_m\left[\vec{\alpha}_0\cos\omega_S t + \vec{\beta}_0\sin\omega_S t\right]. \tag{2.167}$$

Сабирањем вектора магнетопобудних сила фаза добија се обртни вектор резултантне магнетопобудне силе амплитуде 3/2 NI_m. Пројекције вектора на осе α и β пропорционалне су функцијама $\cos(\omega_s t)$ и $\sin(\omega_s t)$, тако да се ради о вектору који се обрће брзином $\Omega_s = \omega_s$. Количник вектора магнетопобудне силе статорских намотаја F_S и отпорности магнетског кола R_μ даје вектор флукса статора Φ_S који се обрће истом брзином као и вектор магнетопобудне силе F_S. Дакле, систем простопериодичних струја у трофазном намотају статора резултује обртним пољем чија је брзина обртања одређена учестаношћу напона напајања, док му је амплитуда одређена максималном вредношћу фазних струја I_m.

Као што је већ истакнуто у уводу књиге, потребно је разликовати брзину обртања ротора, која има јединицу rad/s и кружну учестаност струја и напона, која има исту јединицу. Један од начина је усвајање ознаке Ω за механичку брзину и ознаке ω за електричну кружну учестаност.

На слици 2.78 приказани су вектори резултантне магнетопобудне силе и резултантног флукса у машини са трофазним системом намотаја на статору.

Слика 2.78. Линије обртног магнетског поља.

2.19 Електромоторне силе индуковане у намотајима

Промена флукса у намотајима машине доводи до индуковања електромоторне силе, пропорционалне изводу флукса по времену. Равнотежа напона за сваки од намотаја дата је једнакошћу $u = Ri + \mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t$, где је u напон на крајевима намотаја, i струја намотаја, R отпорност намотаја док је извод флукса једнак електромоторној сили. У оквиру уводних курсева електротехнике, електромоторном силом се назива извод флукса са предзнаком минус, $e = -\,\mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t$, што недвосмислено указује да се индукована електромоторна сила и струја опиру промени флукса. Код решавања електричних кола у којима постоје електромоторне силе, може се усвојити конвенција $e = +\mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t$, и тада је струја у колу одређена количником напонске разлике $(u - e)$ и отпорности кола R. Овако дефинисана, електромоторна сила се *супротставља* напону, па се назива и *контра електромоторном силом*. У овој књизи, усвојена је конвенција да e означава $+\mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t$, па је равнотежа напона у сваком од намотаја одређена једначином $u = Ri + e$.

2.19.1 Подела електромоторних сила

Електромоторна сила може настати као последица кретања, и тада се зове *динамичка електромоторна сила*. На пример, динамичка електромоторна сила се јавља у намотају ротора који се обрће у односу на статор уколико у проводницима статора постоје сталне струје. Сталне струје у статору стварају непомично магнетско поље, то јест магнетско поље које се не мења и не креће у односу на статор. Под дејством сталних струја статора, у намотају ротора настаје флукс који се мења услед обртања ротора. Промена флукса у роторском намотају доводи до појаве електромоторне силе.

Електромоторна сила се може јавити и у случају када нема кретања. Уколико је струја у проводницима статора променљива, флукс који ствара статорски намотај је променљив у времену. Флукс намотаја ротора је једним делом последица статорских струја, у мери одређеној међусобном индуктивношћу статора и ротора. Чак и када се ротор не помера, долази до промене роторског флукса и индуковања електромоторне силе. Оваква електромоторна сила се зове *трансформаторска*, зато што у трансформатору под дејством наизменичних примарних струја долази до индуковања секундарне електромоторне силе на описани начин.

Електромоторна сила $e = L\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$, која се јавља у намотају услед промене струје и која је пропорционална коефицијенту сопствене индуктивности L зове се *електромоторна сила самоиндукције*.

2.19.2 Електромоторна сила навојка

Моделирање електричних машина захтева одређивање електромоторне силе која се индукује у намотајима. На слици 2.79 је приказана електрична машина која на ротору има сталне магнете. Магнети су обликовани и распоређени тако да стварају простопериодичну расподелу магнетске индукције у ваздушном зазору

$$B = B_m \cos(\theta - \theta_m) . \tag{2.168}$$

Услед обртања ротора, максимална индукција $B_m = \mu_0 H_m$ постоји у положају $\theta = \theta_m$, где θ_m представља положај ротора. У случају да се ротор обрће константном брзином Ω_m, положај ротора је $\theta_m = \Omega_m t$, па је магнетска индукција у посматраном положају θ једнака

$$B(\theta, t) = B_m \cos(\theta - \Omega_m t) .$$

Дакле, талас простопериодично расподељеног магнетског поља се обрће скупа са ротором. Од интереса је одредити електромоторну силу инду-

ковану у једном навојку статора приказаном на слици 2.79. Навојак чине два дијаметрално супротна проводника. Проводник ⊗ се налази у положају $\theta\otimes$ =0, док је проводник ⊙ у положају $\theta\odot = \pi$. Електромоторна сила се може одредити на два начина,

(i) Одређивањем првог извода флукса у навојку, и

(ii) Израчунавањем и збрајањем електромоторних сила у проводницима.

Слика 2.79. Роторско поље настаје дејством сталних магнета уграђених у магнетско коло ротора.

Израчунавање првог извода флукса у навојку

Први извод флукса навојка одређује контра-електромоторну силу која се индукује у навојку. У посматраном примеру, флукс кроз контуру постоји услед деловања сталних магнета на ротору, за које се сматра да у ваздушном зазору стварају поље вектора магнетске индукције са расподелом коју дефинише израз (2.168). Флукс кроз посматрани навојак једнак је површинском интегралу вектора магнетске индукције кроз било коју површ ослоњену на проводнике ⊗ и ⊙. Ради лакшег рачуна, треба одабрати полуцилиндар који полази од проводника ⊗ у положају θ =0, пролази кроз ваздушни зазор у горњем делу слике и завршава ослањајући се на проводник ⊙ у положају $\theta = \pi$. Одабрана површ је полуцилиндар дужине L и полупречника R, где је L дужина а R полупречник ротора. Површина одабране површи је

$$S = L \cdot R \cdot \pi. \tag{2.169}$$

Флукс навојка се израчунава као површински интеграл магнетске индукције, дате изразом (2.168), по површини полуцилиндра. Будући да је магнетско поље у зазору радијално, вектори поља H и магнетске индукци-

је B су нормални на површ. Скаларни производ вектора B и dS једнак је производу амплитуда, па израз за флукс навојка добија облик

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_S B \cdot \mathrm{d}S \ .$$

Елементарна површина полуцилиндра једнака је d$S = L \cdot R \cdot \mathrm{d}\theta$, па израз за флукс који постоји у статорском навојку услед дејства сталних магнета на ротору узима облик

$$\Phi = \int_0^{\pi} d\Phi = \int_0^{\pi} B \cdot \mathrm{d}S = \int_0^{\pi} B \cdot LR\mathrm{d}\theta = \\ = \left(2LRB_m\right)\sin\theta_m = \Phi_m \sin\theta_m . \tag{2.170}$$

Флукс навојка зависи од међусобног положаја ротора и статора. Максимална вредност флукса у навојку има се у случају када је ротор у положају $\theta_m = \pi/2$. Максимална вредност Φ_m је

$$\Phi_m = 2 \cdot R \cdot L \cdot B_m . \tag{2.171}$$

У другим положајима, флукс навојка има мању вредност, $\Phi(\theta_m) = \Phi_m \sin\theta_m$. Када се ротор обрће константном брзином Ω_m, положај ротора се мења и једнак је $\theta_m = \Omega_m t$, па је флукс навојка једнак

$$\Phi = \Phi_m \sin\left(\Omega_m t\right),$$

док је (контра) електромоторна сила навојка једнака

$$e_1 = +\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \Omega_m \Phi_m \cos\left(\Omega_m t\right). \tag{2.172}$$

Збрајање електромоторних сила проводника

Електромоторну силу навојка могуће је одредити и сабирањем електромоторних сила индукованих у проводницима који чине навојак. У примеру датом на слици 2.79, поље роторских сталних магнета се обрће у односу на проводнике статора. Периферна брзина је једнака $v = R\Omega_m$, где је R полупречник ротора а Ω_m угаона брзина обртања. У проводнику са ознаком $\otimes$ јавља се електромоторна сила

$$e_{\otimes} = L \cdot R \cdot \Omega_m \cdot B_m \cdot \cos\left(\Omega_m t\right).$$

У положају $\theta = \pi$, где је положен наспрамни проводник ⊙, магнетско поље има супротан смер. Стога се у проводнику означеном са ⊙ индукује електромоторна сила $e_{\odot}$ супротног смера. Навојак се формира редним повезивањем проводника. Крајеви навојка су изведени на предњој страни статорског цилиндра. Крајеви проводника ⊗ и ⊙ се повезују са задње стране цилиндра. При обиласку контуре коју чине проводници, електромоторне силе проводника $e_{\otimes}$ и $e_{\odot}$ се сабирају, па је електромоторна сила навојка једнака

$$e_1 = 2 \cdot e_{\otimes} = 2 \cdot L \cdot R \cdot \Omega_m \cdot B_m \cdot \cos(\Omega_m t). \tag{2.173}$$

Према изразу (2.172), максимална вредност флукса навојка једнака је $\Phi_m = 2LRB_m$, па се претходни израз може записати у облику

$$e_1 = \Omega_m \Phi_m \cos(\Omega_m t),$$

који је у складу са једначином (2.172).

У посматраном примеру, индуковане електромоторне силе су простопериодичне функције времена, па их је могуће представити фазорима. Сабирање електромоторних сила $e_{\otimes}$ и $e_{\odot}$ је представљено фазорима на слици 2.81 у наредним одељцима.

Равнотежа напона у навојку

Једначина равнотеже напона у посматраном навојку статора дата је једначином

$$\begin{aligned} u = Ri + e_1 \approx \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = 2\Omega_m LRB_m \cos\theta_m = \\ = \Omega_m \Phi_m \cos\theta_m = E_m \cos\theta_m , \end{aligned} \tag{2.175}$$

у којој e_1 представља (контра) електромоторну силу. Уколико је отпорност навојка R тако мала да се може занемарити, електромоторна сила e_1 је једнака напону на крајевима навојка. Будући да је електромоторна сила простопериодичног облика, њена ефективна вредност је дата једначином (2.176), где је f фреквенција, односно број обртаја ротора у секунди. Дакле, електромоторна сила је пропорционална максималној вредности флукса и учестаности.

$$E_{1eff}^{nav} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = \frac{(2\pi f)\Phi_m}{\sqrt{2}} = 4{,}44\, f\, \Phi_m . \tag{2.176}$$

Облик електромоторне силе

Током претходне анализе разматрана је електрична машина са сталним магнетима на ротору који стварају простопериодичну расподелу поља у зазору. Утврђено је да се при константној брзини обртања ротора, у навојку приказаном на слици 2.79 индукује простопериодична електромоторна сила.

Уколико се брзина обртања мења, електромоторна сила индукована у навојку може одступити од простопериодичне промене. У случају да је расподела магнетског поља простопериодична, али је брзина обртања функција времена $\Omega_m(t)$, електромоторна сила навојка је

$$e_1 = +\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\Phi_m \sin\left(\Omega_m t\right)\right) =$$

$$= \Omega_m \Phi_m \cos\left(\Omega_m t\right) + t \cdot \Phi_m \cos\left(\Omega_m t\right) \cdot \frac{\mathrm{d}\,\Omega_m}{\mathrm{d}t}.$$

Претходни израз представља простопериодичну функцију времена уколико је брзина обртања константна, то јест, ако је $\mathrm{d}\Omega_m/\mathrm{d}t = 0$.

У случају да стални магнети стварају сложенопериодичну расподелу поља у ваздушном зазору, индукована електромоторна сила ће бити сложенопериодична функција времена. Нека је $B(\theta\text{-}\theta_m)$ сложенопериодична функција која одређује магнетску индукцију у ваздушном зазору. На месту где је положен проводник ⊗, магнетска индукција је једнака $B\otimes = B(0\text{-}\theta_m) = B(\text{-}\theta_m)$. Уколико се ротор обрће константном брзином, електромоторна сила навојка се израчунава према изразу (2.173) и једнака је

$$e_1 = 2 \cdot e_{\otimes} = 2LR\Omega_m \cdot B_{\otimes} = 2LR\Omega_m \cdot B\left(-\Omega_m t\right). \qquad (2.177)$$

Добијени израз показује да је промена електромоторне силе у времену одређена променом $B(\theta\text{-}\theta_m)$ магнетске индукције у функцији угла. Дакле, облик просторне расподеле поља одређује облик функције $e_1(t)$. У случају да постоји сложенопериодична расподела магнетске индукције у ваздушном зазору, у посматраном навојку се индукује сложенопериодична електромоторна сила.

<u>Питање (2.36):</u>

Претпоставити да у синхроном генератору који напаја потрошаче постоји статорски намотај чији су проводници концентрисани у два дијаметрално супротна положаја на унутрашњој површи статора (то јест у два дијаметрално супротна жлеба у магнетском колу статора). На ротору постоји стални магнет који у ваздушном зазору ствара индукцију $B(\theta) = B_m \operatorname{sgn}[\cos(\theta - \theta_m)]$. Одредити и нацртати облик напона на потрошачу.

Одговор (2.36):

У складу са једначином (2.175), напон на крајевима намотаја статора једнак је $u \approx 2NLR\Omega_m B(\Omega_m t) \approx (2NLR\Omega_m B_m)\ \mathrm{sgn}[\cos(\Omega_m t)]$.

Ефективна вредност електромоторне силе

При раду са наизменичним напонима и струјама, у електротехници се уместо вршних вредности простопериодичних величина узима њихова ефективна вредност. *Ефективна* вредност наизменичног напона бројно је једнака једносмерном (сталном) напону који би произвео једнако загревање, то јест једнаку средњу вредност снаге дисипације на отпорнику између чијих крајева постоји напон. Ефективна вредност напона који има периодичну промену са периодом T израчунава се према изразу

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2\,\mathrm{d}t}\ .$$

Код простопериодичних величина, ефективна вредност је $\sqrt{2}$ пута мања од вршне вредности. Изрази (2.178) и (2.179) дају ефективну вредност електромоторне силе навојка и ефективну вредност електромоторне силе проводника.

$$E_{1eff}^{nav} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = \frac{(2\pi f)\Phi_m}{\sqrt{2}} = 4{,}44\, f\ \Phi_m \tag{2.178}$$

$$E_{1eff}^{prov} = 2{,}22\, f\ \Phi_m \tag{2.179}$$

Кружна учестаност електромоторне силе $\omega = 2\pi f$ одређена је брзином обртања Ω_m. Ефективна вредност индуковане електромоторне силе се може изразити у функцији фреквенције f и флукса као $E_{eff} = 4{,}44\, f\Phi_m$. За концентрисани намотај са N навојака, ефективна вредност електромоторне силе је дата једначином

$$E_{eff}^{namotaja} = 4{,}44 N f\ \Phi_m\ . \tag{2.180}$$

2.19.3 Електромоторна сила намотаја

Електричне машине најчешће имају већи број намотаја. Као пример, на статору машина начињених за рад са трофазним системом наизменичних напона и струја постоје три намотаја, то јест три фазе. Сваки намотај има

један или више навојака који су редно повезани. Крајеви редне везе навојака представљају крајеве намотаја и најчешће су доступни на прикључцима машине. Овде се одређује електромоторна сила индукована у једном намотају.

Концентрисани намотај

Проводници који чине намотај могу бити концентрисани у два наспрамна жлеба, и тада се ради о концентрисаном намотају. Будући да се сви навојци концентрисаног намотаја налазе у истом положају, они имају исти флукс и исту електромоторну силу. Ефективна вредност у једном навојку сачињеном од два дијаметрално супротна проводника дата је изразом (2.178). За концентрисани намотај са N навојака, ефективна вредност индуковане електромоторне силе је дата изразом (2.180).

Расподељени намотај

Намотаји се углавном изводе тако да се проводници полажу у већи број жлебова. Навојци су тада просторно померени и у њима се имају различите електромоторне силе. Стога електромоторна сила индукована у расподељеном намотају није једнака производу броја навојака и електромоторне силе у једном навојку. У овом поглављу израчунава се електромоторна сила расподељеног намотаја.

Намотаји се често конструишу тако да проводници који чине један навојак нису дијаметрално супротни, већ су постављени *тетивно*. Поред тога, проводници се полажу у неколико суседних жлебова који чине *навојни појас*. На слици 2.80 дат је пример расподеле проводника једног намотаја који има навојке 1A-1B, 2A-2B и 3A-3B.

Проводници 1A и 1B, који припадају једном навојку, положени су у жлебове на угаоном растојању α. Ако је $\alpha = \pi$, проводници су дијаметрално супротни. Навојак 1A-1B тада има *пун навојни корак*. У случају да је $\alpha < \pi$, проводници 1A и 1B стоје на тетиви. У том случају, навојак 1A-1B има *скраћени навојни корак*.

Електромоторна сила индукована у навојку са скраћеним навојним кораком је мања него у случају да се има пун навојни корак. Смањење је одређено коефицијентом који се зове *тетивни навојни сачинилац*.

Проводници 1A, 2A и 3A су смештени у три суседна жлеба која чине навојни појас. На исти начин, и проводници 1B, 2B и 3B су положени у суседне жлебове. Електромоторне силе индуковане у навојцима 1A-1B, 2A-2B и 3A-3B нису једнаке. Услед просторног помераја, електромоторна сила у појединим навојцима не достиже максималну вредност у истом тренутку. Просторни померај између оса навојака даје фазни померај између

електромоторних сила. Стога је ефективна вредност електромоторне силе намотаја мања од производа броја навојака и ефективне вредности електромоторне силе у једном навојку. Смањење је одређено коефицијентом који се зове *појасни навојни сачинилац*. Прорачун електромоторне силе расподељеног намотаја захтева познавање тетивног и појасног навојног сачиниоца.

Слика 2.80. Расподела проводника намотаја који има тетивно постављене навојне појасеве ширине *m* = 3 жлеба.

Тетивни навојни сачинилац

Претходно добијени изрази за електромоторну силу се односе на навојак који чине дијаметрално супротни проводници. У пракси, може се јавити потреба да се проводници једног навојка (контуре) поставе тако да нису дијаметрално супротни, већ су на угаоном растојању мањем од π. Разлог коришћења скраћеног навојног корака може бити тежња да се скрате везе које наспрамне проводнике везују на ред, али и тежња да се умање или елиминишу нежељени виши хармоници који се могу појавити у електромоторној сили.

Као пример, може се поћи од машине на слици 2.80 и узети случај у коме просторна расподела поља $B(\theta)$ није простопериодична већ садржи и пети хармоник, $B(\theta) = B_{m1}\cos(\theta-\theta_m) + B_{m5}\cos 5(\theta-\theta_m)$. На основу добијених израза, електромоторне силе $e\otimes$ и $e\odot$, индуковане у проводницима, имаће основну компоненту учестаности $\omega = \Omega_m$, али и пети хармоник учестаности $5\Omega_m$. У случају када се проводници $\otimes$ и $\odot$ налазе на угаоном растојању π, електромоторне силе индуковане у њима су једнаког облика па долази до сабирања основног хармоника али и виших хармоника. Редним повезивањем наспрамних проводника, сабира се и тако удвостручује електромоторна сила основног хармоника, али и нежељена електромоторна сила петог хармоника.

Уколико се проводници поставе тако да је угаоно растојање међу њима једнако $\frac{4}{5}\pi$, добијају се електромоторне силе $e\otimes$ и $e\odot$ које су фазно померене. При обртању ротора, пролазак северног магнетског пола ротора поред проводника $\otimes$ неће бити истовремено са проласком јужног магнетског пола поред проводника $\odot$. Дакле, електромоторне силе у проводницима ће бити временски и фазно померене, то јест, постојаће фазни померај одређен угаоним растојањем између проводника.

Основни хармоник електромоторне силе у сваком од проводника може се представити фазором. Електромоторне силе у наспрамним проводницима $\otimes$ и $\odot$ су супротног знака. Ипак, услед начина на који се изводи редна веза ових проводника, фазор електромоторне силе у навојку, приказан на слици 2.81 (А), добија се сабирањем фазора e_1 и e_2.

Постављањем проводника на угаоно растојање $\frac{4}{5}\pi$, фазори електромоторних сила $e\otimes$ и $e\odot$ неће бити колинеарни, што је показано у делу (В) слике 2.81. Због фазног и просторног одступања од $\pi/5$, ефективна вредност збира ће бити незнатно мања од збира ефективних вредности.

Фазорски дијаграми се могу конструисати за основни хармоник, али и за сваки од виших хармоника. Код петог хармоника електромоторне силе, фазна разлика се, као и учестаност, множи са 5. Будући да је $5 \times \pi/5 = \pi$, пети хармоник електромоторне силе $e\otimes$ је у противфази са петим хармоником електромоторне силе $e\odot$, тако да ће се потирати. Упркос присуству петог хармоника у просторној расподели $B(\theta)$, електромоторна сила индукована у посматраном навојку неће имати пети хармоник. Једна од последица скраћења навојног корака је умањење првог, основног хармоника електромоторне силе. Електромоторна сила навојка са тетивно положеним проводницима се може одредити из фазорског дијаграма на сликама 2.81, али и израчунавањем електромоторне силе у навојку P1-P2 на слици 2.82, што је следећи корак анализе.

Слика 2.81. Електромоторне силе у проводницима навојка. (A) Навојак са пуним навојним кораком. (B) Навојак са скраћеном навојним кораком.

<u>Питање (2.37):</u>

Како треба поставити проводнике који чине један навојак да би се елиминисао седми хармоник у просторној расподели $B(\theta)$?

<u>Одговор (2.37):</u>

Постављањем проводника на угаоно растојање $6\pi/7$ и редним везивањем проводника на начин који доводи до сабирања електромоторне силе основног хармоника, фазори електромоторне силе основног хармоника су померени за $\pi/7$, док су фазори седмог хармоника померени за π. Дакле, при сабирању електромоторних сила долази до елиминације седмог хармоника.

* * *

Електромоторна сила индукована у навојку који чине проводници P1 и P2, приказани на слици 2.82, који су постављени на угаоном растојању $\alpha < \pi$, мања је од електромоторне силе која би се индуковала у навојку P1-P3, добијеном везивањем дијаметрално супротних проводника. Смањење електромоторне силе услед оваквог, *тетивног* постављања проводника одређено је коефицијентом k_T који се зове *тетивни навојни сачинилац*. Вредност коефицијента може се одредити анализом електромоторне силе индуковане у навојку P1-P2, и та вредност је увек $k_T < 1$.

На слици 2.82 приказан је попречни пресек машине која на статору има навојак P1-P2 са тетивно постављеним проводницима. Претпоставља се да у ваздушном зазору постоји магнетско поље које има простопериодичну расподелу и које се обрће једнаком брзином као и ротор. Промена магнетске индукције такође је дата на слици 2.82. Приказана просторна расподела магнетске индукције може бити остварена дејством сталних магнета уграђених у магнетско коло ротора.

Слика 2.82. Приказ навојка са скраћеним навојним кораком.

Електромоторна сила навојка P1-P2 се може одредити израчунавањем извода флукса навојка. Флукс навојка P1-P2 је одређен изразом

$$\Phi = \int_0^{\alpha} B \cdot \mathrm{d}S = \int_0^{\alpha} B \cdot LR\mathrm{d}\theta = LRB_m \int_0^{\alpha} \cos(\theta - \theta_m) \cdot \mathrm{d}\theta,$$

у коме је L осна дужина машине, R полупречник ротора, док је B_m је максимална вредност простопериодичне расподеле магнетске индукције коју стварају стални магнети на ротору. Израчунавањем одређеног интеграла добија се резултат

$$\Phi = LRB_m \cdot \sin(\theta - \theta_m)\Big|_0^{\alpha} = LRB_m\left[\sin(\alpha - \theta_m) - \sin(-\theta_m)\right] = \tag{2.181}$$

$$= \left[2LRB_m \sin\frac{\alpha}{2}\right]\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \theta_m\right) = \Phi_m^{\alpha}\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \theta_m\right).$$

Са Φ_m^{α} је означена максимална вредност флукса у навојку P1-P2. Она се достиже када је ротор у положају $\theta_m = \alpha/2$. Будући да је максимална вредност флукса навојака P1-P3 једнака $\Phi_m^{\pi} = 2LRB_m$, показује се да је вршна

вредност флукса у намотају са тетивно постављеним проводницима умањена за фактор sin(α/2). Другим речима, вршна вредност флукса у навојку са скраћеним навојним кораком (Φ_m^{α}) мања је од вршне вредности флукса у навојку са пуним кораком (Φ_m^{π}) и износи $\Phi_m^{\alpha} = \Phi_m^{\pi} \sin(\alpha/2)$. Електромоторна сила индукована у намотају P1-P2 дата је изразом

$$e_1(t) = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \Omega_m \Phi_m^{\alpha} \sin(\frac{\alpha}{2} - \theta_m) = E_m \sin(\frac{\alpha}{2} - \omega_m t)\,. \tag{2.182}$$

Вршна вредност електромоторне силе једнака је

$$E_m = \Omega_m \Phi_m^{\alpha} = \Omega_m \Phi_m^{\pi} \sin\frac{\alpha}{2} = \Omega_m \Phi_m^{\pi} \cdot k_T\,. \tag{2.183}$$

Коефицијент k_T одређује смањење електромоторне силе навојка услед скраћења навојног корака. Ефективна вредност електромоторне силе навојка дата је изразом

$$E_{1eff}^{navojak} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = 4{,}44\, f\ \Phi_m^{\pi} \cdot \sin\frac{\alpha}{2}\ . \tag{2.184}$$

Уколико се електромоторне силе представе фазорима и прикажу на фазорском дијаграму датом на слици 2.83, поступак одређивања тетивног навојног сачиниоца може бити једноставнији. Хипотенуза AC правоуглог троугла ABC представља ефективну вредност електромоторне силе E_1 индуковане у једном проводнику. Наспрам угла α/2 стоји катета BC дужине $E_1 \cdot \sin(\alpha/2)$. Ефективна вредност електромоторне силе индуковане у навојку је представљена фазором DC. Она је двоструко већа од катете BC и износи $2E_1 \sin(\alpha/2) = 2E_1 k_T$. Дакле, услед скраћења навојног корака, електромоторна сила навојка је мања од $2E_1$. Тетивни навојни сачинилац $k_T = \sin(\alpha/2)$ је у сагласности са резултатом (2.182).

У следећим одељцима ће бити изложен начин на који би требало формирати намотај тако да индукована електромоторна сила намотаја има само основни хармоник, без обзира на облик просторне расподеле магнетске индукције $B(\theta)$. У основи, редно везане навојке треба начинити тако да се добије простопериодична расподела проводника по обиму машине. Код идеалне простопериодичне расподеле проводника долази до поништавања свих виших хармоника. Намотај тада обавља функцију *просторног филтра*, који уклања ефекте изобличења у просторној расподели $B(\theta)$ и даје простопериодичну електромоторну силу.

Слика 2.83. Електромоторна сила у навојку са скраћеним навојним кораком.

Појасни навојни сачинилац

Намотаји реалних машина се формирају тако што се проводници смештају у аксијалне зарезе, *жлебове* који постоје у магнетском колу. Статор и ротор имају већи број жлебова. На слици 2.54 дат је пресек магнетског кола електричне машине на коме се могу видети уобичајени облици жлебова и њихов број.

Један навојак је сачињен од два дијаметрално супротна проводника. С друге стране, трофазни статорски намотај има три фазе, три намотаја чије су осе просторно померене за $2\pi/3$. Стога је најмањи број жлебова који се може имати у магнетском колу статора трофазне машине једнак $2\times3=6$. Толики би био број жлебова у случају да је сваки од фазних намотаја концентрисан, односно, да су сви проводници једног фазног намотаја смештени у два наспрамна, дијаметрално супротна жлеба. Број жлебова је најчешће знатно већи. Један од разлога за коришћење већег броја жлебова је проблем у полагању једне половине свих проводника једног намотаја у само један жлеб. Такав жлеб би морао имати непрактично велики пресек, па се проводници најчешће смештају у већи број суседних жлебова. На описани начин, формира се *навојни појас*. Навојни појас обухвата два, три или више блиских жлебова. У сваки од жлебова навојног појаса може се сместити један или више проводника намотаја. Ради једноставнијих даљих разматрања, може се сматрати да сваки жлеб навојног појаса има по један

проводник. У случају са M проводника у жлебу, добијене вредности електромоторне силе треба помножити са M.

Пример навојног појаса који има проводнике смештене у три суседна жлеба дат је на слици 2.81. На слици 2.84 приказан је пресек таквог намотаја, као и фазорски дијаграм који приказује однос електромоторних сила индукованих у појединим навојцима. Навојци 1A-1B, 2A-2B и 3A-3B имају пун навојни корак, то јест, ове навојке чине дијаметрално супротни проводници. Фазори E_1, E_2, и E_3 представљају електромоторне силе навојака 1A-1B, 2A-2B и 3A-3B. Угао γ на слици 2.84 означава растојање између два суседна жлеба. Просторни померај између навојака даје фазни померај γ између електромоторних сила које се индукују у намотајима.

Слика 2.84. (A) Намотај са три навојка смештена у навојни појас који обухвата три суседна жлеба. (B) Фазорски дијаграм који приказује електромоторне силе индуковане у навојцима 1, 2 и 3.

Полагање проводника у навојни појас омогућује да се елиминишу или умање виши хармоници у индукованој електромоторној сили. Услед просторног помераја проводника, електромоторне силе појединих проводника су фазно померене, што је објашњено у претходном одељку, приликом одређивања тетивног навојног сачиниоца. У случају да навојни појас обухвата m суседних жлебова, електромоторна сила намотаја се може одредити према једначини

$$\vec{E}^{faze} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + ... + \vec{E}_m , \tag{2.185}$$

где се ознаке $E_1 \div E_m$ односе на електромоторне силе индуковане у појединим навојцима. Услед фазног помераја, збир појединачних електромоторних сила даје резултанту чија је ефективна вредност мања од збира ефективних вредности сабирака, тако да је

$$\left|\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_m\right| < \left|\vec{E}_1\right| + \left|\vec{E}_2\right| + \ldots + \left|\vec{E}_m\right|.$$

Суседни жлебови се из средишта ротора виде се под углом γ, који у исто време одређује и фазни померај електромоторних сила навојака чији су проводници положени у суседне жлебове. Коришћењем једначине (2.185) и фазорског дијаграма који је дат на слици 2.85, може се показати да расподела проводника у навојни појас може довести до елиминације појединих виших хармоника.

Навојни појас и елиминација виших хармоника

Према једначини (2.177), промена електромоторне силе проводника је одређена просторном расподелом магнетске индукције у ваздушном зазору. Ако просторна расподела индукције има виши просторни хармоник реда n, тада ће и промена електромоторне силе проводника у времену имати хармоник реда n. У навојку са пуним навојним кораком, проводници су положени у дијаметрално супротне жлебове, па је електромоторна сила навојка једнака двострукој вредности електромоторне силе у једном проводнику. Дакле, хармоник реда n постоји и у електромоторној сили навојка.

Електромоторна сила намотаја приказаног на слици 2.84 једнака је збиру електромоторних сила у просторно помереним навојцима 1A-1B, 2A-2B и 3A-3B. Под одређеним условима може доћи до поништавања виших хармоника. Дијаграм на слици 2.84B приказује фазоре E_1, E_2, и E_3 који представљају основни хармоник електромоторне силе навојака 1A-1B, 2A-2B и 3A-3B. Фазори су померени за угао γ који представља просторни померај два суседна навојка. Фазорима се могу представити и виши хармоници индукованих електромоторних сила. Хармоник реда n има исту амплитуду у посматраним навојцима, али му се почетна фаза разликује стога што су навојци просторно померени. Ако је кружна учестаност увећана n пута, просторни померај γ чини да фазно кашњење n-тог хармоника у суседним фазама буде једнако $n\gamma$. У фазном дијаграму који представља n-те хармонике електромоторних сила навојака, фазори E_{1n}, E_{2n}, и E_{3n} су померени за угао $n\gamma$.

Ако је угао γ на слици 2.84A једнак $2\pi/(3\cdot n)$, фазори n-тог хармоника E_{1n}, E_{2n}, и E_{3n} су померени за $2\pi/3$. Будући да су амплитуде фазора једнаке, фазорски дијаграм је представљен једнакостраничним троуглом у коме се

почетак првог и крај последњег фазора подударају, то јест, збир фазора n-тог хармоника је једнак нули. Дакле, у случају да је $\gamma = 2\pi/(3\cdot n)$, долази до елиминације хармоника чији је ред n.

У општем случају, два навојна појаса која чине намотај могу обухватати по m суседних жлебова. Намотај се тада састоји од m редно везаних навојака. Ако је угао γ једнак $2\pi/(m\cdot n)$, фазни померај основног хармоника електромоторне силе у суседним навојцима једнак је $2\pi/(m\cdot n)$, док је фазни померај хармоника реда n једнак $2\pi/m$. У намотају се индукује електромоторна сила чији се n-ти хармоник добија сабирањем m фазора једнаке амплитуде, међусобно померених за $2\pi/m$. Ако је амплитуда n-тог хармоника електромоторне силе навојка једнака $\underline{E}_n^{namotaja}$, фазор n-тог хармоника електромоторне силе намотаја једнак је

$$\underline{E}_n^{namotaja} = \underline{E}_{1n} + \underline{E}_{2n} + \underline{E}_{3n} + \ldots + \underline{E}_{mn} =$$
$$= \underline{E}_{1n} \sum_{k=0}^{m-1} e^{-\mathrm{j}\cdot k\cdot \frac{2\pi}{m}} = 0.$$

Претходна једнакост се може представити графички. Сабирањем m фазора међусобно померених за $2\pi/m$, крај последњег фазора се подудара са почетком првог. Фазорски дијаграм је представљен полигоном са m страница једнаке дужине. Полигон је уписан у кружницу чије тетиве представљају фазоре n-тог хармоника електромоторних сила појединих навојака.

Из наведеног се закључује да је резултантна електромоторна сила вишег хармоника реда n једнака нули у случају када је угао γ једнак $2\pi/(m\cdot n)$. Другим речима, за елиминацију n-тог хармоника, потребно је да се навојни појас који обухвата m жлебова види из средишта ротора под углом $2\pi/n$.

Због полагања проводника у навојни појас, резултантна електромоторна сила основног хармоника је мања од електромоторне силе концентрисаног намотаја. Користећи дијаграм дат на слици 2.85, може се уочити да ће амплитуда збира фазора $E_1 + E_2 + E_3$ бити мања од збира појединих амплитуда $|E_1| + |E_2| + |E_3|$. До разлике долази стога што се сабирају фазори који нису колинеарни. Фактор k_P је једнак количнику

$$k_P = \frac{\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3}{\left|\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3\right|},$$

и зове се *појасни навојни сачинилац*.

Слика 2.85. Фазорски дијаграм електромоторних сила појединих навојака у случају када навојни појас обухвата *m* = 3 суседна жлеба.

У случају када је ширина навојног појаса $m = 3$, резултантна електромоторна сила основног хармоника добија се сабирањем три фазора, како је приказано на слици 2.85 и дато једначином

$$\vec{E}_{m=3}^{namotaja} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 . \tag{2.186}$$

Фазори E_1, E_2, и E_3 леже на кружници полупречника R. За сваки једнокраки троугао на слици 2.85 зна се да је основа троугла једнака двострукој вредности производа дужине крака и синуса једне половине наспрамног угла. Стога је полупречник кружнице одређен изразом $R \sin(\gamma/2) = E_1/2$. Истовремено, амплитуда резултантног фазора је

$$E_{m=3} = 2R \cdot \sin\frac{3\gamma}{2} = 2\left(\frac{E_1}{2 \cdot \sin\frac{\gamma}{2}}\right)\sin\frac{3\gamma}{2} =$$

$$= E_1 \frac{\sin\frac{3\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \left(\frac{\sin\frac{3\gamma}{2}}{3\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}\right)\cdot 3E_1 = k_P\cdot 3E_1,$$

где је k_P појасни навојни сачинилац намотаја са навојним појасом ширине m = 3 жлеба. У општем случају навојни појас се састоји од m суседних жлебова. Амплитуда резултантног фазора основног хармоника је $E_m = 2\,R\,\sin(m\,\gamma/2)$, где је полупречник R одређен изразом $R\,\sin(\gamma/2) = E_1/2$. Ако је E_1 ефективна вредност основног хармоника електромоторне силе индуковане у једном навојку, ефективна вредност основног хармоника електромоторне силе намотаја је

$$E_m = E_1 \frac{\sin\frac{m\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \left(\frac{\sin\frac{m\gamma}{2}}{m\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}\right)\cdot mE_1 = k_P\cdot mE_1.$$

Појасни навојни сачинилац је одређен изразом

$$k_P = \frac{\left|\vec{E}_{m=3}\right|}{m\left|\vec{E}_1\right|} = \frac{\sin\frac{m\gamma}{2}}{m\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}, \tag{2.187}$$

па се ефективна вредност електромоторне силе индуковане у намотају може одредити из једначине

$$E_{eff} = E^{faze} = 4{,}44 k_P\, fN\, \Phi_m^{\pi}, \tag{2.188}$$

у којој је $\Phi_m^{\pi} = 2LRB_m$ максимална вредност флукса у једном навојку са пуним навојним кораком, N представља број навојака док је $f = \Omega_m/(2\pi)$ фреквенција.

<u>Питање (2.38):</u>

Услед несинусоидалне расподеле поља $B(\theta)$, електромоторне силе индуковане у проводницима садрже више хармонике. Намотај са 3 навојка састављен је од 6 проводника. Проводници су положени на угаоном растојању од $\gamma = 24^{\circ}$. Резултантна електромоторна сила, мерена на крајевима намотаја, неће имати неке од виших хармоника. Који је ред ових хармоника?

Одговор (2.38):

Резултантна електромоторна сила вишег хармоника реда n је једнака нули у случају да је $\gamma = 2\pi/(m \cdot n)$ или $\gamma = q \cdot 2\pi/(m \cdot n)$, где је q цео број. Будући да је $m = 3$ и $\gamma = 2\pi/15$, елиминишу се сви хармоници чији је ред једнак $n = 5q$, дакле, сви хармоници чији је ред умножак броја 5.

2.19.4 Електромоторна сила у сложеном намотају

Намотаји се најчешће конструишу тако да проводници који чине један навојак нису дијаметрално супротни, већ су положени тетивно. Поред тога, проводници појединих навојака се полажу у навојни појас. Стога је у прорачуну електромоторне силе основног хармоника потребно користити и тетивни и појасни навојни сачинилац. Неопходни коефицијенти су дати изразима

$$k_T = \sin\frac{\alpha}{2}, \qquad (2.189)$$

$$k_P = \frac{\sin\frac{m\gamma}{2}}{m \cdot \sin\frac{\gamma}{2}},$$

док се ефективна вредност електромоторне силе сложеног намотаја може одредити према изразу

$$E_{eff} = 4{,}44 \cdot k_P k_T N \cdot f \cdot \left(2L \cdot R \cdot B_m\right), \qquad (2.190)$$

у коме је $N = N_P/2$ број навојака, B_m максимална вредност простопериодично расподељене магнетске индукције, док су L и R дужина и полупречник ротора. Величина f је фреквенција електромоторних сила. У примеру датом на слици 2.84, фреквенција f је једнака броју обртаја ротора у једној секунди.

Претходни израз се може записати и у облику

$$E_{eff} = 4{,}44 k_P k_T N f \, \Phi_m^{\pi},$$

где $\Phi_m^{\pi} = 2LRB_m$ представља максималну вредност флукса која би се имала у навојку са дијаметрално супротним проводницима. Ако расподељени намотај има навојке са скраћеним навојним кораком, величина Φ_m^{π} је хипотетичка, и тада је израз (2.190) примеренији.

2.20 Виши хармоници

Облик динамичке електромоторне силе је одређен расподелом магнетског поља у зазору машине. У случају да се магнетско поље H и индукција B мењају по простопериодичном закону дуж обима машине, електромоторна сила ће бити простопериодична функција времена и неће имати више хармонике. Поље у зазору се јавља као последица магнетопобудне силе коју стварају струје у проводницима, или услед присуства сталних магнета. У оба случаја, простопериодична промена поља је циљ коме се тежи током пројектовања машине, и који није могуће у потпуности остварити. Проводници који чине намотаје не могу имати простопериодичну расподелу стога што се морају положити у жлебове. Магнетско коло електричне машине најчешће има више десетина жлебова, тако да постоји релативно мали број положаја у којима се могу налазити проводници. Одступање од простопериодичне расподеле проводника доводи и до појаве виших хармоника у просторној расподели поља. Присуство виших просторних хармоника се огледа у томе да просторна расподела $B(\theta)$ није простопериодична функција угла θ, већ садржи више хармонике. На исти начин, стални магнети уграђени на ротор не могу дати идеалну простопериодичну расподелу поља, већ стварају магнетско поље које има више просторне хармонике.

У случају да се ротор обрће брзином Ω_m, у проводницима статора се индукују електромоторне силе. На пример, у проводнику који стоји на положају $\theta = 0$ индукује се електромоторна сила $E = R\Omega_m L\, B(0\text{-}\theta_m)$ која се може представити у облику $k{\cdot}B(0\text{-}\Omega_m t)$. У случају када просторна расподела поља има пети хармоник, магнетска индукција у положају $\theta = 0$ једнака је

$$B_5 \cos 5(\theta - \theta_m) = B_5 \cos 5(0 - \theta_m) = B_5 \cos(5\Omega_m t),$$

тако да и у електромоторној сили индукованој у том проводнику постоји пети хармоник

$$E_5 = R\Omega_m L B_5 \cos(5\Omega_m t).$$

Дакле, виши просторни хармоници у расподели магнетског поља резултују вишим хармоницима индуковане електромоторне силе.

Виши хармоници електромоторних сила стварају електромагнетске сметње и доприносе валовитости момента. Они увећавају максималне и ефективне вредности струје у односу на случај када су електромоторне силе простопериодичне. Као последица, долази и до увећања снаге губитака. Стога се електричне машине пројектују и израђују тако да утицај виших хармоника у индукованој електромоторној сили буде што мањи. Најчешће

није могуће деловати на просторну расподелу магнетског поља, тако да остаје могућност да се виши хармоници умање одговарајућом конструкцијом намотаја.

Намотај се састоји од већег броја редно везаних проводника. У сваком проводнику се индукује електромоторна сила чији фазни став зависи од положаја жлеба у коме се проводник налази. Проводници се могу повезати тако да се виши хармоници електромоторне силе доводе у противфазу, па ће се при сабирању поништити. Фазни померај зависи од реда хармоника, што отежава елиминацију хармоника. Наиме, у случају да је намотај начињен тако да се при сабирању електромоторних сила у редно везаним проводницима поништава неки од виших хармоника, могуће је да при томе дође до сабирања електромоторних сила других хармоника. У пракси, начин формирања намотаја, то јест начин на који се проводници једног намотаја расподељују у жлебове, одређује се тако да се на најмању могућу меру сведу амплитуде хармоника најнижег реда. Облик просторне расподеле магнетске индукције $B(\theta)$ је најчешће симетричан у односу на максимум B_m и не садржи парне хармонике, тако да индуковане електромоторне силе могу имати само непарне хармонике. Са друге стране, у случају када постоји трофазни намотај чије су фазе везане у звезду, у линијским напонима не могу се јавити виши хармоници чији је ред дељив са три. Стога се при формирању намотаја у обзир узимају пети и седми хармоник, као и једанаести и тринаести у случајевима када је то могуће.

2.20.1 Електромоторна сила у идеалном намотају

Реални намотаји електричних машина формирају се редним везивањем проводника који су смештени у жлебове. Најчешће постоји више десетина жлебова, што значи да проводници могу бити постављени у једном од неколико десетина дискретних положаја. Реални намотаји се пројектују тако да имају расподелу проводника блиску простопериодичној. Технике извођења намотаја користе тетивно полагање проводника који чине навојке (скраћени навојни корак), како би се елиминисали или умањили одређени виши хармоници. Поред тога, проводници намотаја се распоређују у навојни појас, што такође доприноси елиминацији или умањењу виших хармоника електромоторне силе. Због тога се у даљем разматрању полази од претпоставке да је расподела проводника једног намотаја блиска простопериодичној.

Овде ће се показати да идеални намотај са простопериодичном расподелом проводника има улогу *просторног филтра* који у потпуности уклања више хармонике који могу настати услед сложенопериодичне расподеле магнетске индукције $B(\theta)$. Простопериодична расподела проводника је

идеал коме се тежи, али га у пракси није могуће достићи пошто свака машина има коначан, релативно мали број жлебова. Електромоторне силе реалних машина одступају од простопериодичног облика зато што виши хармоници нису у потпуности уклоњени.

У наредном разматрању израчунава се електромоторна сила индукована у намотају са идеалном простопериодичном расподелом проводника који је приказан на слици 2.86 и показује се да је она простопериодична (то јест хармонијска, синусоидална) без обзира на присуство виших просторних хармоника у расподели магнетске индукције $B(\theta)$. Намотај обавља улогу просторног филтра који уклања све хармонике у индукованој електромоторној сили осим основног хармоника.

Под основним хармоником расподеле магнетске индукције подразумева први хармоник функције $B(\theta)$, односно члан реда (2.191) за који је $i = 1$. Основни хармоник електромоторне силе намотаја одређен је првим хармоником расподеле $B(\theta)$ и има кружну учестаност $\omega_S = \Omega_m$.

Магнетско поље у ваздушном зазору је последица роторских струја или сталних магнета уграђених у магнетско коло ротора. Ако се ротор са сталним магнетима или сталним струјама обрће угаоном брзином Ω_m, истом брзином се обрће и магнетско поље ротора. На основу слике 2.86, расподела магнетске индукције $B(\theta)$ у зазору није простопериодична већ садржи више хармонике. Прорачун индуковане електромоторне силе у намотају статора спровешће се са циљем да се докаже како у њој постоји само основни хармоник.

Слика 2.86. Пресек електричне машине која има један статорски намотај са простопериодичном расподелом проводника и сталне магнете на ротору и приказ просторне расподеле магнетске индукције у ваздушном зазору.

Магнетска индукција коју стварају стални магнети уграђени у магнетско коло ротора може се описати функцијом $B(\theta\text{-}\theta_m) = B_m \operatorname{sgn}[\cos(\theta\text{-}\theta_m)]$. У интервалу $-\pi/2 < (\theta\text{-}\theta_m) < +\pi/2$, магнетска индукција је једнака $+B_m$, док је за $+\pi/2 < (\theta\text{-}\theta_m) < +3\pi/2$ индукција једнака $-B_m$. Развојем функције у Фуријеов ред, добија се израз

$$B(\theta-\theta_m)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}\frac{B_m}{2i-1}(-1)^{i+1}\cos[(2i-1)(\theta-\theta_m)]. \tag{2.191}$$

Функција садржи све непарне хармонике, чија амплитуда опада пропорционално реду хармоника. Пошто је функција $B(\theta\text{-}\theta_m)$ симетрична, она нема парне хармонике. Амплитуда првог хармоника једнака је $4B_m/\pi$.

Одређивање флукса у једном навојку

Прорачун електромоторне силе индуковане у намотају статора тражи да се најпре одреди флукс намотаја. Како се намотај састоји од већег броја навојака, од којих је сваки у различитом положају, укупни флукс се добија збрајањем (интеграцијом) флукса у појединим навојцима. Пре свега, потребно је одредити флукс $\Phi(\theta)$ у навојку чији се проводник са ознаком $\otimes$ налази у жлебу на положају θ, док се проводник истог навојка означен са $\odot$ налази у жлебу на положају $\theta+\pi$. Посматрани навојак има пун навојни корак и проводнике који су на слици 2.87 означени са A и B.

Флукс $\Phi(\theta)$ једнак је површинском интегралу вектора магнетске индукције кроз површ која се ослања на проводнике навојка. Интеграл се израчунава по површи која се налази у ваздушном зазору полазећи од проводника A до проводника B, зато што постоји аналитички израз за промену магнетске индукције у функцији угла θ. Референтни смер се одређује правилом десног навоја. Флукс се одређује интеграцијом $B(\xi)\cdot \mathrm{d}S = B(\xi)LR\mathrm{d}\xi$ у границама од θ до $\theta+\pi$, на начин дат изразом

$$\begin{aligned}\Phi(\theta)&=\int_{\theta}^{\theta+\pi}B(\xi)L\cdot R\,\mathrm{d}\xi\\&=\int_{\theta}^{\theta+\pi}\left\{\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{4}{\pi}\frac{B_m}{2i-1}(-1)^{i+1}\cos[(2i-1)\cdot(\xi-\theta_m)]\right\}L\cdot R\,d\xi.\end{aligned} \tag{2.192}$$

Интеграција се обавља по површи која пролази кроз ваздушни зазор и чији је елемент $\mathrm{d}S = LR\mathrm{d}\xi$, где је L осна дужина машине, док је $R = D/2$ полупречник роторског цилиндра. Израз $B(\xi)$ представља радијалну ком-

поненту магнетске индукције на произвољном положају ξ интервала [θ .. θ+π]. Као резултат интеграције, флукс навојка је одређен једначином

$$\Phi(\theta) = LRB_m \frac{8}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i-1)^2} \sin[(2i-1)(\theta-\theta_m)]. \tag{2.193}$$

Слика 2.87. Одређивање флукса у једном навојку.

Простопериодично расподељени намотај

Укупни флукс намотаја Ψ_S одређује се сабирањем флуксева појединих навојака. Посматра се расподељени намотај приказан на слици 2.87, са подужном густином проводника по обиму ваздушног зазора

$$N'(\theta) = N_m \cos\theta .$$

Највећа густина проводника се има у положајима $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. У појасу ширине $R\,\mathrm{d}\theta$ налази се

$$\mathrm{d}N = N'(\theta) \cdot R \cdot \mathrm{d}\theta$$

проводника. Сви проводници са референтним смером ⊗ положени су у интервалу [-π/2 .. π/2]. Сваки проводник са референтним смером ⊗ повезан је на ред са дијаметрално супротним проводником смера ⊙, са којим чини један навојак. Флукс $\Phi(\theta)$ у навојку који стварају проводник ⊗ у положају θ и проводник ⊙ у положају $\theta+\pi$ одређен је изразом (2.193). Укупни флукс намотаја Ψ_S одређује се интеграцијом прираштаја

$$\mathrm{d}\psi_S = N_m \Phi(\theta) R \cos(\theta) \cdot \mathrm{d}\theta$$

на интервалу [-π/2 .. π/2], на основу израза

$$\psi_S = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} N_m \Phi(\theta) R \cos(\theta) \cdot \mathrm{d}\theta . \tag{2.194}$$

Сменом израза за $\Phi(\theta)$ из израза (2.193) добија се да је флукс намотаја

$$\Psi_S = N_m L R^2 B_m \frac{8}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i-1)^2} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sin[(2i-1)(\theta-\theta_m)] \cos\theta \cdot \mathrm{d}\theta . \tag{2.195}$$

Ако се подинтегрална функција напише у облику

$$f(\theta, i) = \sin[(2i-1)(\theta-\theta_m)]\cos(\theta) =$$
$$= 1/2[\sin(2i\theta-(2i-1)\theta_m) + \sin((2i-2)\theta-(2i-1)\theta_m)],$$

тада се резултат (2.195) може представити као збир у коме је сваки од сабирака интеграл функције $f(\theta,i)$ у границама од –π/2 до +π/2. С обзиром на дате границе интеграције, сви сабирци осим првог једнаки су нули. У случају првог сабирка, i узима вредност 1, па је подинтегрална функција

$$f(\theta,1) = [\sin(2\theta-\theta_m) + \sin(-\theta_m)]/2 .$$

Издвајањем првог елемента суме у изразу (2.195), за који је i = 1, добија се израз

$$\Psi_S^1 = N_m L R^2 B_m \frac{8}{\pi} \frac{(-1)^1}{(2-1)^2} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sin(\theta-\theta_m)\cos(\theta)\ \mathrm{d}\theta,$$

који даје флукс намотаја услед првог (основног) хармоника сложенопериодичне расподеле магнетског поља. Будући да је

$$\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sin(\theta-\theta_m)\cos(\theta)\cdot \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\left[\sin(2\theta-\theta_m)+\sin(-\theta_m)\right]\cdot \mathrm{d}\theta =$$

$$= -\frac{1}{4}\cos(2\theta-\theta_m)\Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2} + \frac{1}{2}\sin(-\theta_m)\cdot\theta\Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2} = -\frac{\pi}{2}\sin\theta_m,$$

вредност флукса Ψ_S^1 једнака је

$$\Psi_S^1 = N_m L R^2 B_m \frac{8(-1)}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\sin\theta_m\right) = 4N_m L R^2 B_m \sin\theta_m . \qquad (2.196)$$

Преостали елементи суме у изразу (2.196), за које је $i > 1$, једнаки су нули. Као пример, за $i = 2$, има се подинтегрална функција

$$f(\theta,2) = \left[\sin(4\theta-3\theta_m)+\sin(2\theta-3\theta_m)\right]/2 ,$$

чији је одређени интеграл у датим границама једнак нули. Из наведеног се закључује да у индукованој електромоторној сили неће постојати виши хармоници.

Флукс намотаја са произвољном расподелом

Текући прорачун се спроводи ради стицања увида у начин на који простопериодично расподељени намотај обавља функцију просторног филтра и елиминише више хармонике електромоторне силе. Од интереса је дати израз за флукс намотаја у општем случају, када је расподела проводника описана произвољном функцијом $N'(\theta)$.

Први корак у прорачуну флукса намотаја је одређивање флукса у једном навојку који се налази у положају θ. Тај флукс се израчунава на начин дат изразом (2.192), односно

$$\Phi(\theta) = \int_{\theta}^{\theta+\pi} B(\xi) L\cdot R\,\mathrm{d}\xi ,$$

где функција $B(\xi)$ одређује расподелу магнетске индукције у ваздушном зазору.

Укупни флукс намотаја је збир флуксева свих навојака. Стога је потребно извршити сабирање флуксева појединих навојака. У случају расподељеног намотаја, сабирање се врши интеграцијом. У случају када је подужна густина проводника једнака $N'(\theta) = N_m\cos\theta$, флукс намотаја се израчунава према изразу

$$\psi_S = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} N_m \Phi(\theta) R \cos\theta \cdot \mathrm{d}\theta .$$

Обједињавањем добијених резултата, израз за флукс намотаја добија облик

$$\psi_S = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} N_m \left\{ \int_{\theta}^{\pi+\theta} LRB(\xi)\,\mathrm{d}\xi \right\} R \cos\theta \cdot \mathrm{d}\theta . \tag{2.197}$$

У општем случају, подужна густина проводника који чине намотај може имати произвољну расподелу проводника, описану подужном густином $N'(\theta)$. Укупни флукс намотаја тада се израчунава коришћењем израза

$$\psi_S = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} N'(\theta) \left\{ \int_{\theta}^{\pi+\theta} LRB(\xi)\,\mathrm{d}\xi \right\} R \cdot \mathrm{d}\theta \tag{2.198}$$

Израз (2.198) се може применити за израчунавање флукса у расподељеном намотају за сваку задату расподелу магнетске индукције $B(\xi)$ и за било који задату промену подужне густине проводника $N'(\theta)$.

2.20.2 Одређивање виших хармоника

Циљ прорачуна који се овде спроводи је одређивање електромоторне силе индуковане у намотају статора у случају када су проводници намотаја простопериодично расподељени дуж обима машине. Електромоторна сила се одређује за случај да у ваздушном зазору постоји сложенопериодична расподела магнетског поља створеног дејством сталних магнета, уграђених у магнетско коло ротора. Полази се од израза за магнетску индукцију у зазору (2.191), у коме постоји први, основни хармоник, али и сви непарни хармоници. Будући да је сложенопериодична расподела магнетске индукције симетрична, у функцији $B(\theta\text{-}\theta_m)$ нема парних хармоника. У посматраном случају, подужна густина проводника је $N'(\theta) = N_m\cos(\theta)$, док је промена магнетске индукције у ваздушном зазору одређена изразом (2.191). Тај израз представља развој функције $B(\theta)$ у ред који садржи само непарне чланове. Први елемент реда за који је $i = 1$ представља основни хармоник просторне расподеле магнетске индукције. За $i > 1$, елементи реда представљају више хармонике просторне расподеле поља. На основу израза 2.191, просторни хармоник функције $B(\theta)$ реда $(2i\text{-}1)$ једнак је

$$\frac{4}{\pi}\frac{B_m}{2i-1}(-1)^{i+1} \ .$$

Сменом у израз (2.197) добија се величина $\Psi_S{}^{2i\text{-}1}$ која представља допринос укупном флуксу намотаја услед вишег хармоника просторне расподеле магнетске индукције чији је ред (2i -1).

$$\psi_S^{2i-1} = \frac{4N_m LR^2 B_m(-1)^{i+1}}{\pi(2i-1)} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ \int_{\theta}^{\pi+\theta} \cos[(2i-1)(\xi-\theta_m)]\,\mathrm{d}\,\xi \right\} \cos\theta \cdot \mathrm{d}\,\theta \cdot \tag{2.199}$$

Интеграцијом функције cos[(2i-1)(ξ-θ_m)] по променљивој ξ добија се да је

$$\int \cos[(2i-1)(\xi-\theta_m)]\mathrm{d}\,\xi = \frac{1}{2i-1}\sin[(2i-1)(\xi-\theta_m)].$$

Добијени резултат се може искористити у изразу (2.199) ради израчунавања одређеног интеграла подинтегралне функције по променљивој ξ у границама од θ до θ+π. Израчунавањем се добија

$$\frac{1}{2i-1}\sin[(2i-1)(\xi-\theta_m)]\Big|_{\theta}^{\theta+\pi} = -\frac{2}{2i-1}\sin[(2i-1)(\theta-\theta_m)].$$

Увођењем смене, израз добија облик

$$\psi_S^{2i-1} = \frac{8N_m LR^2 B_m(-1)^i}{\pi(2i-1)^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin[(2i-1)(\theta-\theta_m)]\cos\theta \cdot \mathrm{d}\,\theta \tag{2.200}$$

Будући да је

$$\sin[(2i-1)(\theta-\theta_m)]\cos\theta =$$
$$\frac{1}{2}\sin[2i\theta-(2i-1)\theta_m] + \frac{1}{2}\sin[(2i-2)\theta-(2i-1)\theta_m],$$

добијени резултат се може раздвојити на два интеграла, I_A и I_B.

$$\psi_S^{2i-1} = \frac{4N_m LR^2 B_m(-1)^i}{\pi(2i-1)^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin((2i-2)\theta-(2i-1)\theta_m)\cdot \mathrm{d}\,\theta + \tag{2.201}$$
$$+\frac{4N_m LR^2 B_m(-1)^i}{\pi(2i-1)^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(2i\theta-(2i-1)\theta_m)\cdot \mathrm{d}\,\theta \ = \ I_A + I_B.$$

Будући да се индекс i мења од $i = 1$ до $+\infty$, интеграл I_B је једнак нули стога што интервал $[-\pi/2 .. \pi/2]$ представља целобројни умножак периода функције $\sin(2i\theta)$. Исто закључак важи и за интеграл I_A, уколико је $i > 1$. Дакле, ненулта вредност флукса Ψ_S^{2i-1} постоји само за први (основни) хармоник, то јест за $i = 1$. За $i > 1$ простопериодична подинтегрална функција има период који се садржи цео број пута у интервалу интеграције.

На основу добијених резултата, закључује се да простопериодична расподела проводника намотаја по обиму машине доводи то тога да виши просторни хармоници магнетске индукције $B(\theta)$ не доприносе флуксу, па самим тим не утичу на индуковану електромоторну силу.

Дакле, простопериодична расподела проводника даје намотај који идеално отклања више хармонике електромоторне силе, задржавајући само основни хармоник.

2.20.3 Електромоторна сила намотаја

На основу добијених резултата, овде су дати изрази за тренутну, максималну и ефективну вредност електромоторне силе која се индукује у посматраном статорском намотају. Изрази (2.203), (2.204) и (2.205) се односе на намотај са расподелом проводника $N'(\theta) = N_m \cos\theta$ и за расподелу магнетске индукције у ваздушном зазору која је приказана на слици 2.86 и дата једначином (2.191).

Елиминација виших хармоника

Добијени резултати показују да се простопериодичном расподелом проводника уклањају виши хармоници електромоторне силе индуковане у намотају. У намотају са идеалном, простопериодичном расподелом проводника индукује се хармонијска електромоторна сила, без обзира на присуство виших хармоника у просторној расподели магнетске индукције $B(\theta)$. Хармоник реда $(2i\text{-}1)$ у просторној расподели $B(\theta)$ даје допринос Ψ_S^{2i-1} укупном флуксу намотаја који је дат изразом (2.201). За свако $i > 1$, допринос Ψ_S^{2i-1} је једнак нули. Дакле, намотај обавља улогу просторног филтра који уклања ефекте виших хармоника просторне расподеле $B(\theta)$ осим основног.

Флукс намотаја

Једино основни хармоник расподеле $B(\theta)$ доприноси флуксу намотаја. Укупни флукс намотаја је одређен једначином

$$\psi_S = \psi_S^1 = 4B_m N_m LR^2 \sin\theta_m . \tag{2.202}$$

Електромоторна сила

Ако се ротор обрће константном брзином Ω_m, положај ротора се мења по закону $\theta_m = \Omega_m t$. Флукс статорског намотаја тада је простопериодична функција времена чија је кружна учестаност ω_S одређена угаоном брзином обртања Ω_m. Промена флукса је дата једначином

$$\psi_S(t) = 4B_m N_m LR^2 \cdot \sin\Omega_m t = \psi_{S\max} \sin\Omega_m t .$$

У намотају се индукује простопериодична (контра)електромоторна сила одређена изводом флукса.

$$e_S(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi_S = 4\Omega_m B_m N_m LR^2 \cos\Omega_m t = \psi_{S\max}\Omega_m \cos\Omega_m t \tag{2.203}$$

Максимална вредност простопериодичне електромоторне силе индуковане у простопериодично расподељеном статорском намотају једнака је

$$e_{max}^r = \Psi_{Smax}\Omega_m = 4\Omega_m B_m N_m LR^2 \tag{2.204}$$

док је њена ефективна вредност једнака

$$e_{eff}^r = \frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_{Smax}\Omega_m = 2\sqrt{2}\Omega_m B_m N_m LR^2 .$$

Максимална и ефективна вредност електромоторне силе се може изразити у функцији броја навојака. Израз (2.111) повезује број навојака N_N у намотају са простопериодичном расподелом проводника и максималну подужну густину проводника N_m

$$N_N = 2R \cdot N_m ,$$

тако да се максимална вредност електромоторне силе може израчунати из израза

$$e_{max}^r = 2\Omega_m B_m N_N LR$$

док се ефективна вредност електромоторне силе у намотају може израчунати из израза

$$e_{eff}^r = \sqrt{2}\Omega_m B_m N_N LR . \tag{2.205}$$

Спроведена анализа показује да у индукованој електромоторној сили намотаја са простопериодичном расподелом проводника нема виших хармоника, чиме је показано да такав намотај обавља функцију просторног филтра.

Питање (2.39):

Посматрати електричну машину која је била предмет претходне анализе. Претпоставити да се број проводника не мења, али се они концентришу у положајима $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. Одредити облик и амплитуду електромоторне силе индуковане у статорском намотају.

Одговор (2.39):

У сваком од проводника статорског намотаја индукује се електромоторна сила $e_{1p} = LvB(\theta)$, где је L осна дужина машине, $B(\theta)$ магнетска индукција на месту θ на коме се налази проводник, док је $v = R\Omega_m$ периферна брзина релативног кретања проводника у односу на поље. Облик просторне расподеле магнетске индукције $B(\theta)$ је дат на слици 2.86. Дакле, у сваком проводнику се индукује сложенопериодична електромоторна сила у облику поворке правоуглих импулса чија је учестаност одређена кретањем ротора. Проводници концентрисаног намотаја се налазе у положајима $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. Будући да је $B(0) = - B(\pi)$, електромоторне силе индуковане у наспрамним проводницима су супротног знака. Начин на који се један пар проводника повезује у контуру доводи до сабирања електромоторних сила, тако да је електромоторна сила индукована у једном навојку једнака $e_{1n} = 2\, e_{1p} = 2\, LR\Omega_m\, B(0)$. За концентрисани намотај са N_k навојака, електромоторна сила намотаја једнака је $e_k = 2\, N_k LR\Omega_m\, B(0)$. Она има облик поворке правоуглих импулса амплитуде

$$e_{\max}^{km} = 2\Omega_m B_{max} N_k LR\,.$$

Максимална вредност првог хармоника у поворци правоуглих импулса је $4/\pi$ пута већа од амплитуде импулса, тако да је ефективна вредност првог хармоника електромоторне силе индуковане у концентрисаном намотају једнака

$$e_{eff}^{km} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} 2\Omega_m B_{max} N_N LR =$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \Omega_m B_{max} N_N LR \approx 1{,}8\ \ \Omega_m B_{max} N_N LR\,.$$

Од интереса је упоредити добијену вредност са ефективном вредношћу електромоторне силе коју би имао намотај са једнаким бројем навојака,

али са проводницима који су простопериодично расподељени по обиму машине. На основу једначине (2.205), та вредност је

$$e_{eff}^{r} = \sqrt{2}\Omega_m B_{max} N_N LR \approx 1{,}41\,\Omega_m B_{max} N_N LR\,,$$

Може се закључити да је ефективна вредност индуковане електромоторне силе у намотају са расподељеним проводницима мања 4/π пута од електромоторне силе у концентрисаном намотају, односно, да износи приближно 78,5% поменуте електромоторне силе.

<u>Питање (2.40):</u>

Посматрати електричну машину у којој стални магнети ротора стварају магнетску индукцију у ваздушном зазору са простопериодичном расподелом $B(\theta) = B_m\cos(\theta\text{-}\theta_m)$, где је θ_m померај ротора у односу на статор. Статорски намотај има укупно N_N навојака, односно $2N_N$ проводника. Намотај се може извести на два начина. Први начин је формирање концентрисаног намотаја, са проводницима лоцираним у положајима $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. Други начин је формирање намотаја чији су проводници расподељени тако да се густина проводника простопериодично мења, то јест $N_S`(\theta) = N_{sm}\cos(\theta)$, при чему је укупан број проводника и даље једнак $2N_N$. Одредити максималну вредност флукса статора $\Psi_S(\theta_m)$ у оба случаја.

<u>Одговор (2.40):</u>

Веза густине N_{sm} и броја навојака N_N је одређена релацијом

$$N_N = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \left|N_S^{'}(\theta)\right| R\,\mathrm{d}\theta = 2R\,N_{S\max}\,,$$

у којој R представља полупречник ротора. Максимални флукс који се може имати у једном навојку једнак је производу површине $S = \pi RL$ полукружне површи која се ослања на навојак начињен од два дијаметрална супротна проводника, и средње вредности таласа магнетске индукције $B(\theta)$, $B_{sr} = 2B_m/\pi$. Максимална вредност флукса једнака је $\Phi_m = 2B_mLR$.

У случају када је намотај статора концентрисан, флукс статора може имати вршну вредност $\Psi_1 = 2B_mLRN_N$. Ова вредност се достиже за ротор у положају $\theta_m = \pi/2$, када вектор роторског флукса лежи на оси статорског намотаја.

Ако су навојци статора расподељени простопериодично, са густином проводника датом релацијом $N_S`(\theta) = N_{sm}\cos(\theta)$, флукс Ψ_2 који у намотају статора стварају стални магнети ротора у случају да је ротор постављен у положај $\theta_m = \pi/2$ износи

$$\psi_2 = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \Phi(\theta)\mathrm{d}N = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \left\{ \int_{\theta}^{\theta+\pi} RLB_m \cos(\xi - \pi/2)\mathrm{d}\xi \right\} RN'_S(\theta)\mathrm{d}\theta =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \left\{ \int_{\theta}^{\theta+\pi} RLB_m \sin(\xi)\mathrm{d}\xi \right\} RN_{S\max} \cos(\theta)\mathrm{d}\theta =$$

$$= \frac{RN_{S\max}}{2} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \left\{ \int_{\theta}^{\theta+\pi} \Phi_m \sin(\xi)\mathrm{d}\xi \right\} \cos(\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{RN_{S\max}\Phi_m}{2} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \{2\cos(\theta)\}\cos(\theta)\mathrm{d}\theta =$$

$$= R\Phi_m \frac{N_N}{2R}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} B_m LRN_N = \frac{\pi}{4}\psi_1$$

Дакле, у случају да су проводници статора расподељени простопериодично, флукс статора је $\pi/4$ пута мањи.

3 Машине за једносмерну струју

Пре градње првих електричних централа, електрична енергија се добијала из хемијских извора струје, који на својим прикључцима имају једносмеран напон. Стога су први експерименти и примене електричних машина били искључиво са машинама за једносмерну струју. Електроинжењери су проучили принципе рада ових машина, анализирали њихове карактеристике и пронашли начине да их конструишу и производе.

Производња, пренос и употреба електричне енергије у почетку су били засновани на примени електричних машина за једносмерну струју. У непосредној близини насеља, индустријских и других већих потрошача електричне енергије, грађене су електричне централе. Снага воденог тока или водене паре је претварана у електричну захваљујући раду генератора за једносмерну струју. Генератор је на својим прикључцима давао једносмерни напон не већи од неколико стотина волти. Уз помоћ пара проводника, електрична снага се преносила на даљине од највише неколико километара и предавала потрошачима. Првобитни потрошачи електричне енергије су били начињени тако да за напајање користе једносмерни напон. Сијалице су претварале електричну енергију у светлост, док су мотори за једносмерну струју стварали контролисани механички рад, потребан за покретање производних процеса.

Израда генератора и мотора за једносмерну струју за напоне веће од хиљаду волти везана је са техничким и технолошким потешкоћама, које ће бити објашњене доцније. Као последица релативно мале вредности једносмерног напона, у преносу већих снага биле су потребне веома велике струје. Пренос снаге од једног мегавата изискивао је струје веће од хиљаду ампера. Овакав пренос био је везан са значајним губицима, великим падом напона и потребом да се користе проводници веома великог пресека.

Савремени системи за производњу, пренос и дистрибуцију електричне енергије користе наизменичне струје фреквенције 50 или 60 Hz. Коришћењем трансформатора, релативно низак напон који даје електрични генератор данас се увећава до неколико стотина хиљада волти. Струја у преносним водовима се тако смањује, па се значајно умањују губици и падови напона. У близини потрошача, високи напон се трансформише и своди на ниво који одговара потрошачима. Трансформатор мења напонски ниво у складу са односом броја навојака у примарном и секундарном намотају.

Једносмерни напон се не може трансформисати коришћењем трансформатора, тако да је напон добијен на прикључцима генератора једносмерне струје у првим електричним централама, као и напон на преносним водовима морао одговарати напону на потрошачима. Мале вредности једносмерног напона на преносним водовима резултовале су падом напона, губицима и ограниченим дометом.

Генератори и мотори за једносмерну струју се данас све мање користе. Уместо њих, користе се напредније машине за наизменичну струју. Ипак, проучавање машина за једносмерну струју као првих електричних машина примерен је увод у принципе рада, анализу механичких и експлоатационих карактеристика, извођење електричних заменских шема, динамичког модела, дефинисање напајања и управљања, анализу губитака и друге задатке, проблеме и појаве везане за електричне машине.

Излагање у овом поглављу започиње описом принципа рада мотора и генератора за једносмерну струју. Дате су основне информације о конструкцији машина за једносмерну струју. Анализиран је рад механичког комутатора, направе која једносмерну струју извора усмерава у проводнике ротора на начин који зависи од положаја ротора, тако да се при обртању машине у ротору имају периодичне струје. Показано је како се може формирати намотај ротора и како се његови проводници повезују са комутатором. Изведени су изрази за моменат и електромоторну силу и изведен је математички модел машине који описује њено понашање током прелазних процеса.

На основу анализе рада у стационарном стању, добијена је електрична заменска шема. Она омогућује да се одреде струје, флукс и моменат машине у устаљеном стању, у условима када су напон напајања и брзина обртања познати. У оквиру поглавља, изведена је механичка карактеристика, која одређује зависност устаљене вредности брзине обртања од момента који машина развија на вратилу.

Анализирани су губици у намотајима и магнетском колу и проучени процеси загревања и хлађења. Дефинисане су највеће вредности струје, снаге и момента које машина може остварити у трајном раду и дефинисане номиналне вредности свих преосталих величина. Указано је на потребу за радом у области слабљења поља и изведене релевантне релације и карактеристике. Анализом промена трајно остваривог момента и краткотрајно достижног момента у функцији брзине, одређене су експлоатациона и транзијентна карактеристика машине.

3.1 Конструкција и принцип рада

Машине за једносмерну струју имају магнетско коло статора, магнетско коло ротора и роторски намотај. На статору могу имати статорски, *побудни* намотај или сталне магнете. Стални магнети у магнетском колу статора или сталне струје у намотају статора стварају флукс статора. Струје у роторским проводницима стварају магнетопобудну силу ротора. Количник магнетопобудне силе и магнетског отпора је флукс ротора. У претходном поглављу *Електромеханичко претварањ* показано је да векторски производ два флукса

$$\vec{M}_{em} = k\left[\vec{\Phi}_R \times \vec{\Phi}_S\right]$$

одређује електромагнетски моменат електричне машине, па је и моменат машине за једносмерну струју одређен векторским производом флукса ротора и флукса статора. Вектор момента је колинеаран са осом машине.

3.2 Конструкција статора

Статорски флукс се назива *флуксом побуде*, и добија се уз помоћ статорског намотаја у коме постоји једносмерна струја. Побудни флукс могу створити и перманентни магнети уграђени у магнетско коло статора. Случај у коме се побудни флукс добија захваљујући побудном намотају статора назива се *електромагнетска побуда*. У статорском намотају се има једносмерна струја која ствара статорску магнетопобудну силу и статорски флукс. Како је струја статора једносмерна, статорски флукс је непомичан.

Уместо статорског намотаја, машина може имати сталне магнете уграђене у магнетско коло статора. Перманентни магнети имају значајне вредности реманентне индукције B_r чак и у случају када нема спољашњег поља H. Њиховим дејством се остварује побудни флукс статора без потребе за уградњом статорског намотаја. На слици 3.1, линије статорског поља полазе од северног магнетског пола и простиру се према јужном полу пролазећи при томе кроз ротор.

Слика 3.1. Положај вектора статорског флукса код машине за једносмерну струју (A) са статорским намотајем у коме су сталне струје, и (B) код машине за једносмерну струју са сталним магнетима у магнетском колу статора.

3.3 Машине са независном побудом

Машине за једносмерну струју са перманентним магнетима на статору имају побудни флукс који не зависи од струје ротора. На исти начин, независан је и побудни флукс машине са побудним намотајем на статору, под условом да се овакав намотај напаја из засебног извора. Обе наведене врсте машина за једносмерну струју су *машине са независном побудом*. Машине са независном побудом су главни предмет проучавања у оквиру поглавља.

Постоје и машине за једносмерну струју код којих побуда није независна. Уколико се намотај статора (то јест намотај побуде) повеже на ред са намотајем ротора, или се побуда начини зависном од струје ротора на другачији начин, тада се ради о машини код које побуда није независна. Најчешће сусретана машина са зависном побудом је редни мотор, код кога се побудни намотај и намотај ротора повезују на ред. Поред редне побуде, постоји и паралелна побуда, која се користи код генератора и код које је побудни намотај повезан паралелно са арматурним. Ако истовремено постоји редна и паралелна побуда, ради се о машини са сложеном побудом.

Предмет проучавања у овом поглављу су машине за једносмерну струју са независном побудом.

3.4 Струја у проводницима ротора

Ротор машине за једносмерну струју има аксијално постављене проводнике у којима постоји електрична струја. У интеракцији са магнетском индукцијом побудног поља, ствара се сила која делује на проводнике ротора. Спрег сила ствара кретни моменат који делује на ротор. Нарочитом конструкцијом машине и начином повезивања проводника ротора постиже се да смер струје у проводницима који пролазе испод северног магнетског пола (N) буде непромењљив, и поред околности да се ротор обрће. Смер струје у проводницима који пролазе испод јужног пола је супротан од смера у проводницима који су у зони северног пола.

Слика 3.2. Положаји проводника ротора и смерови струја. (A) Ротор у положају θ_m = 0. Проводник 1 ротора у зони северног пола статора, проводник 2 ротора испод јужног пола статора. (B) Ротор померен у положај θ_m = π. Проводници 1 и 2 су заменили места.

Проводници 1 и 2 су уграђени у жлебове ротора и обрћу се истом брзином као и ротор. Након што ротор начини пола обртаја (слика 3.2-B), проводници 1 и 2 замене места. Да би се и даље имао позитиван момент, неопходно је променити смер струје у проводницима, што је на слици и приказано. У проводнику 1 се имао смер ⊗ док се налазио наспрам северног

пола статора. Када исти проводник услед обртања ротора дође наспрам јужног пола, мора се имати струја у смеру ⊙, како моменат и даље био позитиван. Слично се може закључити за проводник 2.

Проводници 1 и 2 творе једну контуру (навојак) ротора. Када се ротор обрће брзином Ω_m, ротор начини један обртај у времену $T = 2\pi/\Omega_m$. У сврху стварања момента који не би мењао знак, већ би био позитиван, струја у посматраној контури треба да мења знак у синхронизму са обртањем ротора. Струја треба да буде позитивна у временском интервалу $T/2 = \pi/\Omega_m$, а потом негативна током наредног интервала $T/2$. Дакле, струја у ротору мора да буде периодична.

За тренутак оставити по страни питање на који начин се остварују жељене роторске струје. Посматрајући слику 3.2 и уважавајући околност да ће, без обзира на обртање ротора, роторски проводник испод северног пола увек имати смер струје ⊗, док ће роторски проводник испод јужног пола увек имати смер струје ⊙, магнетопобудна сила и флукс ротора могу се представити вектором који је окренут на доле. С друге стране, вектор статорског поља је усмерен хоризонтално, с лева на десно. Закључује се да је угао који творе два флукса константан и једнак $\pi/2$, без обзира на брзину и смер обртања ротора. Овим је испуњен оптимални услов за стварање константног момента.

Посматрани пар роторских проводника налази се у зони статорских полова. На проводнике 1 и 2 (слика 3.2-А) делују силе чији спрег даје позитиван момент, то јест моменат који поспешује кретање у смеру супротном од казаљке на часовнику (CCW, *Counter Clock Wise*). Електромагнетски моменат је одређен једначином (3.1) у којој величина i представља јачину струје у проводницима 1 и 2 ротора, l дужину једног проводника, B магнетску индукцију у зони статорских магнетских полова и D пречник ротора.

$$\vec{F} = i(\vec{l} \times \vec{B}), \qquad (3.1)$$
$$M_{em} = l \cdot B \cdot i \cdot D.$$

3.5 Механички комутатор

Струје у ротору машине за једносмерну струју добијају се из извора једносмерне струје. Струја извора се доводи на *механички комутатор*. Део комутатора који се обрће са ротором зове се *колектор*, док статорски део комутатора има непомичне угљене четкице. Колектор је причвршћен за вратило ротора и обрће се једнаком брзином као и ротор. Услед тога, не-

помичне угљене четкице које су постављене дијаметрално супротно клизе по прстенастом колектору. Прстенасти колектор је подељен на већи број сегмената који су међу собом изоловани. Сегменти колектора се зову *колекторске ламеле* или *кришке*. Ламеле су повезане са навојцима ротора на начин који ће бити описан доцније.

Једносмерна струја извора се доводи на дијаметрално супротно постављене четкице. Непомичне четкице належу на ламеле колектора, усмеравајући тако струју у роторске проводнике. Када се ротор обрће, четкице клизе са једног пара колекторских ламела на наредни пар. Као последица, долази до промене расподеле струје у роторским проводницима. Као крајњи резултат, у ротору се имају периодичне струје, такве да стварају векторе магнетопобудне силе и флукса ротора непомичне у односу на статор, како је и приказано на слици 3.2.

Механички комутатор претвара једносмерне струје, добијене из извора којим се напаја роторски намотај, у периодичне струје, какве постоје у роторским проводницима. Учестаност роторских струја одређена је брзином обртања ротора. Улога механичког комутатора је слична улози савремених транзисторских инвертора, претварача снаге који се напајају једносмерним напоном/струјом, и који на излазу дају наизменичне напоне/струје. Облици струја и напона који се имају код машине са механичким комутатором веома су слични облицима струја и напона у систему са једносмерно напајаним транзисторским инвертором чије излазне, наизменичне струје напајају асинхроне или синхроне машине.

У савременим применама електричних машина улогу механичког комутатора преузимају статички претварачи снаге (транзисторски инвертори), док се машине за једносмерну струју замењују машинама за наизменичну струју.

Начин извођења роторског намотаја као и начин повезивања намотаја са колектором може бити релативно сложен. Темељно проучавање различитих начина формирања роторског намотаја машине за једносмерну струју превазилази програм овог предмета. Ради разумевања рада колектора, у наредним корацима анализирани су релативно једноставни примери, који илуструју основну функцију и начин рада механичког колектора.

Слика 3.3. Механички колектор. (A, B) четкице. (S1, S2) ламеле колектора.

3.6 Намотај ротора

На слици 3.3 је приказан ротор са једним навојком који чине серијски повезани проводници 1 и 2. Проводници су повезани са колектором, који се састоји од ламела S1 и S2. Овакав колектор се може начинити тако што би се метални шупљи цилиндар пресекао на два међусобно изолована дела. Предњи крај проводника 1 је повезан са ламелом S1, док је предњи крај проводника 2 повезан са ламелом S2. На задњем делу ротора, крајеви проводника 1 и 2 су спојени повратним проводником. Четкице A и B су повезане са струјним извором који даје струју $i(t)$. У посматраном положају, четкице A и B належу на ламеле S1 и S2. Дакле, постоји електрични контакт између четкица и колекторске ламеле која је у датим тренутку у додиру са четкицом. У положају приказаном на цртежу, струја у проводнику 1 има смер $\otimes$, док струја у проводнику 2 има смер $\odot$. Када се ротор окрене за π, проводници ће заменити места. Истовремено, места ће заменити и

ламеле S1 и S2, које су причвршћене за ротор и са њиме се обрћу. Сада ће проводник 1 бити испод јужног пола (десно), али ће се променити и смер струје у њему, тако да ће се у роторском проводнику који се налази испод северног пола и даље имати струја у смеру ⊗, док ће се у проводнику који је близак јужном полу имати струја у смеру ⊙.

Струја која постоји у сваком од проводника мења смер у синхронизму са обртањем ротора. Дакле, комутатор, кога чине четкице и колектор са две ламеле, претвара једносмерну струју извора у периодичну струју у роторским проводницима. Као последица, посматрач који се налази у статорском координатном систему (то јест не помера се у односу на статор) уочава да нема промене у расподели струје у проводницима ротора. Наиме, испод магнетског пола N, у роторским проводницима се има смер струје ⊗, док се испод пола S има струја у смеру ⊙. Оваква расподела се задржава без обзира на околност да се ротор обрће.

Слика 3.4. Положај роторског струјног плашта у односу на магнетске полове статора.

У пракси, роторски намотај има већи број проводника који су равномерно расподељени по обиму ротора. Проводници су повезани са ламелама колектора. Прстенасти колектор може имати већи број ламела које су међу собом изоловане, и које су у електричној вези са два или више проводника. Струја i_a се доводи на ротор помоћу угљених четкица које додирују колектор, преносећи електричну струју ламелама. Комутатор усмерава струју у проводнике ротора тако да се у сваком положају ротора има расподела

струје у проводницима ротора на начин приказан на слици 3.4. Потребно је уочити да се ротор обрће, али да струје ротора стварају роторски струјни плашт који се не обрће већ је непомичан у односу на статор. Магнетопобудна сила и флукс ротора имају вертикални правац, без обзира на обртање самог ротора. Дакле, роторски флукс ће бити непомичан у односу на статор, па је угао између статорског и роторског флукса $\pi/2$. Машине за једносмерну струју најчешће имају релативно велики број роторских проводника и колекторских ламела. Изглед ротора машине за једносмерну струју који се сусреће у пракси дат је на слици 3.5.

Слика 3.5. Изглед ротора машине за једносмерну струју. (A) Изглед колектора. (B) Изглед магнетског и струјног кола ротора машине за једносмерну струју. Приказан је поглед са стране колектора.

На слици 3.6 приказан је начин повезивања роторских проводника са ламелама колектора у случају када ротор има 4 жлеба, 4 колекторске ламеле и 8 проводника. Приказани пример се ретко среће у пракси, али је одабран због прегледности. Проводници P1÷P8 су положени у жлебове тако да се у сваком жлебу налазе по два проводника. Ротор се посматра са стране на којој је уграђен колектор. У десном делу слике 3.6 испрекиданим линијама приказане су везе изведене са стране на којој није уграђен колектор. Повезивањем проводника са задње стране ротора формирају се четири навојка, и то P1-P2, P3-P4, P5-P6 и P6-P7. Везе изведене са предње стране ротора, са које се налази и колектор, приказане су пуним линијама у левом делу слике 3.6.

Слика 3.6: Повезивање проводника ротора са ламелама колектора у случају када у 4 роторска жлеба постоји укупно 8 проводника.

Ламела L1 је тако повезана са проводницима P8 и P1, ламела L2 са проводницима P2 и P3, ламела L3 са проводницима P4 и P5, док је ламела L2 повезана са проводницима P6 и P7. Везе које спајају ламеле са крајевима роторских проводника на предњем, видљивом крају ротора уцртане су пуним линијама, док су везе између крајева роторских проводника који излазе из жлебова на задњем делу ротора уцртане испрекиданим линијама јер се оне не могу видети. У посматраном положају ротора, четкице A и B додирују ламеле L1 и L3, тако да се струја извора i_a дели у две паралелне гране, на начин дат на слици 3.7. У сваком роторском проводнику постоји струја јачине $i_a/2$.

Слика 3.7. Смерови струје у проводницима ротора који има 8 проводника расподељених у 4 жлеба.

У проводницима који се налазе испод северног магнетског пола статора смер струје је ⊗, док је у проводницима који се налазе испод јужног магнетског пола смер струје ⊙. Уколико се ротор окрене за $\pi/2$, четкица A ће доћи у додир са ламелом L4, док ће четкица B додиривати ламелу L2. Анализом веза између проводника и ламела, датим на слици 3.6, може се потврдити да ће и после померања ротора смер струје у проводницима који ће се наћи испод северног магнетског пола остати ⊗, док ће у проводницима који ће се наћи испод јужног пола смер струје остати ⊙. Струја у сваком од проводника ротора ће имати смер ⊗ све док се проводник налази у зони северног магнетског пола. Смер ће се променити и бити ⊙ када проводник пролази испод јужног магнетског пола статора. При обртању ротора константном брзином, у ротору постоје наизменичне струје чија је кружна учестаност одређена брзином обртања ротора.

Шема везе роторског струјног кола може се представити на начин дат на слици 3.8.

Приказ једноставне конструкције ротора са 4 жлеба и 8 проводника показује да механички комутатор омогућује стварање роторског струјног плашта који се не обрће у односу на статор, дајући тако вектор магнетопобудне силе ротора и вектор флукса ротора који се не померају у односу на статорски флукс. За напајање роторског намотаја датог на сликама 3.7 и 3.8 користи се извор сталне струје који треба повезати са четкицама A и B.

Слика 3.8: Шема везе роторског струјног кола.

При обртању ротора, четкице усмеравају струју преко ламела колектора у проводнике ротора. У проводницима ротора постоје промењиве, наизменичне струје чија је учестаност одређена брзином обртања, што омогућује стварања роторског струјног плашта који се не обрће у односу на статор. Роторске струје приказане ознакама ⊗ и ⊙ на слици 3.7 стварају роторски флукс који се може представити вектором положеним у вертикал-

ном правцу, под углом од π/2 у односу на правац статорског поља. Према правилу десне завојнице, роторски флукс је усмерен одозго надоле.

3.7 Комутација

Као што је показано у претходном примеру, у проводницима ротора који су у зони испод северног пола постоји струја супротног смера од струје проводника испод јужног пола. При обртању, сваки проводник ротора се током једне половине обртаја налази испод северног магнетског пола, док се у другој половини обртаја налази испод јужног пола. Дакле, смер струје у једном проводнику се мења са учестаношћу одређеном брзином обртања. На угљене четкице које су причвршћене за статор, и које належу на ламеле колектора доводи се стална (једносмерна) струја извора. Током обртања, четкице належу на ламеле које се у датом тренутку под њима налазе. Прелазак четкице са једне на другу ламелу је праћен променом смера струје у проводницима ротора. Усмеравање сталне струје помоћу колектора даје наизменичне струје у роторским проводницима. Прелазак четкице са једне на другу ламелу и последична промена струје у проводницима ротора зове се *комутација*. Током преласка, четкица једновремено належе на две суседне четкице, чиме ствара кратак спој роторских навојака чији су крајеви повезани на суседне четкице. Случај у коме четкица А истовремено належе на ламеле L1 и L2 дат је на слици 3.9.

Слика 3.9. Кратак спој роторских навојака током комутације

Прелазећи из положаја датог на слици 3.8 у положај дат на слици 3.9, ротор се обрне за π/4 у смеру казаљке на сату. Будући да четкица А на слици 3.9 кратко спаја ламеле L1 и L2, док четкица В кратко спаја ламеле

L3 и L4, навојци P1-P2 и P5-P6 се током комутације налазе у кратком споју. Ако се ротор обрне за даљих π/4 у истом смеру, доћи ће у положај дат на слици 3.10, у коме четкица A належе на ламелу L2. Шему везе роторских проводника дату на слици 3.10 треба упоредити са шемама датим на слици 3.7.

Слика 3.10. Положај ротора и шема везе после помераја од π/2.

За посматрани ротор, комутација се понавља четири пута у сваком обртају. Потребно је анализирати проблеме који могу настати периодичним кратким спајањем навојака ротора приликом комутације. Полазећи од начина на који су проводници ротора положени у жлебове (слика 3.6), може се закључити да се, током комутације коју приказује слика 3.9, проводници кратко спојених навојака P1-P2 и P5-P6 налазе на половини растојања између два статорска пола. Положај кратко спојених навојака је дат на слици 3.11 на којој су преостали навојци изостављени. Допринос статора магнетској индукцији у ваздушном зазору је највећи у области статорских магнетских полова. Уколико је на месту проводника P1, P2, P5 и P6 радијална компонента магнетске индукције блиска нули, тада су и електромоторне силе индуковане у овим проводницима блиске нули, тако да кратак спој навојака не доводи до успостављања значајнијих струја.

У пракси се сусрећу машине за једносмерну струју са значајно већим бројем ламела, роторских жлебова и проводника ротора. Ламеле колектора су тада повезане са проводницима ротора на начин који ће бити доцније објашњен. Без обзира на број ламела, процес комутације настаје када непомична угљена четкица прелази са једне на другу ламелу колектора. Колектор се обрће и његове ламеле клизе испод четкица брзином која је одређена обртањем ротора.

Слика 3.11. Положај кратко спојених навојака током комутације.

Број комутација током једног обртаја ротора одређен је бројем ламела колектора којих је најчешће више десетина. Код свих начина конструкције ротора, колекторске ламеле су спојене са редно повезаним роторским проводницима, тако да је између појединих ламела повезан један део роторског намотаја. У случају када четкица належе на две суседне ламеле, делови роторског намотаја се доводе у кратак спој. Струја кратког споја суседних ламела се успоставља кроз четкице. Стога је од великог значаја да машина буде пројектована тако да у кратко спојеним деловима роторског намотаја не буде електромоторне силе. Електромоторне силе у кратко спојеним навојцима довеле би до струја кроз четкице, појаве варничења, електричног лука и оштећења четкица и колектора.

Слика 3.11 показује да се током комутације у машини са 4 ламеле и 4 роторска жлеба не јављају струје кратког споја стога што се навојци кратко спојени четкицама налазе у зони између статорских полова, у којој нема радијалне компоненте магнетске индукције. Исти ефекат треба постићи код свих машина за једносмерну струју. Код машина са већим бројем роторских ламела, сви проводници који припадају кратко спојеним навојцима током комутације морају бити удаљени од магнетских полова статора. Области између магнетских полова се називају се *неутралним зонама*. Приликом пројектовања машина за једносмерну струју предузимају се посебне мере да би се смањила јачина магнетског поља у неутралним зонама. О тим речима биће речи у наредним одељцима.

3.8 Функција комутатора

Механички комутатор машине за једносмерну струју обавља функцију претварања једносмерних струја, доведених преко четкица, у симетричне периодичне струје какве постоје у проводницима ротора. Један пример промене струја у роторским проводницима дат је на слици 3.12 (B). Приказана струја периодично мења смер. Између интервала комутације који су означени осенченим површима, јачина струје i_p је једнака $+i_a/2$ или $-i_a/2$. Интервали комутације су релативно кратки, па је облик роторских струја близак поворци правоугаоних импулса амплитуде $-i_a/2$. Дакле, роторске струје нису простопериодичне. Струја i_p на слици 3.12 (B) је симетрична периодична струја са средњом вредношћу једнаком нули[1].

Дакле, комутатор приказан на слици 3.12 (A) је механички претварач који претвара једносмерну струју у наизменичну струју. Учестаност струја које постоје у проводницима ротора је једнозначно одређена брзином обртања ротора.

У случају када се машина за једносмерну струју користи као генератор, ротор се покреће захваљујући дејству погонске турбине. Проводници ротора се обрћу у магнетском пољу побудног флукса који ствара статор. У проводницима ротора се индукује електромоторна сила. У зони северног и јужног магнетског пола, магнетска индукција има супротан смер. Стога се и електромоторне силе индуковане у проводницима испод супротних полова разликују у знаку. Посматрајући електромоторну силу индуковану у једном од проводника, долази се до закључка да је она периодично мења знак, те да је њена учестаност одређена брзином обртања ротора. Пример промене електромоторне силе индуковане у једном проводнику услед обртања ротора дат је на слици 3.12 (B). У наредним одељцима је показано да се наизменичне електромоторне силе проводника сабирају на такав начин да се између четкица А и Б комутатора има једносмерни напон. Дакле, механички комутатор претвара наизменичне електромоторне силе, индуковане у проводницима, у једносмерни напон, расположив између четкица.

[1] У ширем смислу, такву струју је могуће звати *наизменична*. У ужем смислу, под наизменичним струјама се подразумевају само синусоидалне функције времена које се називају и синусним или простопериодичним струјама.

Слика 3.12 Комутатор као претварач једносмерних величина у наизменичне. (A) Расподела струја у проводницима ротора. (B) Промена електромоторне силе и струје у проводнику ротора.

3.9 Начин формирања намотаја ротора

Ради бољег разумевања рада машина за једносмерну струју и функционисања механичког комутатора, овде је детаљније описан намотај ротора који се састоји од 8 проводника, повезаних са колектором који има 4 ламеле. Ради лакшег разумевања начина на који су проводници повезани са колектором, потребно је приказати роторски намотај у *развијеном* облику. Развијени приказ се може добити мисаоним експериментом у коме се роторски цилиндар расече дуж полупречника који је означен испрекиданом линијом на слици 3.13 (A). Потребно је замислити да се цилиндрични омотач ротора исправља на начин дат на слици 3.13(B). Коначно, довођењем цилиндричног омотача у раван, добија се *развијени* приказ, дат на слици 3.13 (C). Проводници ротора леже у равни изнад које су постављени магнетски полови статора. Треба уочити да су проводници P1÷P4 положени испод северног магнетског пола статора, једнако као и на слици 3.13 (A).

На слици 3.15, ламеле су означене са L1÷L4, док су проводници означени са P1÷P8. Проводници P1÷P4 имају струју у смеру ⊗ и леже у зони северног пола статора. Проводници P5÷P8 са струјом у смеру ⊙ леже у зони јужног пола. При означавању смера струје, претпоставља се да је посматрач са предње стране ротора, где се налази и колектор, што је приказано на слици 3.14. Ознака ⊗ указује на струју у смеру од колектора према задњем делу ротора, док ознака ⊙ указује на струју у смеру од задњег дела ротора према колектору и према посматрачу.

Слика 3.13. Развијени приказ ротора.

Слика 3.14. Ротор машине за једносмерну струју посматран са стране колектора.

Приказане четири ламеле колектора могу се добити тако што се метални прстен подели на четири једнака сегмента међу којима постоји електрична изолација. Ламеле се могу представити у развијеном облику, на исти начин као и проводници (слика 3.15). Треба приметити да ширина развијеног приказа намотаја и ламела одговара обиму ротора, односно промени угла од 0 до 2π. На развијеном приказу на слици 3.15 дати су проводници, четкице и колекторске ламеле. У горњем делу, означен је положај магнетских полова статора. У посматраном положају, проводници P1÷P4 се налазе испод северног магнетског пола. Када се ротор обрће, постоји релативно кретање колектора и проводника причвршћених за ротор у односу на магнетске полове статора и четкице које су причвршћене за статор. Ефекти обртања ротора се на слици 3.15 манифестују као транслаторно кретање роторских проводника и колекторских ламела слева на десно или здесна на лево, у зависности од смера обртања, при чему магнетски полови статора и угљене четкице остају непокретни.

Слика 3.15. Развијени приказ везе проводника ротора и ламела колектора. Четкице належу на ламеле L1 и L3.

Слика приказује тренутак у коме четкица А належе на ламелу 1, док четкица В належе на ламелу 3. Проводници ротора P1÷P8 су нацртани дебљим црним линијама, док су њихове међувезе и спојеви са ламелама уцртани тањим линијама. Дебљина линија је мењана ради прегледности цртежа, и не имплицира промену попречног пресека актуелних проводника. Испрекидане линије приказују везе између проводника изведене са задње стране ротора.

Четкице А и В су прикључене на извор сталне струје I_A. У посматраном положају, четкица А належе на ламелу L1, која је повезана са проводницима P1 и P4. Из четкице А, струја се грана у две паралелне гране. У свакој од грана постоји једна половина струје извора $I_A/2$. У првој грани, струја јачине $I_A/2$ се усмерава у роторски проводник P1 и њен смер је од колектора према *задњем* делу ротора. Са задње стране, проводник P1 је повезан са проводником P6 везом која је на слици дата испрекиданом линијом. Смер струје у проводнику P6 је ка посматрачу и колектору. По доласку на предњу страну ротора, проводник P6 се везује за ламелу L2, која није у додиру са четкицама, па се струја усмерава у проводник P3. Са задње стране ротора, проводник P3 је повезан са проводником P8, у коме постоји струја $I_A/2$ у смеру ка посматрачу и који је повезан са ламелом L3 и четкицом В. Друга грана пролази кроз проводнике P4 и P7, долази у кон-

такт са ламелом 4, наставља кроз проводнике P2 и P5 и завршава у ламели L3. Дакле, у ламели L3 и четкици B се стичу струје две паралелне гране, чиме је успостављено струјно коло извора I_A. Имајући у виду положај проводника, дат на слици 3.13, може се закључити да колектор усмерава струју извора у проводнике ротора тако да у свим проводницима који леже испод северног магнетског пола статора постоји струја $I_A/2$ у смеру од колектора према зачељу машине, док у свим проводницима који су се нашли испод јужног магнетског пола статора постоји струја исте јачине у супротном смеру.

Када се ротор окрене за $\pi/2$, четкица A долази у контакт са ламелом 2, док четкица B додирује ламелу 4. Расподела струје у проводницима ротора која се има у том стању дата је на слици 3.16. У новом положају ротора, проводници P3, P4, P5 и P6 су се нашли испод северног магнетског пола статора. Смер струје у овим проводницима је од посматрача ка зачељу ротора. Проводници P7, P8, P1 и P2 долазе у зону јужног магнетског пола и имају струје у супротном смеру. Поређењем са претходним случајем (слика 3.15), може се закључити да обртање ротора доводи до промене струје у проводницима ротора, али при томе расподела роторске струје у односу на статор остаје непромењена. Другим речима, без обзира на обртање ротора, струје у проводницима који се нађу испод северног пола задржава смер $\otimes$, док су под јужним полом проводници са струјом у смеру $\odot$. На такав начин, обртање ротора не мења правац и смер магнетопобудне силе и флукса ротора у односу на статор. Посматрани вектори су непомични у односу на статор и статорски флукс.

Уколико се одабере један од роторских проводника и прати промена струје у њему, долази се до закључка да се ради наизменичној струји. Дакле, механички комутатор претвара једносмерну струју I_A у наизменичну.

Начин формирања роторског намотаја који је приказан на слици 3.15 је такав да се полази од проводника P1, који се повезује са ламелом L1 на чеоној страни ротора док се на зачељу повезује са проводником P6. Веза P1-P6 на зачељу машине је изведена тако да се крај P1 везује са *петим проводником на десно*. Проводник P6 се са чеоне стране најпре повеже са ламелом L2, а потом и са проводником P3, *трећим на лево*. На даље се проводници редом повезују тако што се на зачељу формира веза са петим проводником на десно, док се на челу (са стране колектора) успоставља веза са трећим проводником на лево. Потребно је уочити да се на описани начин формирају навојци са скраћеним навојним кораком.

Слика 3.16. Смер струја у проводницима ротора у положају где четкица А належе на ламелу L2.

Приступ се може и генерализовати. Код ротора са 2N проводника, веза на зачељу се прави са N+1 проводником на десно, док се везе са стране колектора праве са N-1 проводником на лево. Овде је описан принцип формирања намотаја ротора. У пракси, машине за једносмерну струју имају више од осам жлебова. У једном жлебу најчешће има више проводник, па је формирање намотаја ротора и његово повезивање са ламелама сложеније од приказа на слици 3.15. Намотај ротора је најчешће двослојни и може се начинити у петљастој форми, као на слици 3.15, или у валовитој форми[2].

На слици 3.17 је дат чеони изглед ротора чија је развијена шема дата на слици 3.15. Ознакама ⊙ и ⊗ су приказани проводници ротора. Пуним ли-

[2] Више информација о намотајима електричних машина може се наћи у публикацији *Машине I, скрипта* проф. Милоша Петровића коју је објавио Електротехнички факултет у Београду 1972. године, као и публикацији *Електричне машине I* и *Електричне машине II* проф. Јожефа Варге коју је објавила Виша техничка школа у Суботици 2006. године.

нијама на којима постоје стрелице приказано је повезивање роторских проводника на чеоној страни, на страни колектора. Испрекиданим линијама је приказано повезивање проводника на зачељу, то јест задњем делу ротора. Ознака P1P6 поред испрекидане линије означава да се ради о вези између проводника P1 и P6 која је изведена на зачељу ротора. Поређење датог приказа са сликом 3.15 илуструје предности развијене шеме.

Слика 3.17. Чеони поглед на намотај ротора чија је развијена шема дата на слици 3.15.

3.10 Проблеми са комутацијом

Посматрајући пример роторског намотаја са 8 проводника и 4 колекторске ламеле, анализиран на претходним страницама, закључује се да између четкица A и B у сваком тренутку постоје две паралелне гране. У свакој грани постоје 4 редно повезана проводника. Струја у роторским проводни-

цима једнака је половини струје извора који је прикључен на четкице колектора.

Када четкица прелази са ламеле 1 на ламелу 2, догађа се и прелазак четкице B са ламеле 3 на ламелу 4. Прелазак четкица са ламеле на ламелу доводи до промене смера струје у појединим проводницима ротора. Приликом комутације која је приказана на слици 3.18, четкица A кратко спаја ламеле L1 и L2 док четкица B кратко спаја ламеле L3 и L4. Услед кратког споја између суседних ламела колектора, навојак ротора који чине проводници P1 и P6 је кратко спојен преко четкице A, док је навојак P2-P5 кратко спојен преко четкице B.

У положају датом на слици 3.15, смер струје у проводницима P1 и P2 је ⊗, док у проводницима P5 и P6 постоји струја у смеру ⊙. Када се ротор помери за $\pi/2$ и дође у положај дат на слици 3.16, смер струје у проводницима P1 и P2 постаје ⊙, док се смер струје у проводницима P5 и P6 мења у ⊗. Дакле, током комутације долази до промене смера струје у деловима роторског намотаја који је кратко спојен четкицама. На слици 3.18 проводници кратко спојених навојака су нацртани дебљим линијама.

У случају да у датом тренутку постоји значајна вредност електромоторне силе у контури P1-P6, кроз четкицу A ће се успоставити струја кратког споја. На исти начин, електромоторна сила у контури P2-P5 довешће до успостављања струје кратког споја кроз четкицу B. Јачина струје кратког споја је одређена количником електромоторне силе и импедансе кратко спојене контуре. Струја кратког споја у навојцима који комутују увећава укупну струју четкица као и густину струје на површини додира између четкице и ламеле. Услед прекомерног загревања четкица може доћи до стварања електричног лука што доводи до убрзаног трошења угљених четкица и оштећења на колектору. Код лоше комутације, постоји сталан електрични лук између четкица и колектора. Услед обртања колектора, део усијаног, јонизованог гаса који настаје испод четкице A може остати приљубљен уз површ колектора, крећући се према четкици B. Уколико је комутација врло лоша, а електрични лук довољно велики, може се успоставити електрични лук између четкица A и B. У таквом стању, које се зове *кружна ватра*, постоји кратак спој извора I_A као и кратак спој свих навојака ротора, што доводи до трајног оштећења намотаја и колектора.

Дакле, лоша комутација доводи до увећања губитака, ствара оштећења колектора и четкица, и може довести до кружне ватре и трајног оштећења ротора. Стога је од значаја да током комутације дате на слици 3.18 електромоторна сила у контурама P1-P6 и P2-P5 буде једнака нули. У положају датом на слици, ови проводници се налазе између магнетских полова статора, у неутралним зонама означеним са NZ. На пресеку машине датом на слици 3.17, неутралне зоне се налазе у горњем и доњем делу роторског цилиндра, под углом од $\pi/2$ у односу на четкице. Будући да је у неутрал-

ним зонама растојање између ротора и статора врло велико, радијална компонента магнетског поља наилази на велику магнетску отпорност. Стога се може сматрати да је радијална компонента магнетске индукције у неутралним зонама веома мала. Дакле, оправдана је претпоставка да се електромоторна сила индукована у проводницима ротора који пролазе кроз неутралну зону може занемарити.

Линије магнетског поља статора чији је пресек дат на слици 3.17 излазе из северног магнетског пола статора, пролазе магнетским колом ротора и улазе у јужни магнетски пол статора. Оправдано је претпоставити да постоје линије поља које пролазе поред проводника који се налазе у неутралној зони. У том случају, ради се тангенцијалној компоненти поља које је колинеарна са вектором периферијске брзине кретања. Индуковано електрично поље је одређено векторским производом брзине и магнетске индукције, а векторски производ колинеарних вектора је једнак нули, може се закључити да тангенцијална компонента магнетског поља у неутралној зони неће довести до индуковања електромоторне силе.

Проводници P3, P4, P7 и P8 се налазе у зони магнетских полова, где постоји значајна радијална компонента магнетске индукције, па се у проводницима индукују електромоторне силе пропорционалне брзини обртања ротора, магнетској индукцији и дужини проводника. Проводници контуре P3-P8 нису под истим магнетским полом, па се у њима индукују електромоторне силе различитог смера. Начин на који је изведена редна веза ових проводника (слика 3.18) доводи до сабирања њихових електромоторних сила. Занемарујући отпорност навојка, напон који се јавља између ламела L2 и L3 двоструко је већи од електромоторне силе индуковане у једном проводнику.

Ради постизања комутације на начин који не резултује варничењем и електричним луком, потребно је да између магнетских полова статора постоји довољно широка *неутрална зона* у којој је магнетска индукција блиска нули. Комутатор треба повезати са проводницима ротора тако да се приликом сваке комутације у неутралној зони налазе проводници управо оних навојака који су током комутације у кратком споју. Кратак спој навојака стварају четкице током интервала у коме належу на две суседне ламеле. Дакле, угаона ширина магнетских полова статора мора бити мања од π, како би постојале две неутралне зоне између полова. Као последица, један део роторских проводника ће увек лежати у неутралној зони, где магнетска индукција има значајно мању вредност. Повећање ширине неутралних зона смањује проблеме са комутацијом, али умањује број роторских проводника који су захваћени магнетским пољем статора и који доприносе електромеханичком претварању енергије.

Слика 3.18. Комутација при којој су ламеле L1 и L2 кратко спојене.

Питање (3.1):

На слици 3.18, кратко спојени навојци P2-P5 и P1-P6 имају проводнике који се налазе на ободу неутралне зоне, у близини магнетских полова. Хоће ли близина полова довести до индуковања електромоторних сила и успостављања струје кратког споја?

Одговор (3.1):

Слика 3.18 је нацртана тако да су проводници P1, P2, P5 и P6 на ободу неутралних зона, у близини магнетских полова. У том положају је оправдано очекивати да радијална компонента магнетске индукције буде већа него у средини неутралних зона. Проводници P2 и P5 чине контуру која је на слици 3.18 кратко спојена четкицом B. Они су положени на ободу северног пола, симетрично у односу на сам пол. Из разлога симетрије, радијална компонента магнетског поља која настаје услед близине северног магнетског пола у положајима P2 и P5 има исту вредност. Стога су електромоторне силе индуковане у проводницима P2 и P5 једнаке по амплитуди и смеру. Проводници P2 и P5 се повезују у навојак P2-P5 на начин који доводи до поништавања електромоторних сила у проводницима. Дакле,

електромоторна сила навојка P2-P5 у положају датом на слици 3.18 једнака је нули захваљујући томе што су проводници P2 и P5 положени симетрично у односу на северни пол. Уколико се проводници налазе на самом ободу неутралне зоне, у непосредној близини пола, могућа је појава електромоторне силе у проводницима P2 и P5, али ће електромоторна сила у контури P2-P5 бити једнака нули. Исти закључак се може извести за проводнике P1 и P6.

3.11 Реакција индукта

Одржавање малих јачина магнетске индукције у неутралним зонама отежано је присуством магнетопобудне силе ротора. На слици 3.19 дат је упрошћени приказ поља статора, које се простире у хоризонталном правцу (A) и поља ротора, створеног роторским струјним плаштом, које се простире у вертикалном правцу (B). Може се закључити да струје у ротору стварају роторски флукс чији се северни и јужни пол налазе управо у неутралној зони, где се налазе проводници које су током комутације кратко спојени четкицама. Резултантно магнетско поље машине је збир статорског и роторског поља, и може се приказати на начин дат на слици 3.19 (C). Статорски и роторски флукс се могу представити векторима Φ_S и Φ_R (D), који су међусобно нормални.

Ротор машине се за једносмерну струју се зове и *арматура*, због изгледа роторских проводника који је дат на слици 3.5 (B). У литератури се користи и име *индукт*, зато што се у проводницима ротора индукују електромоторне силе пропорционалне угаоној брзини обртања и флуксу статора. Струја I_a која се доводи на четкице се зове *арматурна струја* док се напон $U_a = U_{AB}$ између четкица A и B зове *арматурни напон*. Магнетопобудна сила и флукс које стварају струје у роторским проводницима називају се *реакцијом индукта*. Разлог за коришћење оваквог назива је околност да електромоторна сила у ротору настају услед флукса статора, док је струја ротора одређена том електромоторном силом. Будући да струја ротора ствара роторски флукс, овакав флукс настаје као *реакција* на статорску побуду, која је предуслов за индуковање електромоторне силе. Статор машине за једносмерну струју се зове и *индуктор*.

Слика 3.19. Реакција индукта и резултантни флукс.

Флукс реакције индукта је релативно мали зато што линије роторског поља излазе из магнетског кола ротора у неутралним зонама, где постоји врло велики ваздушни зазор. Дакле, флукс ротора прелази у област са врло малом пермеабилношћу (μ_o) и врло великим магнетским отпором. Стога и магнетска индукција у неутралној зони има релативно малу вредност. Ипак, роторско поље у неутралној зони може неповољно утицати на комутацију. Присуство магнетске индукције у неутралној зони доводи до индуковања електромоторне силе у проводницима који пролазе неутралном зоном и који су захваћени комутацијом. Крајеви контура које граде поменути проводници су повезани са суседним ламелама колектора. Управо ти проводници су кратко спојени четкицама које належу на суседне ламеле. У кратко спојеном колу које стварају проводници, ламеле и четкице, индукована електромоторна сила ствара струју кратког споја која може довести до електричног лука на споју ламела и четкица. Стога се машине за једносмерну струју конструишу тако да поседују додате елементе чија је сврха умањење магнетске индукције у неутралним зонама. Машине за једносмерну струју могу имати *компензациони намотај* и *помоћне полове* који се пројектују и израђују тако да се противе реакцији индукта. Они ума-

њују магнетску индукцију у неутралној зони и осигуравају комутацију без електричног лука.

3.12 Струјна и магнетска кола

Елементи конструкције сваке електричне машине могу се поделити на магнетско и струјно коло. У општем случају, могуће је издвојити четири главне целине,

- магнетско коло статора,
- магнетско коло ротора,
- струјна кола статора и
- струјно коло ротора.

Слика 3.20. Конструкција машине за једносмерну струју.

На слици 3.20 дат је пресек машине за једносмерну струју на коме су приказани основни елементи струјних и магнетских кола машине. На слици није приказан комутатор, који је описан у претходним поглављима. Магнетско коло ротора (A) има средишњи отвор за вратило и жлебове на периферији. Делови магнетског кола статора су главни полови (B), јарам (C) и помоћни полови (D). Струјно коло ротора (F) има проводнике смештене у роторске жлебове и повезане са колектором на начин описан у

претходним одељцима. Струјна кола статора су побудни намотај (G), компензациони намотај (E) и намотај помоћних полова (H). Овде ће бити дат детаљнији опис и функција наведених елемената.

3.13 Магнетска кола

Магнетско коло статора садржи главне полове, помоћне полове и јарам. Главни полови усмеравају статорски флукс, односно *побудни флукс*. Он из северног магнетског пола статора прелази у магнетско коло ротора, потом у јужни магнетски пол статора, а затим се враћа према северном полу пролазећи кроз јарам. Флукс у магнетском колу статора не мења правац и смер, тако да је магнетска индукција у гвожђу статора константна и нема губитака у гвожђу. Стога не постоји потреба да се магнетско коло статора гради слагањем лимова (*ламинацијом*). Помоћни полови статора се користе за смањење магнетске индукције у неутралној зони, што ће бити објашњено доцније.

Магнетско коло ротора има цилиндричан облик. Флукс ротора је непокретан у односу на статор, као и флукс статора. Ротор се обрће у непомичном магнетском пољу које стварају статорски и роторски намотаји. Као последица обртања, у феромагнетском материјалу од кога је начињено магнетско коло ротора долази до промене магнетске индукције. Учестаност промене магнетске индукције у ротору одређена је брзином обртања. Као последица променљивог магнетског поља у гвожђу ротора, јављају се губици у магнетском колу. Да би се губици умањили, ротор се гради слагањем лимова (ламинацијом). Облик лимова је дат на слици 3.20. На периферији ротора постоје жлебови у које се смештају роторски проводници. У средини роторских лимова постоји кружни отвор у коме је причвршћено вратило. Цилиндрично магнетско коло ротора се формира слагањем већег броја лимова чија је дебљина мања од 1 mm.

3.14 Струјна кола

Струјно коло статора се састоји од побудног намотаја, компензационог намотаја и намотаја помоћних полова. Побудни намотај има навојке који обухватају главне полове. Побудна струја ствара магнетопобудну силу побуде $F_P = N_P I_P$. Дељењем магнетопобудне силе са магнетским отпором кола добија се флукс статора Φ_P, односно флукс побуде. Овај флукс једнак је површинском интегралу магнетске индукције B по пресеку главних по-

лова, односно површинском интегралу магнетске индукције B на површи која стоји у ваздушном зазору испод главних полова. На сликама 3.19 и 3.20, побудни флукс има смер слева на десно и два пута пролази кроз ваздушни зазор ширине δ. Занемарујући пад магнетског напона у гвожђу, магнетска индукција у ваздушном зазору испод главних полова може се проценити на $B = \mu_0 N_P I_P/(2\delta)$. Дакле, променом побудне струје могуће је деловати на флукс побуде Φ_P. Поред побудног намотаја, на статору постоји и компензациони намотај, као и намотај помоћних полова.

Компензациони намотај има проводнике који су смештени у жлебове начињене на унутрашњој страни главних полова статора. Тај намотај се повезује тако да у његовим проводницима постоји струја јачине $I_A/2$, једнака јачини струје у сваком од проводника ротора. Смер струје у проводницима компензационог намотаја супротан је од смера струје у ротору. Како се проводници роторског и компензационог намотаја налазе у непосредној близини, њихове магнетопобудне силе се потиру. Дакле, струја у компензационом намотају *компензује*, то јест поништава магнетопобудну силу ротора, односно магнетопобудну силу индукта. Ово се чини ради смањења магнетске индукције у неутралној зони, где се налазе проводници који су током комутације кратко спојени четкицама. Компензациони намотај поништава магнетопобудну силу оних роторских проводника који се налазе у зони главних полова. Преостали роторски проводници се налазе у неутралној зони, изван зоне главних полова. Магнетопобудна сила ових проводника није компензована дејством компензационог намотаја. Стога се наспрам неутралне зоне уграђују и помоћни полови које обухвата намотај помоћних полова.

Намотај помоћних полова има навојке који обухватају тело помоћних полова, означених са (D) на слици 3.20. Ваздушни зазор испод помоћних полова је значајно већи од зазора испод главних полова, како би магнетска отпорност у колу флукса реакције индукта био што већи. Струја у намотају помоћних полова је пропорционална струји ротора. Смер струје у проводницима и број навојака одређује се тако да се постигне компензација магнетопобудне силе проводника ротора који нису компензовани дејством компензационог намотаја. Садејством компензационог намотаја и помоћних полова могуће је контролисати магнетску индукцију у неутралним зонама, то јест испод помоћних полова. У основи, магнетску индукцију у неутралној зони треба свести на вредност блиску нули. Детаљнија анализа процеса комутације показује да је напрезање четкица и колектора најмање у случају када се има *линеарна комутација*, код које се струја у проводницима који комутују мења са $+I_A/2$ на $-I_A/2$ на линеаран начин. Претпоставка за линеарну комутацију је стварање магнетске индукције у неутралној зони која није једнака нули, већ има врло малу вредност која се мења про-

порционално струји I_A. Детаљна анализа процеса комутације и начина пројектовања компензационог намотаја и намотаја помоћних полова превазилази обим ове књиге.

Роторски намотај се формира тако што се проводници ротора, смештени у жлебове, повезују са ламелама колектора на начин који је описан раније. Повезивањем N_R роторских проводника, између четкица А и В у сваком тренутку се имају две паралелне гране, у свакој по $N_R/2$ проводника. Као што је раније речено, намотај на ротору се зове и *арматурни*, док се струја I_A, доведена на четкице из спољашњег извора зове *арматурна струја*. У употреби су и називи *индуктор* (за статор), односно *индукт* (за ротор), стога што се електромоторна сила у ротору *индукује* захваљујући флуксу статора. Тако се струја побуде I_P назива струјом индуктора, а струја арматуре I_A струјом индукта. Магнетопобудна сила ротора и флукс ротора могу се представити векторима вертикалног правца (слика 3.19 D) и зову се *магнетопобудна сила индукта*, *флукс индукта*, односно *реакција индукта*. Назив *реакција индукта* се може образложити на примеру машине за једносмерну струју која ради у генераторском раду. Ако су четкице А и В генератора повезане са отпорним потрошачем, струја арматуре и струја у проводницима ротора је одређена количником електромоторне силе индукта (ротора) и укупне отпорности у колу. Електромоторна сила настаје дејством флукса индуктора (статора). Као последица, јавља се струја ротора, магнетопобудна сила и флукс ротора. Дакле, флукс ротора се јавља као реакција ротора на побуду са стране статора, што даје смисао називу *реакција индукта*.

Питање (3.2):

Позната је побудна струја I_P, број навојака побудног намотаја N_P, осна дужина машине L, полупречник ротора R, угао α под којим се главни пол N види из средишта ротора, као и ваздушни зазор δ. Одредити флукс побуде Φ_P.

Одговор (3.2):

Побудна струја ствара магнетопобудну силу побуде $F_P = N_P I_P$. Флукс побуде Φ_P пролази кроз јарам и главне полове статора, кроз магнетско коло ротора и два пута пролази кроз ваздушни зазор испод главних полова. Будући да је магнетско поље H_{Fe} у гвожђу врло мало услед велике пермеабилности гвожђа, оправдано је сматрати да значајне вредности магнетског поља постоје само у ваздушном зазору. У зазору постоји магнетско поље у радијалном правцу, јачине $H = N_P I_P/(2\delta)$. Радијална компонента магнетске индукције је $B = \mu_o N_P I_P/(2\delta)$. Флукс побуде се добија множењем магнетске индукције са површином главних полова. Површина сваког пола једнака је $S = \alpha R \cdot L$, па се добија да је $\Phi_P = \alpha R \cdot L \cdot \mu_o N_P I_P/(2\delta)$.

Питање (3.3):

За машину описану у претходном питању, познато је да у проводницима ротора постоји струја јачине $I_A/2$, као и то да испод главних полова има по 10 роторских проводника. Израчунати електромагнетски моменат који делује на ротор.

Одговор (3.3):

Вектор магнетске индукције је усмерен у радијалном правцу, тако да је нормалан на проводник. Електромагнетска сила која делује на проводник одређена је векторским производом магнетске индукције и правца у коме је положен проводник, тако да она делује у тангенцијалном правцу. На сваки проводник делује сила $F = LBI_A/2$. Допринос укупном моменту од стране једног проводника је $M_1 = RF = R\ LBI_A/2$. Електромагнетска сила делује само на проводнике који се налазе испод главних полова. Наиме, на проводнике који су у неутралним зонама не делује сила због врло мале јачине магнетске индукције. Дакле, електромагнетски моменат је $M = 20\ M_1 = 20{\cdot}R{\cdot}L{\cdot}B{\cdot}I_A/2$.

Питање (3.4):

За машину описану у претходним питањима, познато је да се ротор обрће константном брзином Ω_m. Претпоставити да су четкице раздвојене од извора за напајање, те да се може мерити напон између четкица. Уколико је роторски намотај формиран тако да између четкица постоје две паралелне гране, одредити напон који се може измерити између четкица.

Одговор (3.4):

У проводницима који се налазе у зони главних полова индукује се електромоторна сила $E_1 = L{\cdot}v{\cdot}B$, где је $v = R{\cdot}\Omega_m$ периферна брзина проводника. У неутралним зонама на постоји значајна јачина поља, тако да је електромоторна сила индукована у проводницима неутралне зоне занемарује. Проводници ротора су повезани на ред, тако да се њихове електромоторне силе сабирају. На слици 3.15 може се уочити да су проводници подељени у две паралелне гране. Крајеви редне везе проводника P1, P6, P3 и P8 су повезани са четкицама, као и крајеви редне везе проводника P4, P7, P2 и P5. Редно повезивање проводника је извршено тако да се индуковане електромоторне силе сабирају. Питање се односи на машину која у зони сваког од полова има по 10 проводника. Дакле, укупан број проводника у којима постоји електромоторна сила E_1 једнак је 20. Будући да су проводници подељени у две паралелне гране, електромоторна сила E_{AB} једнака је $10E_1$, односно $10\ L{\cdot}\ R{\cdot}\Omega_m{\cdot}B$.

3.15 Директна и попречна оса машине

Статорски флукс се зове и побудни, односно флукс индуктора. Магнетска оса у којој постоји побудни флукс се често зове *директна оса*. На претходним сликама, директна оса је постављена хоризонтално. По правилу, директна оса је одређена правцем главних полова статора. На сликама 3.19 и 3.20, реакција индукта се јавља у вертикалној оси. Струјни плашт ротора има струје у смеру од посматрача у левој половини пресека, док се у десној половини имају струје супротног смера. Стога се магнетопобудна сила ротора и флукс ротора, који се називају и реакцијом индукта, могу представити вертикално оријентисаним векторима. Оса у којој постоји реакција индукта зове се *попречна оса*.

Слика 3.21. Векторски приказ флуксева статора и ротора. (A) Положај вектора флуксева појединих намотаја. (B) Резултантни флукс статора и резултантни флукс ротора. (C) Резултантни флукс машине.

Помоћни полови машине делују у попречној оси, компензујући ефекте реакције индукта. Исту улогу има компензациони намотај, чији проводници стварају магнетопобудну силу у правцу попречне осе и у смеру супротном од реакције индукта. Улога помоћних полова и компензационог намотаја је смањење магнетске индукције у неутралној зони, то јест у попречној оси. Компензациони намотај поништава магнетопобудну силу роторских проводника који се налазе у зони главних полова, док су помоћни полови уграђени наспрам неутралне зоне и делују на магнетску индукцију и електромоторну силу индуковану у намотајима који су захваћени процесом комутације. Садејством компензационог намотаја и помоћних полова,

у неутралној зони се има веома мали интензитет резултантне магнетске индукције. Флуксеви статорских и роторских намотаја су представљени на слици 3.21.

Векторски приказ флуксева појединих намотаја.

Роторски флукс машине за једносмерну струју, то јест флукс реакције индукта, представљен је флуксом Φ_R на слици 3.21. У правцу попречне осе стоје и вектори Φ_{PP} и Φ_{KN}, који представљају флукс помоћних полова и флукс компензационог намотаја. Директна оса машине је положена хоризонтално, док је попречна оса вертикална. Смер флуксева Φ_{PP} и Φ_{KN} је супротан од смера роторског флукса зато што је потребно умањити магнетску индукцију у неутралној зони како би се остварила ефикасна комутација. Другим речима, потребно је умањити резултантни флукс у попречној оси. У идеалном случају, компензациони намотај и помоћни полови у потпуности поништавају флукс реакције индукта, изједначавајући резултантни флукс у попречној оси са нулом. Као што је раније речено, компензациони намотај има проводнике постављене у непосредној близини роторских, и у њима су струје једнаких јачина и супротних смерова. Проводнике раздваја релативно мали ваздушни зазор, тако да компензациони намотај ефикасно поништава ефекте магнетопобудне силе коју стварају роторски проводници који се налазе испод главних полова. Преостали роторски проводници се налазе у неутралној зони, између главних полова, у положају где стоје помоћни полови. Дејство помоћних полова усмерено је ка даљем смањењу магнетског поља у неутралној зони.

Резултантни флуксеви статора и ротора

На слици 3.21 (А) приказани су вектори који представљају флуксеве појединих намотаја статора и ротора. У делу (В), слика приказује вектор резултантног флукса ротора који је једнак флуксу реакције индукта. Приказан је и вектор резултантног флукса статора Φ_S, који је једак збиру вектора флукса побудног намотаја, компензационог намотаја и намотаја помоћних полова.

Резултантни флукс машине

Резултантни флукс машине једнак је векторском збиру флуксева свих намотаја машине. Дакле, вектор резултантног флукса машине једнак је збиру вектора резултантног флукса статора Φ_S и вектора флукса реакције индукта Φ_R. У случају да флуксеви Φ_{PP} и Φ_{KN} идеално компензују флукс реакције индукта, резултантни флукс машине у попречној оси је једнак нули, док

је резултантни флукс машине у директној оси једнак флуксу побуде Φ_P, што је приказано на слици 3.21 (C).

Питање (3.5):

На слици 3.21 приказан је случај у коме компензациони намотај и помоћни полови у потпуности поништавају роторски флукс. Сабирањем поменута два флукса добија се флукс статора у *попречној* оси $\Phi_{PP} + \Phi_{KN}$ који је једнаке амплитуде као и роторски флукс али има супротан смер. Зато је резултантни флукс машине у попречној оси једнак нули. Познато је да је електромагнетски моменат машине одређен векторским производом статорског и роторског флукса. Хоће ли изостанак резултантног попречног флукса бити разлог да електромагнетски моменат машине буде једнак нули?

Одговор (3.5):

Потребно је уочити да у изразу за моменат фигуришу вектори Φ_R и Φ_S. Вектор Φ_R представља флукс који стварају роторски намотаји, док вектор Φ_S представља збир флуксева три статорска намотаја, побудног, компензационог и намотаја помоћних полова. Струје у проводницима компензационог намотаја и намотаја помоћних полова стварају попречну компоненту статорског флукса. У посматраном случају, компензациони намотај и намотај помоћних полова стварају флукс у попречној оси који је исте амплитуде каои флукса који ствара ротор, али је супротног смера. Збир флукса $-\Phi_R$ који ствара компензациони намотај и намотај помоћних полова са роторским флуксом даје *резултантни флукс машине* у попречној оси. У посматраном случају, резултантни флукс у попречној оси је једнак нули. Потребно је уочити да је резултантни флукс машине једнак збиру флуксева свих намотаја на статору и ротору. Иако је резултантни флукс у попречној оси једнак нули, ипак постоји роторски флукс у попречној оси па самим тим и предуслов за развијање електромагнетског момента. Будући да је моменат одређен векторским производом вектора статорског флукса и вектора роторског флукса, он зависи од флуксева Φ_R и Φ_S на слици 3.21 (B). Угао између ова два флукса није једнак $\pi/2$, али је синус овог угла ипак различит од нуле. Будући да је моменат одређен производом амплитуда два вектора флукса и синуса угла између њих, он у посматраном случају има ненулту вредност. Моменат се може одредити из производа директне компоненте флукса статора Φ_P и попречне компоненте флукса ротора Φ_R, које су у посматраном случају различите од нуле. Дакле, и поред околности да резултантни флукс машине има попречну компоненту једнаку нули, у машини постоји електромагнетски моменат различит од нуле.

3.16 Електромоторна сила и моменат

Моделирање машина за једносмерну струју, одређивање заменске шеме за устаљена стања и конструисање механичких карактеристика захтева одређивање израза за електромоторну силу и електромагнетски моменат. Електромоторна сила арматурног намотаја E_a, то јест електромоторна сила ротора E_{AB} може се измерити између четкица А и В у условима када је арматурна струја I_a једнака нули, то јест у празном ходу. Електромагнетски моменат и електромоторну силу треба изразити у функцији арматурне струје, побудног флукса, угаоне брзине обртања ротора и конструктивних параметара машине.

3.17 Електромоторна сила арматурног намотаја

У проводницима ротора који се налазе испод главних полова статора индукује се електромоторна сила $E_1 = R \cdot \Omega_m \cdot B \cdot L$, где је Ω_m угаона брзина обртања ротора, R полупречник ротора, L дужина роторског цилиндра, док је B магнетска индукција која постоји у зони главних полова. У проводницима који пролазе кроз неутралну зону нема електромоторне силе зато што је магнетска индукција у неутралној зони блиска нули.

Слика 3.22. Одређивање електромоторне силе E_a.

Електромоторне силе индуковане у проводницима испод супротних полова разликују се у знаку. У сваком од проводника електромоторна сила периодично мења знак. Учестаност промене знака је одређена брзином обртања ротора. Пример промене електромоторне силе индуковане у једном проводнику дат је на слици 3.12 (В), где се види да електромоторна сила једног роторског проводника има облик правоугаоне поворке импулса амплитуде E_1 и знака који се мења у зависности од обртања ротора. Овде се показује да веза роторских проводника и ламела колектора доводи до сабирања наизменичних електромоторних сила на начин који даје једносмеран напон између четкица А и Б. Механички комутатор претвара наизменичне електромоторне силе индуковане у проводницима у једносмерни напон који је расположив између четкица.

Проводници ротора су повезани тако да формирају две паралелне гране постављене између четкица. Проводници не остају трајно у једној од паралелних грана, већ током једне половине обртаја ротора припадају једној, а током друге половине обртаја ротора другој паралелној грани. Ово се догађа захваљујући механичком комутатору и процесу комутације. На слици 3.23 (А), приказана је шема веза роторских проводника у положају ротора у коме четкица А належе на ламелу L1. Електромоторне силе индуковане у проводницима који припадају једној паралелној грани се сабирају и дају $E_a = E_{AB}$, електромоторну силу арматурног (роторског) намотаја која је једнака напону U_{AB} у условима када је струја арматурног намотаја $I_a = I_{AB} = 0$. У положају који је приказан на сликама 3.22 и 3.23, електромоторне силе у проводницима P1, P2, P3 и P4 имају исти смер. Проводници P5, P6, P7 и P8 се налазе испод јужног пола, па је електромоторна сила у њима супротног смера. Поређењем веза на сликама 3.22 и 3.23, може се закључити да се електромоторне силе редно повезаних проводника сабирају, па је $E_a = 4E_1$.

Од интереса је показати да је E_{AB} једносмерна величина, то јест, да обртање ротора не доводи до промене њеног смера и знака. Када се ротор обрне за $\pi/4$, четкице А и В належу на ламеле L2 и L3, што је приказано на слици 3.16. У новом положају ротора, проводници P3, P4, P5 и P6 се налазе испод северног магнетског пола статора, па имају електромоторне силе истог смера. Проводници P7, P8, P1 и P2 долазе у зону јужног магнетског пола, па су електромоторне силе у њима супротног смера. Истовремено, дошло је до промене проводника који припадају једној и другој паралелној грани. Према слици 3.16, проводници P3, P8, P5 и P2 чине једну паралелну грану док проводници P6, P1, P4 и P7 чине другу паралелну грану. Слика показује да су проводници повезани тако да се електромоторне силе у њима сабирају, па је електромоторна сила E_a и даље једнака $4E_1$, при чему је четкица А и даље на већем потенцијалу од четкице В. Другим речима, без обзира на обртање ротора, између четкица А и В постоји једносме-

ран напон, што показује да механички комутатор има улогу исправљача који наизменичне електромоторне силе проводника претвара у једносмерну електромоторну силу $E_a = E_{AB}$. Ова електромоторна сила се зове *роторска* или *арматурна*.

Слика 3.23: (A) Сабирање електромоторних сила појединих проводника.
(B) Представљање арматурног намотаја напонским генератором.

Ако се четкице А и В повежу са крајевима отпорника или другог потрошача једносмерне струје, машина приказана шемом на слици 3.23 радиће као генератор, снабдевајући потрошач електричном енергијом. Доцније ће се показати да је у том случају неопходно покретати ротор тако што се на вратило доводи спољашњи моменат добијен из воденог кола, парне турбине или мотора са унутрашњим сагоревањем. Арматурни намотај тада представља напонски генератор чији су крајеви доступни на четкицама А и В, и који даје стални напон U_{AB}. Еквивалентни напонски генератор је приказан на слици 3.23(B). У празном ходу, напон између четкица је једнак електромоторној сили празног хода $E_a = 4E_1 = 4R{\cdot}\Omega_m{\cdot}B{\cdot}L$. Унутрашња отпорност еквивалентног напонског генератора R_{AB} се може одредити мерењем отпора између четкица у стању када је брзина једнака нули ($\Omega_m = 0$). Тада је и електромоторна сила E_a једнака нули, па се еквивалентни напонски извор своди на унутрашњу отпорност R_{AB}. Уколико је позната отпорност једног проводника R_1 као и еквивалентна отпорност четкица и колектора ΔR, тада је унутрашња отпорност еквивалентног извора који представља арматурни намотај једнака $R_{AB} = 2R_1 + \Delta R$. Дакле, арматурни намотај машине за једносмерну струју се може представити напонским генератором чија је електромоторна сила празног хода једнака E_a и који има унутрашњу отпорност R_{AB}.

3.18 Стварање електромагнетског момента

Потребно је одредити везу електромагнетског момента са побудним флуксом и *арматурном* струјом. Побудни флукс из главних полова прелази у магнетско коло ротора пролазећи кроз ваздушни зазор, у коме је магнетска индукција усмерена радијално. Површ која раздваја унутрашњу страну главног пола од ваздушног зазора има облик савијеног правоугаоника који представља одсечак цилиндра. Површина овог одсечка је $S = W{\cdot}L$, где је L дужина машине док је $W = \alpha{\cdot}R$ производ угла α под којим се површ S види из средишта ротора и полупречника ротора R. Магнетска индукција B у ваздушном зазору испод главних полова једнака је количнику побудног флукса Φ_P и површине S. Струја која постоји у проводницима ротора има јачину $I_A/2$, где је I_A *арматурна* струја, то јест струја која се из спољашњег извора доводи на четкице. На слици 3.24 (А) дата је развијена шема роторског намотаја на којој су приказане силе које делују на проводнике. У делу (В) исте слике приказани су смерови струја у проводницима ротора гледани са стране колектора. У датом положају ротора, проводници P1, P2, P3 и P4 се налазе испод северног пола и имају струје смера ⊗. Линије поља магнетске индукције излазе из главног пола означеног са N пролазе кроз ваздушни зазор и улазе у магнетско коло ротора. У посматраној зони испод северног пола, векторски производ радијалне компоненте магнетске индукције и коаксијално усмерене струје (⊗) даје тангенцијално усмерену силу, означену ознаком $F1$. Испод јужног пола, мења се смер струје у проводницима, али се мења и смер магнетске индукције, која излази из магнетског кола ротора, пролази кроз ваздушни зазор и улази у магнетско коло статора (S). Промена смера струје и поља даје силу $F1$ у тангенцијалном правцу која задржава исти смер, то јест делује у смеру супротном од казаљке на часовнику.

Спрег појединачних сила даје електромагнетски моменат који делује на ротор. У посматраном случају, допринос моменту који даје сила на један проводник ротора је $M_1 = R{\cdot}F_1 = R{\cdot}L{\cdot}\,(I_A/2)\,{\cdot}B$. Будући да је укупан број проводника који се налазе у магнетском пољу побудног флукса једнак 8, електромагнетски моменат је једнак $M_{em} = 8{\cdot}R{\cdot}L{\cdot}(I_A/2)\,{\cdot}B = 2{\cdot}D{\cdot}L{\cdot}I_A{\cdot}\Phi_P/S$, где ознаке D, L, I_A, Φ_P и S означавају пречник ротора, осну дужину машине, арматурну струју, побудни флукс и површину попречног пресека главних полова.

Слика 3.24. (A) Силе које делују на проводнике приказане на развијеној шеми. (B) Силе које делују на проводнике Представљање арматурног намотаја напонским генератором.

3.19 Изрази за моменат и електромоторну силу

Овде се одређује израз који повезује индуковану електромоторну силу арматурног намотаја $E_a = E_{AB}$ са брзином обртања и побудним флуксом, као и израз који повезује електромагнетски моменат M_{em} са побудним флуксом и арматурном струјом. Најпре је потребно утврдити вези између магнетске индукције у ваздушном зазору, побудне струје и побудног флукса.

На слици 3.25 су дате димензије главних полова. Електромоторна сила и силе на проводнике зависе од магнетске индукције на месту где су положени проводници. Проводници ротора се налазе на спољашњој страни магнетског кола ротора, па је зато потребно одредити магнетску индукцију у ваздушном зазору. Ваздушни зазор δ је знатно мањи од полупречника ротора. Гранични услови за компоненте магнетског поља на површи која дели ваздушни зазор од феромагнетика указују да је вектор магнетске индукције у зазору усмерен у радијалном правцу. Као што је претходно показано, површина попречног пресека главних полова S једнака је WL. Величина $W = \alpha D/2$ представља ширину сваког од главних полова, док је α угао под којим се један главни пол види из средишта ротора. Побудни флукс пролази кроз магнетска кола статора и ротора, где је пад магнетског

напона веома мали. Флукс два пута пролази кроз ваздушни зазор, тако да је

$$F_P = N_P I_P = 2 \cdot \delta \cdot H_P \,, \tag{3.2}$$

где је $F_P = N_P I_P$ магнетопобудна сила побудног намотаја, док је H_P јачина магнетског поља у зазору испод главних полова. Магнетска индукција B_P коју ствара намотај побуде у ваздушном зазору у зони главних полова једнака је

$$B_P = \mu_0 H_P = \mu_0 \frac{N_P I_P}{2 \cdot \delta} \,. \tag{3.3}$$

Будући да се магнетска индукција у ваздушном зазору испод главних полова не мења, флукс побуде је једнак производу магнетске индукције и површине и једнак је

$$\Phi_P = SB_P = LW\mu_0 H_P = \mu_0 \frac{LWN_P I_P}{2 \cdot \delta} \,, \tag{3.4}$$

где је $W = \alpha D/2$ ширина главних полова. Магнетска отпорност у колу побудног флукса једнака је количнику магнетопобудне силе F_P и флукса Φ_P. Магнетска отпорност R_μ је једнака

$$R_\mu = \frac{F_P}{\Phi_P} = \frac{2 \cdot \delta}{\mu_0 \cdot L \cdot W} \,. \tag{3.5}$$

Укупни флукс побудног намотаја је $\Psi_P = N_P \Phi_P$. Индуктивност побудног намотаја је једнака количнику укупног флукса и струје, па се може одредити према изразу

$$L_P = \frac{\psi_P}{I_P} = \mu_0 \frac{LWN_P^2}{2 \cdot \delta} = \frac{N_P^2}{R_\mu} \,. \tag{3.6}$$

Коефицијент пропорционалности између флукса побуде Φ_P, то јест флукса у једном навојку побудног намотаја, и побудне струје I_P једнак је

$$L'_P = \frac{\Phi_P}{I_P} = \frac{\psi_P}{N_P I_P} = \mu_0 \frac{LWN_P}{2 \cdot \delta} = \frac{L_P}{N_P} \,. \tag{3.7}$$

На ротору постоји укупно N_R проводника, али се један број проводника налази у неутралној зони између главних полова. Преостали роторски проводници су у зони главних полова, и леже у магнетском пољу B_P. На проводнике у неутралној зони не делују силе нити се у њима индукују елек-

тромоторне силе. Пошто су роторски проводници равномерно расподељени по обиму машине, испод северног пола ширине W налази се укупно $N_R W/(\pi D)$ проводника. Исти број проводника се налази и испод јужног магнетског пола.

Слика 3.25. Димензије главних полова.

Одређивање електромоторне силе E_a

У роторским проводницима захваћеном пољем главних полова индукује се електромоторна сила E_1 једнака

$$E_1 = B_P \cdot L \cdot v = B_P \cdot L \cdot R \cdot \Omega_m \,, \tag{3.8}$$

где је v периферна брзина ротора, Ω_m угаона брзина обртања ротора а R полупречник ротора. Роторски проводници су повезани редно, на начин који резултује сабирањем индукованих електромоторних сила Укупан број проводника у којима се индукује електромоторна сила једнак је збиру проводника испод јужног и северног пола, то јест $2N_R W/(\pi D)$. Пошто су сви роторски проводници повезани у две паралелне гране, чији су крајеви у вези са четкицама А и В, електромоторна сила $E_a = E_{AB}$ једнака је производу електромоторне силе у једном проводнику и броја проводника који се налазе испод једног магнетског пола.

$$E_a = \frac{1}{2}\left(\frac{2N_R W}{\pi D}\right)E_1 = \frac{N_R W}{2\pi R} B_P L R \Omega_m = \frac{N_R}{2\pi}\left(LWB_P\right)\Omega_m . \tag{3.9}$$

Користећи везу (3.4) између магнетске индукције и флукса побуде, претходни израз узима облик

$$E_a = \frac{N_R}{2\pi}\Phi_P \Omega_m = k_e \Phi_P \Omega_m , \tag{3.10}$$

где је коефицијент $k_e = N_R/(2\pi)$ одређен бројем проводника ротора и зове се *коефицијент електромоторне силе*.

Одређивање момента M_{em}

На сваки проводник ротора који се налази у зони главних полова делује силе

$$F_1 = L\frac{I_A}{2}B_P = \frac{\Phi_P}{W \cdot L}\cdot\frac{I_A}{2}\cdot L = \frac{\Phi_P}{W}\cdot\frac{I_A}{2} . \tag{3.11}$$

Крак посматране силе је $R = D/2$, па је допринос укупном моменту који даје посматрани проводник једнак $M_1 = F_1\, D/2$. Будући да сила F_1 делује само на проводнике који се налазе испод главних полова, постоји укупно $2N_R W/(\pi D)$ проводника који доприносе моменту. Зато се укупан електромагнетни моменат машине одређује се према изразу

$$M_{em} = \left(\frac{2N_R W}{\pi D}\right)\cdot M_1 = \frac{2N_R W}{\pi D}\cdot\frac{D}{2}\cdot\frac{\Phi_P}{W}\cdot\frac{I_A}{2} = \tag{3.12}$$

$$= \frac{N_R}{2\pi}\cdot\Phi_P\cdot I_A = k_m\cdot\Phi_P\cdot I_A,$$

где је $k_m = N_R/(2\pi)$ *константа електромагнетског момента*.

Једнакост (3.10) показује да је електромоторна сила индукта одређена производом побудног флукса и угаоне брзине обртања ротора, док једнакост (3.12) показује да је електромагнетски моменат машине одређен производом побудног флукса и арматурне струје.

3.20 Математички модел машине за једносмерну струју

Анализа електричних и механичких карактеристика машине за једносмерну струју заснива се на математичком моделу. Модел садржи диференцијалне једначине и алгебарске релације које описују прелазне процесе у машини. Код машина за једносмерну струју, побудни флукс статора се успоставља у *директној* оси, док се роторски флукс (*реакција индукта*) јавља у попречној оси. Две осе су ортогоналне, па је међусобна индуктивност побудног и арматурног намотаја једнака нули[3].

Дакле, промене побудне струје немају директног утицаја на флукс ротора. Истовремено, промене роторске струје не могу имати утицаја на флукс побуде. Изостанак спреге директне и попречне осе доводи до тога да прелазне појаве у побудном намотају нису у вези са прелазним појавама у ротору. Дакле, у диференцијалној једначини која описује успостављање флукса побуде и побудне струје неће бити фактора који зависе од струје и флукса ротора. Зато је модел машина за једносмерну струју релативно једноставан и прегледан. Управљање флуксом и моментом је *распрегнуто* и лако га је пројектовати и применити.

Слика 3.26. Повезивање електричне машине за једносмерну струју са електричним изворима и механичким оптерећењем.

[3] Напомена: Међусобна индуктивност ортогоналних намотаја је једнака нули ако је магнетско коло линеарно, то јест, у случају када нема појаве магнетског засићења. У противном, флукс у једној од две ортогоналне осе мења радну тачку на нелинеарној карактеристици магнећења феромагнетског материјала, што делује на магнетску отпорност и флукс у другој оси. Наиме, линије поља флукса побуде и флукса ротора постоје истовремено у магнетском колу ротора, као и у деловима магнетског кола статора. Промена једног од два флукса мења степен засићења магнетског материјала, индиректно делујући на други флукс. Нелинеарност магнетског кола доводи до спреге ортогоналних оса чији флукс постоји у истом магнетском колу.

Предмет моделирања је машина једносмерне струје која је повезана са извором u_a који напаја арматурни намотај, и извором u_p који напаја намотај побуде. Повезивање машине са електричним изворима и механичким оптерећењем је приказано на слици 3.26. На слици се користе ознаке u_a и u_p зато што напони побудног и арматурног намотаја могу бити променљиви. У устаљеном стању, исте величине се означавају са U_a и U_p. Вратило машине се обрће брзином Ω_m. На обртне масе инерције J делује електромагнетски моменат M_{em} и моменат оптерећења M_m. Референтни смерови два момента су супротни и дати су на слици.

Овде је дата анализа прелазних појава у машини за једносмерну струју која за резултат има диференцијалне једначине математичког модела. Према закључцима из претходног поглавља, математички модел има

- диференцијалне једначине равнотеже напона у намотајима,
- диференцијалну једначину промене угаоне брзине обртања (Њутнова једначина),
- алгебарске релације које повезују флуксеве и струје (матрица индуктивности),
- израз за електромагнетски моменат.

При моделирању се полази од четири занемарења која су дискутована у претходном поглављу:

- Занемарују се паразитне капацитивности (то јест, енергија електричног поља).
- Занемарују се ефекти расподеле енергије поља у простору, па се заменске шеме машине представљају као мреже са сконцентрисаним параметрима.
- Занемарују се губици у магнетском колу (то јест, губици у гвожђу).
- Занемарује се нелинеарност магнетског кола, то јест магнетско засићење.

3.21 Једначина равнотеже напона у намотају побуде

Роторски проводници стварају магнетопобудну силу која делује у попречној оси и нема утицаја на побудни флукс. Стога је тренутна вредност укупног флукса у побудном намотају једнака $\Psi_P = N_P \Phi_P = L_P\, i_P$. У даљем

разматрању посматрају се тренутне вредности струја, флуксева и напона, тако да ознака i_P указује на промену побудне струје у времену, то јест $i_P(t)$. Ради прегледнијег записа, поред ознака у наредним изразима није експлицитно наглашено да су посматране величине функције времена.

Коефицијент сопствене индуктивности побудног намотаја је дат једначином 3.6. Намотај побуде има коначну електричну отпорност R_P, па је једначина равнотеже напона у овом намотају

$$u_P = R_P i_P + \frac{\mathrm{d}\psi_P}{\mathrm{d}t} = R_P i_P + L_P \frac{\mathrm{d}i_P}{\mathrm{d}t}. \tag{3.13}$$

Побудни флукс Φ_P, то јест флукс у главним половима, односно флукс у једном навојку побуде одређен је побудном струјом. На основу једначине (3.7), побудни флукс је једнак

$$\Phi_P = L'_P i_P = \left(\frac{L_P}{N_P}\right) i_P. \tag{3.14}$$

Дакле, побудни намотај се може представити *R-L* колом какво је приказано у левом делу слике 3.27. У случају да се на крајеве побудног намотаја доведе сталан напон побуде U_P, струја побуде експоненцијално расте према вредности $i_P(\infty) = I_P = U_P/R_P$, која се достиже у устаљеном стању. Током прелазног процеса успостављања побудне струје, тренутна вредност струје се мења према изразу

$$i_P = i_P(0)e^{-\frac{t}{\tau}} + i_P(\infty)\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = \frac{U_P}{R_P}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \tag{3.15}$$

где је $\tau = L_P/R_P$ временска константа побудног кола. У устаљеном стању, веза између флукса побуде и напона на побудном намотају је

$$\Phi_P = L'_P I_P = L'_P \frac{U_P}{R_P}. \tag{3.16}$$

Питање (3.6):

Одредити временску константу побудног кола машине за једносмерну струју за коју је позната и површина попречног пресека главних полова $S = 0{,}1\ \mathrm{m}^2$, зазор $\delta = 1$ mm, $N_P = 4000$, док је отпорност побудног намотаја $R_P = 400\ \Omega$.

Одговор (3.6):

Магнетска отпорност у колу побудног флукса једнака је

$$R_\mu = \frac{2 \cdot \delta}{\mu_0 \cdot S} = 15.915{,}5 \ \text{H}^{-1}.$$

Индуктивност побудног намотаја једнака је

$$L_P = \frac{N_P^2}{R_\mu} = 1005 \ \text{H}.$$

Временска константа побудног намотаја једнака је

$$\tau = \frac{L_P}{R_P} = 2{,}51 \, \text{s}.$$

3.22 Једначина равнотеже напона у намотају ротора

Намотај ротора има две паралелне гране повезане између четкица А и В. Између четкица се може измерити еквивалентна унутрашња отпорност арматурног намотаја $R_a = R_{AB} = N_R R_1/4 + \Delta R$, где је N_R број роторских проводника, R_1 је отпорност једног проводника, док је ΔR еквивалентна отпорност механичког комутатора са четкицама и колектором. Поред отпорности, роторски (арматурни) намотај има и одређену индуктивност. Наиме, постојање струје у роторским проводницима ствара магнетопобудну силу реакције индукта, која за последицу има стварање роторског флукса, обрнуто пропорционалног магнетској отпорности. Магнетска отпорност на путу роторског флукса је релативно велики, стога што је флукс ротора усмерен у неутралну зону између главних полова, где се линије поља простиру кроз ваздух. Индуктивност арматурног намотаја L_a је пропорционална квадрату броја навојака и обрнуто пропорционална магнетској отпорности у колу роторског флукса, то јест флукса реакције индукта. Магнетска отпорност на путу роторског флукса је значајно већа од магнетске отпорности у колу побуде. Најчешће је и број навојака побудног намотаја значајно већи од броја навојака ротора. Као последица, индуктивност арматуре L_a је два или три реда величине мања од индуктивности побудног намотаја. Брзина промене струје у калему је директно пропорционална доведеном напону а обрнуто пропорционална индуктивности, што значи да се арматурна струја може мењати брзином која је за два до три реда величине већа од брзине са којом се мења побудна струја.

Питање (3.7):
Одредити еквивалентну унутрашњу отпорност арматурног намотаја R_a ако намотај ротора има 40 проводника. Сваки проводник има отпорност од 0,1 Ω, док је еквивалентна отпорност механичког комутатора са четкицама и колектором једнака ΔR = 0,2 Ω. Одредити индуктивност роторског намотаја L_a ако је познато да је површина попречног пресека магнетског кола у коме постоји флукс реакције индукта једнак S = 0,1 m^2. Растојање између ротора и статора у неутралним зонама износи d = 20 mm. Одредити временску константну у колу арматурног намотаја.

Одговор (3.7):
Отпорност арматурног намотаја једнака је R_a = 0,1 Ω ·40/4 + 0,2 Ω = 1,2 Ω.

Магнетска отпорност у колу роторског флукса једнака је

$$R_\mu = \frac{2 \cdot d}{\mu_0 \cdot S} = 318\,310\ \mathrm{H}^{-1}.$$

Арматурни намотај има 40 проводника, односно 20 навојака. Индуктивност арматурног намотаја једнака је

$$L_a = \frac{20^2}{R_\mu} = 1{,}256\ \mathrm{mH}.$$

Временска константа побудног намотаја једнака је

$$\tau_a = \frac{L_a}{R_a} = 1{,}057\ \mathrm{ms}.$$

Поред пада напона услед отпорности R_a и индуктивности L_a, у роторском колу постоји и индукована електромоторна сила E_a, пропорционална брзини обртања и побудном флуксу. Једначина равнотеже напона у колу арматуре узима облик

$$u_a = R_a i_a + L_a \frac{\mathrm{d}\, i_a}{\mathrm{d}\, t} + E_a = R_a i_a + L_a \frac{\mathrm{d}\, i_a}{\mathrm{d}\, t} + k_e \Phi_P \Omega_m. \tag{3.17}$$

Заменска шема арматурног намотаја приказана је у десном делу слике 3.27. У устаљеном стању нема промене струје па је први извод струје једнак нули. Једначина (3.17) тада добија облик

$$U_a = R_a I_a + E_a = R_a I_a + k_e \Phi_P \Omega_m. \tag{3.18}$$

Модел машине укључује и изразе за индуковану електромоторну силу и електромагнетски моменат који су изведени раније и који гласе

$$E_a = k_e \Phi_P \Omega_m, \qquad (3.19)$$
$$M_{em} = k_e \Phi_P i_a.$$

3.23 Промена угаоне брзине обртања

Поред моделирања прелазних појава у намотајима, који представљају електрични подсистем, потребно је моделирати и механички подсистем машине, односно дати диференцијалну једначину која описује промену угаоне брзине обртања ротора. Ротор је преко вратила спрегнут са радном или погонском машином. Еквивалентни моменат инерције свих обртних делова означава се са J. У њега спадају моменат инерције ротора, вратила, радне машине, спрежних елемената, преносника као и свих других покретних делова чије је кретање одређено обртањем ротора. На ротор делују

- електромагнетски моменат M_{em},
- моменат трења $k_F \Omega_m$,
- моменат оптерећења M_m и
- инерциони моменат.

Према ознакама датим на слици 3.26, референтни смер за електромагнетксви моменат је позитиван, што значи да позитиван износ овог момента делује у смеру увећања алгебарске вредности брзине обртања. Моменат оптерећења M_m представља механичко оптерећење којим радна машина делује на ротор. Референтни смер овог момента је негативан, што значи да позитивна вредност овог момента делује у смеру смањења алгебарске вредности брзине. Моменат трења се једнако противи кретању у оба смера, тако да делује у смеру смањења апсолутне вредности брзине. Инерциони моменат $J \cdot \mathrm{d}\Omega_m/\mathrm{d}t$ представља моменат неопходан за стварање убрзања $\mathrm{d}\Omega_m/\mathrm{d}t$. Једначина (3.20) приказује равнотежу наведених момената и представља Њутнову диференцијалну једначину кретања. Моменат трења може бити два реда величине мањи од момената M_{em} и M_m, па се често занемарује.

$$J \frac{\mathrm{d}\Omega_m}{\mathrm{d}t} = M_{em} - M_m - k_F \Omega_m \qquad (3.20)$$

Слика 3.27. Равнотежа напона у намотају побуде (лево) и арматурном намотају (десно).

3.24 Математички модел

Претходно изведене једначине представљају математички модел машине за једносмерну струју. Модел се може користити у анализи прелазних процеса и устаљених стања, па се зове и *динамички модел*. Овде је дат сажетак једначина које чине модел.

Равнотежа напона у побудном намотају

$$u_P = R_P i_P + \frac{\mathrm{d}\psi_P}{\mathrm{d}t} = R_P i_P + L_P \frac{\mathrm{d}i_P}{\mathrm{d}t}.$$

Равнотежа намотаја у арматурном намотају

$$u_a = R_a i_a + L_a \frac{\mathrm{d}i_a}{\mathrm{d}t} + E_a.$$

Изрази за електромоторну силу и моменат

$$E_a = k_e \Phi_P \Omega_m,$$
$$M_{em} = k_e \Phi_P i_a.$$

Веза побудне струје и побудног флукса

$$\Phi_P = L'_P i_P.$$

Њутнова једначина

$$J\frac{\mathrm{d}\Omega_m}{\mathrm{d}t} = M_{em} - M_m - k_F\,\Omega_m\,.$$

3.25 Модел машине са сталним магнетима

На слици 3.1 је приказан пресек машине за једносмерну струју са побудним намотајем на статору и пресек машине са сталним магнетима у статорском магнетском колу. Побудни флукс се може добити коришћењем побудног намотаја у коме постоји једносмерна струја I_P, која ствара магнетопобудну силу и флукс у директној оси машине. Машину је могуће начинити и тако да она нема побудни намотај, већ да на месту главних полова има сталне магнете који стварају побудни флукс. Предност машине са сталним магнетима је у томе што нема потребе за довођењем засебног побудног напона и побудне струје, а не постоје ни губици у побудном намотају. Недостатак машина за једносмерну струју које имају побуду са сталним магнетима огледа се у томе што није могуће мењати флукс побуде. Он је дефинисан карактеристикама самих магнета и карактеристикама магнетског кола у које су магнети уграђени. Код машина са побудним намотајем, флукс побуде се може мењати деловањем на побудни напон и побудну струју.

Математички модел машина за једносмерну струју које имају сталне магнете је у свему једнак моделу датом у претходном одељку. Разлика је у томе што је флукс Φ_P код машине са сталним магнетима непромењив и одређен карактеристикама магнета. Будући да машина са сталним магнетима нема побудни намотај, из модела изостаје диференцијална једначина равнотеже напона у намотају побуде.

3.26 Графички приказ математичког модела

Математички модел се може приказати у форми дијаграма, који је приказан на слици 3.28. Поједини блокови у оквиру дијаграма имају функције преноса добијене применом Лапласове трансформације на диференцијалне једначине модела. Као пример узима се диференцијална једначина равнотеже напона у побудном намотају која у временском домену гласи

$$u_P = R_P i_P + L_P\frac{\mathrm{d}i_P}{\mathrm{d}t}\,.$$

Применом Лапласове трансформације на претходну диференцијалну једначину добија се алгебарска једначина која даје везу између комплексних ликова побудне струје и побудног напона. У једначини

$$U_P(s) = R_P I_P(s) + sL_P I_P(s) - i_P(0),$$

ознака s представља *Лапласов оператор*, односно *оператор диференцирања*, док су $U_P(s)$ и $I_P(s)$ комплексни ликови оригинала $u_P(t)$ и $i_P(t)$. Уз претпоставку да је струја побуде у почетном тренутку једнака $i_P(0) = 0$, једначина узима облик

$$U_P(s) = (R_P + sL_P) I_P(s). \tag{3.21}$$

Побудни намотај представља подсистем који на улазу има побудни напон, величину која одређује промену побудне струје. Побудна струја се јавља као последица, односно реакција на доведени побудни напон. Стога је напон улаз а струја излаз из посматраног подсистема. На основу претходне једначине, функција преноса блока (1) на слици 3.26 је $I_P(s)/U_P(s) = 1/(R_P + sL_P)$. Блок (2) дијаграма представља функцију преноса арматурног намотаја, док блок (3) представља Њутнову диференцијалну једначину.

Слика 3.28. Модел машине за једносмерну струју у облику блок дијаграма.

Моменат и флукс машине зависе од доведеног побудног и арматурног напона, који су приказани на левој страни дијаграма. Побудна струја и побудни флукс зависе од побудног напона, и мењају се у складу са функцијом преноса $I_P(s)/U_P(s) = 1/(R_P + sL_P)$. Практичне вредности временске константе побудног намотаја је $\tau_P = L_P/R_P$ је реда величине од 200 ms до

10 s. Арматурна струја машине се мења у зависности од разлике напона између доведеног арматурног напона и индуковане електромоторне силе ($U_a - E_a$). Промена струје $di_a(t)/dt$ је позитивна у условима када је U_a - E_a - R_a $i_a(t) > 0$, док у противном струја опада. Временска константа арматурног намотаја $\tau_a = L_a/R_a$ је реда величине од 1 ms до 100 ms.

Побудни и арматурни напон су *улаз у* систем, односно *управљачке* променљиве. Арматурна струја, побудна струја као и побудни флукс, који је пропорционалан побудној струји, представљају *стања* посматраног динамичког система, односно његову реакцију на доведене управљачке променљиве. Арматурна струја, побудни флукс, електромагнетски моменат и угаона брзина обртања су *излази* система.

Електромагнетски моменат M_{em} је производ побудног флукса, арматурне струје и константе k_m. Моменат M_{em} представља улазну променљиву механичког подсистема, то јест управљачку силу која одређује промену брзине обртања. У условима када M_{em} превазилази збир момената који се противе кретању, брзина обртања се увећава. У случају да је електромагнетски моменат једнак збиру отпора кретању $M_m+k_F\Omega_m$, брзина обртања се не мења. Ако је $M_{em} < M_m+k_F\Omega_m$, брзина обртања ротора се смањује. Потребно је уочити да је блок (3) у оквиру дијаграма начињен тако моделује и моменат трења $k_F\Omega_m$. Будући да је ред величине момента трења један стоти део радног момента, трење се често занемарује. Функција преноса блока (3) тада добија облик $1/(J\cdot s)$.

3.27 Управљање моментом

Блок (4) на слици 3.28 је означен са R и не представља део модела. Везе блока (4) су изведене испрекиданим линијама. Он указује на могућност да се оствари управљање моментом машине, о чему ће овде бити речи. У применама електричних мотора за једносмерну струју често се управља кретањем алата, предмета обраде, елеватора, конвејера или других објеката. Приликом управљања кретањем, задатак електричног мотора је да на вратилу да електромагнетски моменат који се мења у зависности од динамике и отпора кретања. Треба створити моменат M_{em} који достиже задату вредност M^* са што мањом грешком. *Регулација* момента подразумева одржавање електромагнетског момента M_{em} на жељеној вредности M^* која се зове и *референца*. У случајевима када се референца мења, регулисана променљива M_{em} треба да прати њене промене. Моменат M_{em} је пропорционалан производу арматурне струје и флукса. Временска константа арматурног намотаја τ_a је знатно мања од константе побудног намотаја. Док је могуће остварити само споре промене флукса, јачина струје i_a се може бр-

зо мењати, тако да регулација момента подразумева регулацију арматурне струје. Полазећи од једначине равнотеже напона у арматурном намотају, промена струје је одређена једначином

$$\frac{\mathrm{d}\,i_a}{\mathrm{d}\,t} = \frac{1}{L_a}\left(u_a - R_a i_a - E_a\right), \tag{3.22}$$

па је промене арматурне струје могуће постићи променом арматурног напона U_a. Зато се електрични мотори за једносмерну струју напајају из статичких претварача снаге, то јест уређаја енергетске електронике који дају променљив, управљив напон. Ради регулисања струје, потребно је вршити мерење арматурне струје и поредити је са референтном, да би се утврдило одступање Δi_a струје од жељене вредности. Ако је струја недовољна, потребно је увећати арматурни напон. Увидом у једначину (3.22), може се закључити да одговарајуће увећање арматурног напона доводи до пораста арматурне струје, чиме се детектована грешка Δi_a умањује. На исти начин, код превелике јачине струје, напон треба смањити. Алгоритам који дефинише зависност управљачке променљиве u_a од утврђене грешке у регулацији Δi_a представља алгоритам управљања, док се *регулатором* назива направа која га имплементира. Регулатор се често може описати функцијом преноса. Регулатор одлучујуће утиче на брзину и квалитет динамичког одзива. Блок (4) на слици 3.28 показује начин повезивања регулатора. Излаз из блока је променљива U^* која представља задату вредност арматурног напона. Задата вредност напона се доводи у статички претварач снаге из кога се напаја арматурни намотај. Детаљнија анализа проблема регулације превазилази оквире ове књиге. У даљој анализи проблема, одређивању структуре регулатора и параметара регулације неопходно је имати основна знања о прелазним процесима у електричним машинама и располагати примереним математичким моделима.

3.28 Заменска шема за устаљена стања

Потребно је анализирати рад машине за једносмерну струју у устаљеном стању, када нема промене брзине обртања нити промене јачине струја у намотајима. Док се тренутна вредност струје означава са $i(t)$, јачина струје у устаљеном стању означава се са I. У побудном намотају је устаљено стање дефинисано једнакошћу $U_P = R_P I_P$. Ова једноставна релација је представљена заменском шемом побудног кола датом у левом делу слике 3.29. Равнотежа напона у колу арматурног намотаја је у устаљеном стању дата изразом

$$U_a = R_a \cdot I_a + k_e \cdot \Phi_P \cdot \Omega_m .$$

Дакле, јачина арматурне струје у устаљеном стању је $I_a = (U_a - E_a)/R_a$. где је $U_a = U_m$ напон који се доводи на четкице, то јест напон који се доводи на мотор. Једначина се може приказати заменском шемом за устаљена стања датом у десном делу слике 3.29. Шема се може користити за одређивање струје, момента и снаге машине за једносмерну струју познате електромоторне силе и напона напајања. У случају када су познати напони и струје, заменска шема се може користити за израчунавање електромоторне силе, што омогућује одређивање брзине обртања према изразу $\Omega_m = E_a/(k_e \Phi_P)$.

Слика 2.29. Заменска шема побудног и арматурног кола за стационарна стања.

Питање (3.8):

За машину једносмерне струје, познато је $k_e \Phi_P = k_m \Phi_P = N_R \Phi_P/(2\pi) = 1$ Wb. Вратило ротора спрегнуто је са радном машином која се противи кретању моментом M_m. Моменат M_m је у равнотежи са електромагнетским моментом, тако да је брзина обртања константна и једнака $\Omega_m = 100$ rad/s. Арматурни намотај се напаја из напонског извора $U_a = 110$ V. Арматурни намотај има еквивалентну отпорност $R_a = 1\ \Omega$. (1) Одредити електромагнетски момент, снагу извора и снагу електромеханичког претварања. (2) Којом ће се брзином обртати ротор уколико се његово вратило раздвоји од радне машине? (3) Претпоставити да је природа радне машине, повезане на вратило мотора, таква да се брзина обртања одржава константном на $\Omega_m = 100$ rad/s, без обзира на величину кретног момента M_{em}. Напон извора је умањен на $U_a = 90$ V. Одредити електромагнетски моменат и снагу претварања у посматраном режиму рада.

Одговор (3.8):

(1) I_a = 10 A, M_{em} = 10 Nm, P_{izv} = 1100 W, P_{em} = 1000 W.
(2) M_{em}= 0 → I_a= 0 → $U_a = E_a$ → ω_m = 110 rad/s).
(3) I_a = -10 A, M_{em} = -10 Nm, P_{em} = - 1000 W, машине ради у генераторском режиму рада.

3.29 Механичка карактеристика

Посматра се машина за једносмерну струју која ради у устаљеном стању, чији је флукс побуде константан, као и напон напајања арматурног намотаја. Повезивање четкица, то јест крајева арматурног намотаја са извором константног напона U_m приказано је на слици 3.30. Будући да је равнотежа напона дата изразом $U_m = U_a = R_aI_a + k_e\Phi_P\Omega_m$, може се закључити да се машина чија је струја једнака нули обрће угаоном брзином $\Omega_0 = U_m/(k_e\Phi_P)$. Будући да је тада и електромагнетски моменат једнак нули, величина Ω_0 се зове *брзина празног хода*. Пошто је $E_a = k_e\Phi_P\Omega_m = U_m - R_aI_a$, пораст арматурне струје при константном напону напајања доводи до смањења електромоторне силе. При константном флуксу, електромоторна сила је пропорционална брзини обртања, па ће пораст арматурне струје довести до смањења брзине обртања. С друге стране, електромагнетски моменат је пропорционалан арматурној струји, тако да се може закључити да у датим условима брзина обртања ротора опада при порасту момента оптерећења.

Наведена разматрања се односе на устаљени режим, у коме је промена брзине обртања једнака нули, па је $J\cdot d\Omega_m/dt = 0$. У датим условима, моменат оптерећења M_m је једнак електромагнетском моменту M_{em}. У равнотежном стању се брзина обртања не мења, тако да Њутнова једначина добија облик $M_{em} = M_m + k_F\cdot\Omega_m \approx M_m$, дакле, електромагнетски моменат је у равнотежи са оптерећењем. У датим условима, арматурна струја $I_a = M_{em}/(k_m\Phi_P)$ је пропорционална моменту оптерећења. Дакле, пораст момента оптерећења доводи до раста јачине струје, што резултује смањењем брзине обртања.

При константном напону напајања арматуре и побуде, брзина обртања ротора зависи од развијеног електромагнетског момента. Веза која постоји између брзине обртања и момента у стационарном стању зове се *механичка карактеристика*. Механичка карактеристика се може представити кривом у M-Ω_m или Ω_m -M координатном систему. Као што заменска шема за устаљена стања описује везу струја и напона на електричним прикључцима машине, тако и механичка карактеристика повезује брзину обртања ротора и моменат на механичком прикључку, то јест вратилу. Механичка карактеристика зависи од напона напајања арматурног и побудног намотаја

као и од параметара мотора. Промена арматурног напона мења брзину празног хода Ω_0, што се одражава и на функцију $M_{em}(\Omega_m)$. Промена побудног напона доводи до промене струје у побудном намотају и до промене флукса побуде, што се одражава и на механичку карактеристику.

Слика 3.30. Напајање арматурног намотаја из извора константног напона.

Механичка карактеристика се може одредити полазећи од израза за равнотежу напона у арматурном намотају који је дат једначином (3.18). Одређивање функције $M_{em}(\Omega_m)$ почиње од израза $M_{em} = k_m \Phi_P I_a$. Потребно је изразити струју арматуре у функцији брзине обртања ротора. На основу једначине $U_a = R_a I_a + k_e \Phi_P \Omega_m$, која приказује равнотежу напона арматурног кола у устаљеном стању, струја је једнака

$$I_a = \frac{U_m - E_{AB}}{R_a} = \frac{U_m - k_e \Phi_P \Omega_m}{R_a} \ ,$$

па се електромагнетски моменат израчунава према изразу

$$\begin{aligned} M_{em} &= k_m \Phi_P \frac{U_m - k_e \Phi_P \Omega_m}{R_a} = k_m \Phi_P \frac{U_m}{R_a} - \frac{k_m k_e \Phi_P^2}{R_a} \Omega_m \\ &= M_0 - S \cdot \Omega_m \ . \end{aligned} \tag{3.23}$$

Моменат $M_0 = k_m \Phi_P U_m / R_a$ у једначини (3.23) представља *полазни момент*, односно електромагнетски моменат који машина развија у условима када је ротор заустављен. Ако је брзина обртања ротора једнака нули, тада је и индукована електромоторна сила једнака нули, па у арматурном намотају постоји *полазна* струја $I_0 = U_m / R_a$. Доцније ће бити показано да јачина полазне струје узима врло велике вредности које могу довести до оштећења машине или извора који напаја машину. Да би струја у области малих брзина била ограничена на прихватљиве вредности, неопходно је умањити напон напајања и прилагодити га брзини обртања, или повезати

редно додатни отпорник да би се увећала укупна отпорност ΣR и тако ограничила струја. Параметар S у изразу (3.23) представља нагиб или *стрмину* механичке карактеристике. Стрмина S карактеристике $M_{em}=M_0-S\Omega_m$ одређује однос између промене момента ΔM_{em} и промене брзине $\Delta\Omega_m$. Уколико је стрмина велика, мале промене у брзини обртања доводе до велике промене момента.

Као што електрична машина има своју механичку карактеристику $M_{em}(\Omega_m)$, тако и радна машина која је повезана на вратило може имати моменат оптерећења који се мења у функцији брзине обртања. Карактеристика $M_m(\Omega_m)$ се зове механичка карактеристика оптерећења. Будући да се устаљено стање се достиже при $M_m = M_{em}$, устаљени радни режим одговара тачки у M-Ω_m дијаграму где се секу механичка карактеристика електричне машине и карактеристика оптерећења. На слици 3.31, карактеристика терета је представљена правом линијом L. Приказане су и две механичке карактеристике електричне машине за једносмерну струју. Карактеристике K_1 и K_2 се добијају при различитим условима напајања арматурног намотаја. Ако машина има механичку карактеристику K_1, устаљено стање се достиже у радном режиму (M_1, Ω_1). Са карактеристиком K_2, успоставља се устаљено стање у тачки (M_2, Ω_2). Дакле, променом напона напајања могуће је изменити механичку карактеристику машине и променити брзину обртања ротора и електромагнетски моменат у устаљеном стању.

Слика 3.31. Пресек механичких карактеристика машине (K_1, K_2) и карактеристике оптерећења (L).

Стабилна равнотежа

У зависности од нагиба ових карактеристика, равнотежа $M_m = M_{em}$ може бити стабилна или лабилна. На основу механичке карактеристике електричне машине $M_{em}=M_0 - S_{em}\Omega_m$ и карактеристике терета $M_m=M_{0m} - S_m\Omega_m$, може се закључити да се при промени брзине обртања ротора за $\Delta\Omega_m$ има промена електромагнетског момента $\Delta M_{em} = - S_{em}\Delta\Omega_m$ и промена момента оптерећења $\Delta M_m = - S_m\Delta\Omega_m$. Полазећи од устаљеног стања у коме се ротор машине обрће угаоном брзином Ω_1 и у коме су електромагнетски моменат и моменат оптерећења једнаки M_1, може се одредити утицај параметара S_{em} и S_m на динамичко понашање система који чине електрична и радна машина. У устаљеном стању, промена брзине је једнака нули. Њутнова једначина тада гласи

$$J\frac{\mathrm{d}\Omega_m}{\mathrm{d}t} = M_{em} - M_m = M_1 - M_1 = 0.$$

Уколико из било ког разлога дође до мале промене брзине обртања $\Delta\Omega_m$, нова вредност брзине обртања ће бити $\Omega_1 + \Delta\Omega_m$, електромагнетски моменат ће имати вредност $M_1 - S_{em}\Delta\Omega_m$, док ће нови моменат оптерећења бити $M_1 - S_m\Delta\Omega_m$. Будући да је Ω_1 константа, Њутнова једначина сада добија облик

$$\begin{aligned} J\frac{\mathrm{d}(\Omega_1 + \Delta\Omega_m)}{\mathrm{d}t} &= J\frac{\mathrm{d}\Delta\Omega_m}{\mathrm{d}t} = M_{em} - M_m = \\ &= M_1 - S_{em}\Delta\Omega_m - M_1 + S_m\Delta\Omega_m = \\ &= (S_m - S_{em})\Delta\Omega_m. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Ако је $S_m - S_{em} > 0$, позитивна вредност $\Delta\Omega_m$ даје позитиван први извод $\mathrm{d}(\Delta\Omega_m)/\mathrm{d}t$, па ће се поремећај $\Delta\Omega_m$ прогресивно увећавати. Када је поремећај $\Delta\Omega_m$ негативне вредности, вредност извода $\mathrm{d}(\Delta\Omega_m)/\mathrm{d}t$ је такође негативна, па ће поремећај прогресивно напредовати у негативну страну.

Ако је $S_m - S_{em} < 0$, позитивна вредност $\Delta\Omega_m$ даје негативан први извод $\mathrm{d}(\Delta\Omega_m)/\mathrm{d}t$. Дакле, поремећај $\Delta\Omega_m > 0$ ће се умањивати. Динамичко понашање се назива стабилним уколико се систем враћа у равнотежно стање из кога је изведен неким поремећајем. Ако се систем не враћа у равнотежно стање већ се од њега прогресивно удаљава, ради се о нестабилном динамичком понашању.

Питање (3.9):

Полазећи од једначине (3.24) и сматрајући да су познате стрмине карактеристика, моменат инерције као и $\Delta\Omega_m(0) = A$, одредити функцију $\Delta\Omega_m(t)$.

Одговор (3.9):

Решење диференцијалне једначине dy/dx = ax је $y(x) = y(0)\cdot e^{ax}$. У једначини (3.24), $y = \Delta\Omega_m$, $y(0) = A$, $x = t$, док је $a = (S_m\text{-}S_{em})/J$. Дакле, промена $\Delta\Omega_m$ је одређена изразом

$$\Delta\Omega_m(t) = \Delta\Omega_m(0)\cdot e^{\frac{S_m - S_{em}}{J}t}.$$

3.30 Стрмина карактеристике и брзина празног хода

Механичка карактеристика машине за једносмерну струју на којој су дати пресеци са апсцисом и ординатом дата је на слици 3.32. Пресек са ординатом представља брзину празног хода Ω_0 којом се ротор обрће у случају да нема арматурне струје и да је електромагнетски моменат једнак нули. На основу једначине (3.23), брзина празног хода је

$$\Omega_0 = \frac{M_0}{S} = \frac{U_m}{k_e \Phi_P}. \tag{3.25}$$

Пресек са апсцисом представља полазни моменат који машина развија при заустављеном ротору и који износи

$$M_0 = k_m \Phi_P \frac{U_m}{R_a}. \tag{3.26}$$

Стрмина механичке карактеристике одређена је односом величина ΔM_{em} и $\Delta\Omega_m$ приказаних на слици 3.32. Уобичајено је да се механичка карактеристика представи у облику момента $M_{em} = M_0 - S\Omega_m$. Другим речима, стрмина S се сматра позитивном у случају да моменат опада при порасту брзине. Стога се стрмина одређује према изразу

$$S = -\frac{\Delta M_{em}}{\Delta\Omega_m}. \tag{3.27}$$

Стрмина механичке карактеристике електричне машине за једносмерну струју напајане на начин дат на слици 3.30 једнака је

$$S = \frac{k_m k_e \Phi_P^2}{R_a}. \tag{3.28}$$

Механичка карактеристика се може представити и функцијом $\Omega_m = f(M_{em})$. Једначина (3.23) се може представити у облику

$$\Omega_m = \Omega_0 - \frac{1}{S} M_{em} . \tag{3.29}$$

Слика 3.32. Брзина празног хода и полазни моменат механичке карактеристике.

Извор који напаја арматурни намотај има коначну унутрашњу отпорност, као и проводници који повезују извор са четкицама. Поред тога, у електрично коло арматурног намотаја може се редно везати додатни отпорник у настојању да се умање полазна струја и полазни моменат или да се промени механичка карактеристика и брзина обртања ротора. У пракси, укупна отпорност у колу арматуре је већа од отпорности R_a. Стога у изразима (3.23), (3.26) и (3.28) на местима где стоји ознака R_a треба писати ΣR. Ознака ΣR представља збир свих отпорности у колу арматурног намотаја, то јест, збир унутрашње отпорности извора, отпорности веза, отпорности редно везаних отпорника као и отпорности арматурног намотаја R_a.

3.31 Промена брзине обртања

Ако у колу арматуре нема додатних отпорника, укупна отпорност кола ΣR је врло мала. У пракси, отпорност R_a може бити један стоти део, или један хиљадити део количника радног напона и радне струје. Стога је стрмина механичке карактеристике машине за једносмерну струју са независном побудом релативно велика. То значи да се ће при променама момента доћи до врло малих промена брзине. На основу једначине (3.29), велика

вредност стрмине механичке карактеристике резултује брзином обртања ротора која се врло мало разликује од брзине празног хода. Према изразу (3.25), брзина празног хода је одређена напоном напајања. Ако постоји потреба за променом брзине обртања, треба у коло арматуре редно повезати отпорник са променљивом отпорношћу, или напајати машину из извора променљивог напона U_a. Код уградње променљивог отпорника, увећани су губици стога што у отпорнику постоји арматурна струја која ствара губитке услед Џуловог ефекта. Код напајања променљивим напоном изостаје отпорник, али је потребно имати статички претварач снаге који пружа могућност континуалне промене напона.

Промена напона $U_m = U_a$ мења механичку карактеристику машине. На основу једначина (3.23) и (3.27), може се закључити да напон напајања нема утицаја на стрмину механичке карактеристике. С друге стране, брзине празног хода је пропорционална напону. Дакле, променом напона напајања се добија фамилија механичких карактеристика које имају исти нагиб. Напон напајања одређује пресек сваке од карактеристика са ординатом дијаграма који је дат на слици 3.33. Транслација механичке карактеристике омогућује да се промени брзина при којој постоји пресек са карактеристиком терета. Другим речима, брзина обртања ротора се може променити деловањем на напон напајања арматуре. Карактеристика K_4 се добија у случају када је напон напајања арматурног намотаја једнак нули. Ова карактеристика пролази кроз координатни почетак.

Дијаграм на слици 3.33 је подељен у четири квадранта. У квадранту I, брзина обртања и електромагнетски моменат имају позитивне вредности. Њихов производ представља снагу претварања електричне енергије у механичку и има позитивну вредност у првом квадранту, што значи да у овом квадранту машина ради као мотор. У другом и четвртом квадранту, смер у коме делује електромагнетски моменат је супротан смеру обртања ротора. У овим квадрантима, знак момента је супротан знаку брзине па је снага претварања негативна. Машина ради као генератор и ствара електромагнетски моменат који се противи кретању, односно *кочи*. У трећем квадранту, машина ради у моторном режиму рада, једнако као и у првом, с тим што се обрће у супротном смеру.

Потреба за радом у једном, два или сва четири квадранта зависи од примене. Уколико машина за једносмерну струју покреће вентилатор који се увек обрће на једну страну, тада није потребно мењати смер брзине. Будући да је моменат вентилатора одређен смером обртања, не мења се ни смер у коме делује моменат. У описаном случају, машина увек ради у првом квадранту. Међутим, ако се машина за једносмерну струју користи за управљање кретањем различитих објеката у оба смера, потребан је рад у сва четири квадранта. Смер у коме делује моменат при покретању је супротан од смера у коме он делује при кочењу, односно заустављању. По-

ред тога, брзина узима позитиван знак при кретању у једном смеру и негативан знак при кретању у другом смеру. Дакле, потребно је остварити рад са све четири могуће комбинације знака величина M_{em} и Ω_m. Другим речима, потребно је остварити *четвороквадрантни рад*.

Слика 3.33. Утицај арматурног напона на механичку карактеристику.

Питање (3.10):

Радна машина се противи кретању моментом $M_m = 0{,}001\Omega^2$. За мотор једносмерне струје са независном побудом и константним побудним флуксом познати су параметри $R_a = 0{,}1\ \Omega$, $k_m\Phi_P = 1$ Wb, $U_a = 100$ V. Одредити брзину обртања у устаљеном стању.

Одговор (3.10):

У устаљеном стању постоји једнакост електромагнетског момента и момента оптерећења. Брзина обртања у устаљеном стању одговара пресеку механичке карактеристике мотора и карактеристике терета. На основу једначине (3.23), електромагнетски моменат је једнак $M_{em} = M_0 - S\Omega_m$. За дате параметре, $M_0 = 1{\cdot}100/0{,}1$ Nm = 1000 Nm, док је $S = 1{\cdot}1/0{,}1$ Nm·s/rad. Једнакост $M_{em}(\Omega_m) = M_m(\Omega_m)$ представља квадратну једначину по променљивој

Ω_m. Позитивно решење квадратне једначине је 99,02 rad/s, што је брзина обртања посматраног система у устаљеном стању.

3.32 Генератор за једносмерну струју

Машине за једносмерну струју могу радити у генераторском режиму рада. Ако се обртање ротора одржава помоћу парне или водене турбине, између четкица А и В индукта је расположив једносмерни напон одређен електромоторном силом. Напон $U_a = U_{AB}$ се може користити за напајање електричних потрошача за једносмерну струју. Арматурни напон генератора се често означава са U_G. Када се између четкица прикључи отпорни потрошач, у колу арматуре се успоставља струја у смеру супротном од смера струје I_a. Уважавајући претходно назначени референтни смер за арматурну струју, у генераторском раду се има струја са предзнаком минус. Зато се при анализи генератора за једносмерну струју често усваја референтни смер струје који је супротан од референтног смера за моторни режим рада. У заменској шеми на слици 3.34, струја $I_G = -I_a$ постоји у смеру од четкице В ка четкици А. Четкица А представља позитивни пол напајања потрошача. Полазећи од једначине

$$U_G = U_a = R_a I_a + k_e \Phi_P \Omega_m ,$$

у коју се уводи смена $I_G = -I_a$, добија се израз

$$U_G = k_e \Phi_P \Omega_m - R_a I_G = E_a - R_a I_G , \qquad (3.30)$$

који одређује промену напона генератора у функцији струје електричних потрошача I_G. Полазећи од добијеног израза, добија се струјно напонска карактеристика генератора, дата на слици 3.34. Напон празног хода је једнак E_a. Нагиб $\Delta U/\Delta I$ који одређује пад напона на потрошачу при увећању струје потрошача једнак је збиру отпорности арматуре R_a и отпорности проводника који повезују генератор и потрошач.

У случају да генератор напаја потрошаче једносмерне струје, потребно је да се потрошачи напајају константним напоном. Због пада напона услед коначне отпорности арматурног намотаја, напон на потрошачима зависи од струје потрошње. Да би се напон U_G одржао на жељеној вредности, потребно је повећати електромоторну силу. У пракси је потребно мерити напон U_G, поредити га са жељеном вредношћу, а потом деловати на побудни напон и побудну струју да би се остварили побудни флукс и електромоторна сила који на потрошачима обезбеђују напон $U_G = E_a - R_a I_G$. На описани начин врши се регулација напона генератора за једносмерну струју.

Ако генератор за једносмерну струју напаја отпорни потрошач у коме постоји струја јачине $I_G > 0$, арматурна струја је тада једнака $I_a = -I_G < 0$. Будући да је јачина арматурне струје I_a мања од нуле, негативан је и електромагнетски моменат M_{em}. Пошто је $M_{em}<0$, електромагнетски моменат се противи обртању ротора, односно кочи. Дакле, снага електромеханичког претварања $P_{em} = M_{em}\Omega_m$ је негативна, што значи да се механички рад претвара у електричну енергију. Генератор добија механички рад преко вратила, од погонске турбине. Производ кретног момента турбине M_T и угаоне брзине обртања представља механичку снагу која се предаје машини. Моменат M_T делује у смеру који је супротан у односу на усвојени референтни смер за моменат радне машине M_m. Усвајајући референтне смерове дате на слици 3.26, у генераторском режиму рада је $M_{em}<0$ и $M_m<0$.

Слика 3.34. Струјно напонска карактеристика генератора за једносмерну струју.

<u>Питање (3.11):</u>

Водена турбина покреће ротор генератора једносмерне струје угаоном брзином Ω_m= 100 rad/s. Познати су параметри R_a = 1 Ω и $k_m\Phi_P$ = 1 Wb, док је отпорност електричног потрошача повезаног између четкица једнака R_{OPT} = 4 Ω. Одредити напон на потрошачу, моменат $M_T = -M_{em}$ којим водена турбина делује на ротор, снагу турбине $P_T = M_T\omega_m$, као и снагу $P_G = U_aI_G$ која се предаје потрошачу. Шта чини да се има $P_T > P_G$?

<u>Одговор (3.11):</u>

Електромоторна сила генератора је E_a = 100 V. Струја генератора је једнака I_G= -I_a= 100 V/(1 Ω+4 Ω)= 20 A. Напон на потрошачу је једнак 80 V. Електромагнетски моменат је једнак -1·20 Nm = -20 Nm. Моменат турбине је једнак M_T = -M_{em} = 20 Nm. Снага турбине је једнака P_T = 2000 W. Снага

која се предаје потрошачу је P_G = 1600 W. Разлика од $R_a I_a^2$ = 400 W се претвара у топлоту у намотајима ротора.

3.33 Напајање мотора за једносмерну струју

3.33.1 Утврђивање карактеристика извора за напајање арматуре

Мотор за једносмерну струју узима снагу добијену из извора, обавља електромеханичко претварање и даје механичку снагу и рад на излазном вратилу. Електрични мотори су најчешће обртне машине који на механичком прикључку (вратилу) дају кретни момент. Снага пренета радној машини, то јест механичком подсистему, једнака је производу кретног момента и брзине обртања.

Слика 3.35. Промена положаја, брзине и момента у једном циклусу.

Од интереса је утврдити карактеристике које треба да има извор за напајање арматурног намотаја. Мотор за једносмерну струју се најчешће користи за управљање кретањем алата, предмета обраде, полуфабриката, готових производа, возила или других објеката. Кретање најчешће укључује полазак из почетног положаја, кретање према циљном положају, зауста-

вљање у циљном положају и повратак натраг, у почетни положај. Пример промене положаја θ, брзине Ω и момента M_{em} током кретања дат је на слици 3.35.

Бројевима од 1 до 4 су означене карактеристичне фазе кретања. У фази 1, моменат има позитивну вредност и убрзава ротор, чиме започиње кретање према циљном положају. По достизању жељене брзине, моменат се смањује а брзина одржава константном. У фази 2, положај θ је близак циљу. Стога се развија моменат у негативном смеру, како би се брзина свела на нулу при уласку у циљани положај. При кретању уназад, брзина и моменат који постоје у фазама 3 и 4 супротног су смера од брзине и момента у фазама 1 и 2. Може се закључити да циклус кретања дат на слици 3.35 садржи све четири могуће комбинације смерова брзине и момента, и то

- $M_{em} > 0$, $\Omega_m > 0$ (фаза 1),
- $M_{em} < 0$, $\Omega_m > 0$ (фаза 2),
- $M_{em} < 0$, $\Omega_m < 0$ (фаза 3),
- $M_{em} > 0$, $\Omega_m < 0$ (фаза 4).

У првој и трећој фази, електрична машина ради у моторном режиму рада, док у другој и четвртој она ради у генераторском режиму рада. Будући да је смер момента одређен смером арматурне струје, док је арматурни напон приближно једнак индукованој електромоторној сили, чији је знак одређен смером угаоне брзине обртања, приказани дијаграм се може користити за сагледавање карактеристика извора из кога треба напајати арматурни намотај. На основу претходних закључака и релација $M_{em} = k_m \Phi_P I_a$ и $U_a \approx E_a = k_e \Phi_P \Omega_m$, може се закључити да током кретања дефинисаног сликом 3.35 напон и струја арматурног намотаја мењају смер на следећи начин,

- $I_a > 0$, $U_a > 0$ (фаза 1),
- $I_a < 0$, $U_a > 0$ (фаза 2),
- $I_a < 0$, $U_a < 0$ (фаза 3),
- $I_a > 0$, $U_a < 0$ (фаза 4).

Дакле, извор који напаја арматурни намотај треба да омогући постојање напона и струја у оба смера, и то у све 4 комбинације. Овакви захтеви одређују топологију статичког претварача из кога се машина напаја. Постоје и примене мотора за једносмерну струју код којих нема промене смера брзине и момента. Тада је извор за напајање арматурног намотаја једноставније реализовати. У раније наведеном примеру погона вентилатора, маши-

на ради у првом квадранту, и тада је арматурни намотај могуће напајати из статичког претварача чије су излазне величине $I_a > 0$ и $U_a > 0$.

3.33.2 Четири квадранта у *M-Ω* и *U-I* дијаграму

Ако се машина за једносмерну струју користи за управљање кретањем које је приказано на слици 3.35, у различитим фазама кретања она пролази кроз сва четири квадранта *M-Ω* дијаграма. Уколико се не мења смер флукса побуде, смер момента је одређен смером струје, док је смер електромоторне силе одређен смером угаоне брзине обртања. На основу везе између момента и струје ($M_{em} = k_m \Phi_P I_a$) као и везе напона и брзине обртања ($U_a \approx E_a = k_e \Phi_P \Omega_m$), квадранти *M-Ω* дијаграма и *U-I* дијаграма се могу приказати на заједничкој слици 3.36.

Слика 3.36. Четири квадранта *U-I* дијаграма и *M-Ω* дијаграма.

I квадрант:

Машина развија моменат позитивне вредности и обрће се у референтном смеру, тако да је $M_{em} > 0$ и $\Omega_m > 0$. Арматурни напон и струја су позитивни зато што је $U_a \approx E_a$ и $E_a \sim \Omega_m$, док је $I_a \sim M_{em} > 0$. Снага која се узима из извора је позитивна, $P_i = U_a I_a > 0$. Снага електромеханичког претварања је такође позитивна, $P_{em} = M_{em}\Omega_m = E_a I_a > 0$. Машина ради у моторном режиму рада.

II квадрант:

Машина развија моменат негативне вредности док је угаона брзина обртања позитивна у односу на референтни смер, тако да је $M_{em} < 0$ и $\Omega_m > 0$. Арматурни напон је позитиван али је струја негативна. Снага која се узима из извора је негативна зато што напон и струја немају исти знак. Снага електромеханичког претварања је такође негативна јер се смер момента разликује од смера струје. Машина ради у генераторском режиму рада. Машина се противи кретању, то јест кочи.

III квадрант:

Машина развија негативан моменат и обрће се у смеру супротном од референтног, тако да је $M_{em} < 0$ и $\Omega_m < 0$. Арматурни напон и струја су мањи од нуле зато што је $U_a \approx E_a \sim \Omega_m < 0$, док је $I_a \sim M_{em} < 0$. Снага која се узима из извора је позитивна, $P_i = U_a I_a > 0$. Снага електромеханичког претварања је такође позитивна, $P_{em} = M_{em}\Omega_m = E_a I_a > 0$. Машина ради у моторном режиму рада.

IV квадрант:

Машина развија позитиван моменат и обрће се у смеру супротном од референтног, тако да је $M_{em} > 0$ и $\Omega_m < 0$. Арматурна струја је позитивна али је напон негативан. Снага која се узима из извора је негативна зато што напон и струја немају исти знак. Снага електромеханичког претварања је такође негативна јер се смер момента разликује од смера струје. Машина ради у генераторском режиму рада. Машина се противи кретању и кочи.

3.33.3 Четвороквадрантни енергетски претварач

Овде је дата топологија статичког претварача снаге који се користи за напајање арматурног намотаја електричне машине за једносмерну струју током управљања кретањем датим на слици 3.35. Електрична шема претварача је дата на слици 3.37. Основни захтеви су описани у претходном одељку. Претварач треба да напаја арматурни намотај променљивим напонима и струјама у све четири могуће комбинације поларитета ових величина.

Слика 3.37. Топологија претварача за напајање машине за једносмерну струју.

У левом делу слике, ознака *E* представља извор једносмерног напона који напаја статички претварач. Напон *E* се добија из батерије или исправљача. Исправљач је статички претварач који садржи диоде или друге полупроводничке прекидаче снаге. Он се напаја из монофазне или трофазне мреже. На улазу у исправљач постоје наизменични напони и струје. Исправљач претвара електричну енергију система наизменичних напона и струја у електричну енергију система са једносмерним напонима и струјама. Диодни исправљач даје излазни једносмерни напон *E* који је одређен ефективном вредношћу улазног наизменичног напона. Ако се исправљач напаја из градске мреже, напон *E* се код диодног исправљача не може мењати.

Коришћењем извора *E*, потребно је добити арматурни напон оба поларитета, позитивног и негативног. Решење које даје потребно напајање је прекидачки мост који садржи четири прекидача, S_1 .. S_4. Овде се прекидачи сматрају идеалним, што значи да у њима нема струје када су искључени (OFF), да је пад напона на прекидачима једнак нули када су укључени (ON), као и да приликом промене стања прекидача (*комутација*) нема губитака (*комутациони губици*). Реални механички као и полупроводнички прекидачи имају извесну струју у искљученом стању и коначан пад напон при провођењу. При свакој комутацији постоје губици енергије. Комутациони губици код механичких прекидача настају тако што се приликом раздвајања полова (контаката) накратко задржи струја кроз електрични лук који се приликом удаљавања контаката прекида. Приликом укључења механичког прекидача, струја између контаката настаје пре него што се они приближе у положај у коме се додирују свом површином, што доприноси комутационим губицима. Код полупроводничких прекидача снаге,

комутациони губици настају услед појава другачије природе. У оба случаја снага комутационих губитака зависи од енергије која се изгуби при свакој комутацији и броја комутација у јединици времена.

Укључењем прекидача S_1 и S_4, између четкица А и В успоставља се напон $+E$. Укључењем S_2 и S_3, између четкица А и В има се напон $-E$. Дакле, прекидачки мост приказан на слици 3.37 омогућује да се постигну арматурни напони оба поларитета. Струја која постоји у укљученим прекидачима једнака је струји арматуре. Дакле, могућа су оба смера струје у прекидачима. Према закључцима у претходном одељку, смер струје и смер напона су одређени квадрантом у коме ради електрична машина за једносмерну струју.

Сваки од четири приказана прекидача има два могућа стања, може бити укључен или искључен. Кад би се прекидачи могли укључивати независно, укупан број прекидачких стања групе од четири прекидача био би једнак $2^4 = 16$. Када се прекидачи повежу у прекидачки мост, дат на слици 3.37, број расположивих прекидачких стања се умањује. Број прекидача који су укључени мора бити једнак 2 у сваком посматраном тренутку. Ако би број укључених прекидача био 3, тада би у грани S_1-S_2 или у грани S_3-S_4 била укључена оба прекидача. Тиме би извор E био доведен у кратак спој. Било да се ради о батерији или исправљачу, извор E има врло малу унутрашњу отпорност, па би се у прекидачима и кроз извор успоставила врло велика струја која би убрзо довела до трајних оштећења. С друге стране, број прекидача који су укључени не може бити мањи од 2 зато што се арматурна струја успоставља тако што је грана S_1-S_2 повезана са четкицом А, док је грана S_3-S_4 повезана са четкицом В. Ради успостављања арматурне струје, неопходно је да проводи један прекидач у грани S_1-S_2 и један прекидач у грани S_3-S_4. Број расположивих прекидачких стања је једнак 4, и она су дата у наредној Табели 3.1. За сваки од 4 прекидача, ознака 0 представља искључено стање (OFF) док ознака 1 представља укључено стање (ON). У десној колони је дат напон u_i који се има на излазу из прекидачког моста.

Табела 3.1: Прекидачка стања.

S1	S2	S3	S4	u_i
0	1	0	1	0
0	1	1	0	-E
1	0	0	1	+E
1	0	1	0	0

Прекидачки мост на слици 3.37 користи полупроводничке прекидаче снаге. Примену налазе биполарни транзистори (*BJT, Bipolar Junction Tran-*

sistor), мосфет транзистори (*MOSFET, Metal Oxyde Semiconductor Field Effect Transistor*) и игбт транзистори (*IGBT, Insulated Gate Bipolar Transistor*). Врста транзистора коју треба користити у неком статичком претварачу зависи од радног напона, радне струје, комутационе учестаности, услова хлађења, тражене поузданости, цене и других фактора. Свака од поменутих транзисторских технологија има своје предности, мане и место примене. Најчешће коришћене ознаке за поменуте транзисторе дате су на слици 3.38. Код BJT транзистора, стање прекидача се контролише променом базне струје. Код IGBT и MOSFET транзистора, укључење и искључење се врши променом напона на управљачкој електроди – гејту (*gate*). Закочени односно искључени транзистор има улогу отвореног прекидача у коме не постоји електрична струја или је јачина струје врло мала. Затворени односно укључени прекидач на себи има врло мали пад напона који износи од 100 mV до 2,5 V. MOSFET и IGBT транзистори се укључују тако што се на управљачку електроду – гејт – доведе напон близак +15 V, чиме се канал транзистора доводи у проводно стање. Биполарни транзистор се укључује тако што се у базу доведе струја довољне јачине да транзистор уђе у стање засићења, у коме је напон на њему врло мали. Управљање транзисторима мора бити организовано тако да се прекидачи S_1 и S_2 (то јест S_3 и S_4) не укључују истовремено. Истовремено укључење транзистора у једној грани би проузроковало кратак спој извора и уништило транзисторе. У статичким претварачима се користе транзистори који раде са врло великим струјама и напонима. У пракси се сусрећу напони преко 1000 V и струје јачине веће од 1000 A. За разлику од сигналних транзистора, овакве направе се зову *транзистори снаге* или *снажни* транзистори.

Напајање арматурног намотаја треба обезбедити за оба смера струје. Стога сваки од прекидача мора бити спреман да проводи струју у оба смера. Сваки од поменутих транзистора исправно ради само са једним смером струје. На пример, биполарним транзистором је могуће управљати у случају да струја кроз транзистор постоји у смеру из колектора у емитер. У емитерској електроди се може имати струја супротног смера у случају да је спој база-емитер инверзно поларизован, и да је при томе напон инверзне поларизације споја близак пробојном напону. Коришћење транзистора у таквом режиму рада није од интереса за статичке претвараче снаге. Слична разматрања показују да су BJT, IGBT и MOSFET транзистори направе које проводе струју у једном смеру. Зато се прекидачи S_1 .. S_4 граде тако што се паралелно са транзистором снаге повеже и једна снажна полупроводничка диода. Елемент означен са (C) на слици 3.38 представља паралелну везу једног биполарног транзистора који проводи у смеру CE и једне снажне диоде која проводи струју у смеру EC. На описани начин се гради сваки од четири прекидача приказана на слици 3.37. Дакле, сваки од чети-

ри ознаке $S_1..S_4$ на слици 3.37 треба посматрати као паралелну везу једног транзистора снаге и једне снажне диоде.

Према Табели 3.1, позитиван напон на арматурном намотају добија се укључењем дијагонале S_1-S_4 прекидачког моста. Ако је при томе арматурна струја позитивна, она ће постојати у транзисторима S_1 и S_4. У противном, струја ће се успоставити кроз снажне диоде повезане паралелно са поменутим транзисторима. Дакле, приказана прекидачка структура омогућује напајање арматурног намотаја струјама и напонима оба поларитета, чиме је обезбеђен рад машине за једносмерну струју у сва четири квадранта. Недостатак описаног начина напајање арматуре је то што није могуће обезбедити континуалну промену напона. Наиме, комутацијом прекидача, на четкице арматурног намотаја могуће је довести напоне $+E$, $-E$ или 0.

Слика 3.38. Ознаке полупроводничких прекидача снаге. Прекидач са IGBT транзистором (A), MOSFET транзистором (B) и BJT (биполарним) транзистором (C).

Питање (3.12):

Која прекидачка стања дају арматурни напон који је једнак нули?

Одговор (3.12):

Укључењем прекидача S_2 и S_4 напон арматуре се изједначава са нулом. Арматурни намотај је кратко спојен и у случају када су укључени прекидачи S_1 и S_2.

3.33.4 Промена арматурног напона применом ширинске модулације

Према подацима у Табели 3.1, излазни напон u_i може узети једну од три расположиве вредности, $+E$, $-E$ и 0. Овде се показује да је у примени електричних мотора за једносмерну струју потребно обезбедити континуалну

промену напона напајања. Прекидачка структура са слике 3.37 не може дати излазни напон који се континуално мења. Могуће је, међутим генерисати напон u_i у облику поворке импулса промењљиве ширине. Променом ширине импулса не може се остварити континуална промена тренутне вредности напона, али је могуће мењати средњу вредност напона. Промена ширине импулса се зове и *модулација ширине импулса* или *Pulse Width Modulation*.

Потреба за променом арматурног напона.

Код индустријских робота, електричних возила, као и већине примена где се управља кретањем, постоји потреба за континуалном променом брзине електричних мотора. Напон који треба довести на арматурни намотај једнак је $U_a = R_a I_a + k_e \Phi_P \Omega_m$. Намотаји електричних машина се изводе тако да им је отпорност релативно мала да би губици услед Џуловог ефекта били што мањи. Зато је оправдано претпоставити да је $U_a \approx k_e \Phi_P \Omega_m$. У условима када је флукс константан, напон арматуре треба мењати континуално како би се остварила континуална промена брзине обртања. Расположиви напонски извори најчешће имају константан напон E_i. По потреби, напон се може умањити за $\Delta R I_a$ повезивањем у струјно коло серијског отпорника отпорности ΔR. *Реостатски* приступ регулисању арматурног напона омогућује да се напон $U_a = E_i - \Delta R I_a$ мења променом отпорности ΔR. Ипак, реостатска регулација је енергетски неповољна јер је праћена губицима услед Џуловог ефекта у отпорнику. У случају када је потребно имати $U_a = ½ E_i$, половина улазне снаге би се претварала у топлоту на серијском отпорнику ΔR, док би се друга половина давала машини за једносмерну струју.

Слика 3.39. Утицај ширине импулса на средњу вредност напона.

Ширинска модулација

Напајање електричних машина променљивим напоном остварује се применом прекидачких извора. Пример извора који има прекидачки мост дат је на слици 3.37. Он нема серијске отпорнике нити друге елементе у којима би постојали губици. Према Табели 3.1, прекидачко стање S_1=S_4=ON, S_2=S_3=OFF даје арматурни напон U_a = +E, где је E једносмерни напон који се доводи на улазне прикључке прекидачког моста. Уколико се прекидачко стање промени и активира друга *дијагонала*, тада је S_1=S_4=OFF, S_2=S_3=ON, па се добија арматурни напон U_a = -E. Ниједно од два посматрана стања не даје могућност континуалне промене напона. Међутим, брзим периодичним смењивањем прекидачких стања може се добити поворка импулса променљиве ширине. Континуалном променом ширине импулса могуће је остварити континуалну промену средње вредности напона.

Средња вредност поворке импулса

Ако се арматурни напон добијен на излазу прекидачког моста и означен ознаком U_{sr} мења периодично, интервали у којима је укључена дијагонала S_1-S_4 смењују са интервалима у којима је укључена дијагонала S_2-S_3. Период T је најчешће близак 100 μs. Током једног периода, прекидачко стање у коме је укључена дијагонала S_1-S_4 задржава се у интервалу $0<t_{ON}<T$, док је током преосталог дела периода укључена дијагонала S_2=S_3. Облик напона који се добија на арматурном намотају приказан је на слици 3.39. Средња вредност напона је пропорционална ширини импулса t_{ON}.

$$U_{sr} = \frac{1}{T}\int_0^T u_i(t)\cdot \mathrm{d}t = \frac{2t_{ON} - T}{T}E \tag{3.31}$$

Континуалном променом ширине импулса опсегу $0 < t_{ON} < T$, средња вредност напона се мења од $-E$ до $+E$. Пошто је $U_a \approx k_e\Phi_P\Omega_m$, променом ширине импулса t_{ON} могуће је мењати брзину обртања у опсегу од $E/(k_e\Phi_P)$ до $+E/(k_e\Phi_P)$. Промена ширине импулса се зове *импулсно ширинска модулација*, односно *Pulse Width Modulation* (PWM). Прекидачки мост на слици 3.37 има улогу појачавача снага чији рад зависи од променљиве $t_{ON,}$ и који даје излазни напон u_i чија је средња вредност одређена вредношћу t_{ON}. У случају да је потребно мењати средњу вредност арматурног напона, то се може остварити деловањем на улазни сигнал $t_{ON.}$ Прекидачки мост омогућује промену напона без увећања губитака.

Наизменичне компоненте напона

Поред средње вредности, арматурни напон има и наизменичну компоненту. Облик напона је сложенопериодичан, то јест он садржи већи број хармонијских компоненти. Основна компонента, односно компонента најниже учестаности има фреквенцију $f = 1/T$, где је T период смењивања позитивних и негативних импулса у поворци импулса који дају арматурни напон. Фреквенција f може бити једнака 10 kHz.

Тренутна вредност напона арматуре не одговара захтевима, јер она узима једну од две расположиве дискретне вредности, $+E$ или $-E$. Између четкица постоји напон импулсног облика, који поред жељене средње вредности има и нежељене наизменичне компоненте. Потребно је закључити какве су последице нежељених компоненти напона и може ли описани начин напајања електричних машина бити прихваћен. У случају да наизменичне компоненте напона немају видног ефекта на промену струје, момента и брзине обртања, нити доприносе губицима, рад електричне машине са импулсним напајањем ће у свему одговарати раду са идеалним напонским извором који даје сталан напон $u_a(t) = \text{Const.} = (2t_{ON} - T)E/T$.

Нископропусна природа електричних машина

Полазећи од диференцијалне једначине $u_a(t) = R_a\, i_a(t) + L_a\, \mathrm{d}i_a(t)/\mathrm{d}t + E_a$, која описује прелазне процесе у намотају ротора, применом Лапласове трансформације добија се комплексни лик арматурне струје $I_a(s) = (U_a(s) - E_a(s)) / (R_a + sL_a)$. Функција $W(s) = 1/(R_a + sL_a)$ представља *функцију преноса* арматурног намотаја, која је једнака количнику комплексног лика струје и комплексног лика напона. Будући да је арматурни напон узрок промена арматурне струје, напон се сматра улазом а струја излазом, односно последицом. Функција $W(s)$ је од користи при утврђивању одзива арматурне струје на побуду арматурним напоном у коме су присутне одређене хармонијске компоненте. Количник струје $I(\mathrm{j}\omega)$ и напона $U(\mathrm{j}\omega)$ кружне учестаности $\omega = 2\pi/T$ добија увођењем смене $s = j\omega$ у функцију $W(s)$, која узима облик

$$\frac{I(\mathrm{j}\omega)}{U(\mathrm{j}\omega)} = W(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{R_a + \mathrm{j}\omega L_a} \approx \frac{1}{\mathrm{j}\omega L_a}. \tag{3.32}$$

Када се ради о фреквенцијама од неколико килохерца, оправдано је претпоставити да је $R_a \ll \omega L_a$, тако да је однос наизменичне компоненте струје и напона одређен са $1/(L_a\omega)$. Дакле, што је већа учестаност наизменичне компоненте напона, то је мањи ефекат који она има на арматурну струју. Код фреквенција реда величине 10 kHz, реактанса $L_a\omega$ је тако ве-

лика да се одзив арматурне струје може занемарити. Дакле, импулсни карактер напона тада нема видног ефекта на облик арматурне струје, па се присуство наизменичних компоненти арматурног напона може занемарити. Другим речима, у анализи рада машине напајане из прекидачког, ширински модулисаног извора, прекидачки мост се може представити на упрошћен начин. Ако је прекидачка фреквенција $f = 1/T$ довољно велика, прекидачки извор дат на слици 3.37 може се представити идеалним напонским извором који даје подесив излазни напон. Променом ширине импулса t_{ON}, напон извора се мења по закону $(2t_{ON} - T)E/T$.

3.33.5 Валовитост струје

У претходном одељку је показано да се при довољно великим фреквенцијама f=1/T може занемарити наизменична компонента поворке напонских импулса који се доводе на арматурни намотај. Овде је анализиран облик арматурне струје, облик арматурног напона и облик струје извора из кога се напаја прекидачки мост. На слици 3.37, струја извора E_i је означена са i_u. Наведене величине су приказане на слици 3.41.

Промена струје у арматурном намотају је одређена је диференцијалном једначином

$$\frac{\mathrm{d}i_a}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{L_a}\left(u_a - R_a i_a - E_a\right) \approx \frac{1}{L_a}\left(u_a - E_a\right). \tag{3.33}$$

Пад напона услед отпорности арматурног намотаја се овде занемарује, тако да је промена струје одређена количником разлике (u_a - E_a) и индуктивности L_a. У случају када је електромоторна сила E_a у равнотежи са напоном напајања нема промене струје, и тада постоји устаљено стање у коме се струја не мења. Ако се арматурни намотај напаја из прекидачког извора са импулсно ширинском модулацијом, тренутна вредност арматурног напона узима једну од две расположиве дискретне вредност, $+E_i$ или $-E_i$. Она се може изједначити са индукованом електромоторном силом E_a само у изузетном случају када је E_a= $+E_i$ или E_a=$-E_i$. У већини случајева, електромоторна сила је мања од напона извора E_i,

$$\left|E_a\right| < \left|E_i\right|.$$

Током интервала t_{ON} у сваком периоду T, арматурни напон $+E_i$ је већи од електромоторне силе, први извод струје је позитиван и струја линеарно расте у складу са једначином (3.33). По истеку интервала t_{ON}, арматурни напон $-E_i$ је мањи од електромоторне силе, што доводи до линеарног смањења струје у трајању од T- t_{ON}. На слици 3.40 дата је заменска шема која

садржи извор импулсног напона u_i, индуктивност арматурног намотаја L_a, чија се отпорност овде занемарује, као и електромоторна сила арматурног намотаја која се овде сматра константном. Током смењивања позитивних и негативних импулса напона, арматурна струја осцилује око средње вредности I_{sr}. Амплитуда осцилација струје се означава са ΔI и зове се *валовитост* или *ripple* (eng.). У току једног импулса напона, промена струје је линеарна и одређена једначином (3.33). Да би се утврдила амплитуда осцилација ΔI, полази се од тренутка t_1 на слици 3.40, у коме се успоставља наредни позитивни импулс напона. У датом тренутку, јачина арматурне струје је $i_a(t_1) = I_{sr}-\Delta I$. У интервалу $[t_1 .. t_2]$, напон на излазу прекидачког извора једнак је $u_i = +E_i$, а струја i_a се увећава под нагибом $(E_i - E_a)/L_a$. Пошто се струја линеарно мења, њена јачина је у тренутку $t_2 = t_1 + t_{ON}$, на крају позитивног напонског импулса, једнака

$$i_a(t_2) = i_a(t_1) + t_{ON}\frac{E_i - E_a}{L_a}. \tag{3.34}$$

На интервалу $[t_2 .. t_3]$ на слици 3.40, у току је негативан импулс напајања. Напон на излазу прекидачког извора једнак је $u_i = -E_i$, а струја i_a се смањује под нагибом $(-E_i - E_a)/L_a$. Током поменутог интервала, струја линеарно опада. У тренутку $t_3 = t_2 + t_{OFF} = t_2 + T - t_{ON} = t_1 + T$, на крају негативног напонског импулса, арматурна струја достиже јачину

$$\begin{aligned} i_a(t_3) &= i_a(t_2) + (T - t_{ON})\frac{-E_i - E_a}{L_a} = \\ &= i_a(t_1) + t_{ON}\frac{E_i - E_a}{L_a} + (T - t_{ON})\frac{-E_i - E_a}{L_a} = \\ &= i_a(t_1) + E_i\frac{2t_{ON} - T}{L_a} - E_a\frac{T}{L_a}. \end{aligned} \tag{3.35}$$

У устаљеном стању, тренутна јачина струје на крају сваког негативног импулса једнака је тренутној вредности струје на крају претходног или наредног импулса. Према томе, у устаљеном стању важи једнакост $i_a(t_1) = i_a(t_3)$. На основу једначине (3.34), устаљено стање се достиже у случају када је

$$E_i\frac{2t_{ON} - T}{L_a} - E_a\frac{T}{L_a} = 0,$$

то јест када је електромоторна сила једнака

$$E_a = E_i \frac{2t_{ON} - T}{T}. \tag{3.36}$$

На основу једначине (3.31), претходни израз представља средњу вредност напона на излазу из прекидачког извора. Уз претпоставку да је $R_a \approx 0$, устаљено стање у арматурном колу се достиже у случају да је средња вредност напона извора једнака електромоторној сили арматуре. Устаљено стање је приказано на слици 3.40. Арматурна струја осцилује око средње вредности која се одржава константном. Амплитуда осцилација струје ΔI зависи од прекидачке учестаности, напона напајања и индуктивности арматуре.

Однос ширине позитивног импулса и периода t_{ON}/T зове се *индекс модулације* и означава са m. Уводећи смену у изразе (3.31) и (3.36), у устаљеном стању постоји једнакост

$$U_{sr} = E_a = E_i(2m - 1). \tag{3.37}$$

Амплитуда осцилација струје око средње вредности може се израчунати на основу индекса модулације, индуктивности намотаја, напона напајања и прекидачке фреквенције. Према слици 3.40, на интервалу $[t_1 .. t_2]$ јачина струје се промени за $i_a(t_2) - i_a(t_1) = 2\Delta I$. На основу једначине (3.35),

$$2 \cdot \Delta I = i_a(t_2) - i_a(t_1) = t_{ON} \frac{E_i - E_a}{L_a} = \frac{TE_i}{L_a} m(2 - 2m),$$

па је валовитост струје једнака

$$\Delta I = \frac{TE_i}{L_a}(m - m^2). \tag{3.38}$$

Слика 3.40. Промена арматурне струје током једног периода комутације.

Анализа показује да се у колу арматурног намотаја успоставља устаљено стање у случају када електромоторна сила и индекс модулације задовољавају услов $(2m - 1)E_i = E_a$. Тада се средња вредност струје I_{sr} се не мења. Тренутна вредност струје осцилује око средње вредности са периодом T и амплитудом коју одређује израз (3.38). Фреквенција комутација прекидачког моста $f = 1/T = \omega/(2\pi)$ одређује и фреквенцију осцилација струје. Фреквенција f и кружна учестаност $\omega=2\pi f$ се зову *комутациона фреквенција* и *комутациона учестаност* као и *прекидачка фреквенција* и *прекидачка учестаност*. Када је комутациона учестаност довољно велика, валовитост струје је врло мала. Тада је оправдано занемарити наизменичну компоненту поворке ширински модулисаних импулса и сматрати да се машина напаја из идеалног извора који даје променљиви напон $U_{sr} = (2m - 1)E_i$ зависан од индекса модулације.

Валовитост се може приближно проценити тако што се сложенопериодична наизменична компонента напона u_i представи хармонијском компонентом фреквенције $f = 1/T$, а потом се одреди одговарајући одзив арматурне струје помоћу адмитансе $|I(j\omega)/ U(j\omega)| \approx 1/(L_a\omega)$. Овакав приступ занемарује хармонијске компоненте вишег реда, као и околност да облик наизменичне компоненте напона није простопериодичан већ импулсни.

Валовитост струје се може одредити са већом тачношћу коришћењем израза (3.38). Валовитост ΔI има највећу вредност у случају када је индекс модулације једнак $m = 0{,}5$. У том случају, валовитост узима вредност

$$\Delta I = \frac{TE_i}{4L_a}. \tag{3.39}$$

При коришћењу резултата добијених у овом одељку, треба имати у виду да је разматран прекидачки мост на слици 3.37 у коме се користе само два прекидачка стања, стање у коме је укључена дијагонала S_1- S_4 и стање у коме је укључена дијагонала S_2- S_3. У табели 3.1, наведена су још два стања, S_1=S_3=ON и стање S_2=S_4=ON, која дају излазни напон једнак нули. Управљање прекидачким мостом се може организовати и на начин који укључује додата два стања са нултим напоном. Тада долази и до промена у дефинисању времена t_{ON} као и индекса модулације. Детаљнија анализа техника ширинске модулације није предмет проучавања у овој књизи.

Слика 3.41. Облик арматурног напона, арматурне струје и струје извора E_i при импулсном напајању машине за једносмерну струју.

Улазна струја коју прекидачки мост узима из извора је на сликама 3.37 и 3.41 означена са i_u. Она зависи од тренутне вредности арматурне струје i_a и прекидачког стања. Промена улазне струје i_u је дата на слици 3.41. Ако је укључена дијагонала S_1-S_4, позитивни крај извора E_i је повезан са четкицом А прекидачем $S1$, док је негативни крај извора повезан са четкицом B преко $S4$. Зато је у том прекидачком стању $i_u = i_a$. Ако је укључена дијагонала S_2-S_3, $i_u = -i_a$. Као последица, улазна струја прекидачког моста има облик поворке импулса чија је амплитуда одређена струјом арматуре док им је знак одређен прекидачким стањем у мосту.

Питање (3.13):

Одредити облик и амплитуду осцилација арматурне струје у случају када се на мотор доводи напон приказан на слици 3.41, при чему је $E_a = 0$, $R_a = 0$, док су познате величине L_a, T и E.

Одговор (3.13):

Трајање позитивног напонског импулса је $t_{ON} = T/2$. У првој половини периода T, $L_a di_a/dt = +E$. Дакле, промена струје је линеарна. Слично важи и за другу половину периода. Струја осцилује око средње вредности са амплитудом ΔI. Током прве половине периода, она се увећава са $-\Delta I$ на $+\Delta I$. Њена промена је линеарна, па је $di_a/dt = 2\,\Delta I / (T/2) = E/L_a$, одакле се добија $\Delta I = ET(4L_a)$.

Питање (3.14):

Управљање прекидачким мостом на слици 3.37 се врши тако да је прекидач S_4 трајно укључен а прекидач S_3 искључен. Са периодом T се укључује прекидач S_1 који се по истеку времена $t_{ON} = mT$ искључује. У остатку периода T-t_{ON} укључен је прекидач S_2. Прекидачки мост се напаја из извора сталног напона E. Одредити средњу вредност излазног напона и израз за валовитост струје.

Одговор (3.14):

Излазни напон u_i има облик поворке импулса која се понавља са периодом T. У првом делу сваког периода, током интервала t_{ON}, излазни напон је једнак $+E$. Прекидачи S_2 и S_4 су укључени током преосталог дела периода T-t_{ON}. Излазни напон је тада једнак нули. Средња вредност напона једнака је $U_{sr} = mE$. Валовитост струје се одређује из прорачуна датог у претходном одељку, у делу који почиње једначином (3.35) и завршава једначином (3.38). За разлику од анализе дате у самом одељку, где је тренутна вредност излазног напона узимала вредности $+E$ и $-E$, он овде узима вредности $+E$ и 0. Овде је валовитост струје једнака

$$\Delta I = \frac{TE}{2L_a}\left(m - m^2\right).$$

3.33.6 Топологије енергетских претварача

Машине за једносмерну струју се напајају једносмерним напоном који се може континуално мењати и прилагођавати жељеном радном режиму машине. Прекидачки мост на слици 3.37 приказује принцип рада статичког енергетског претварача који омогућује претварање напона и струја без губитака. У пракси, статички енергетски претварач може обухватати и друге склопове, као што је исправљач, управљачки и заштитни склопови. Примарни извор електричне енергије за напајање електричних машина енергије је најчешће нисконапонска мрежа са наизменичним напонима индустријске учестаности. Фреквенција наизменичних мрежних напона је 50 Hz, док је ефективна вредност линијских напона 400 V. Наизменични мрежни напони не одговарају потребама машина за једносмерну струју, па је неопходно користити статичке претвараче да би се електрична енергија наизменичних напона и струја претворила у електричну енергију система једносмерних напона и струја који се доводе на арматурни намотај и намотај побуде. Ако је примарни извор електричне енергије батерија, њен напон је стални, једносмерни напон. Међутим, напон батерије се не може прилагођавати потребама машине, па је и у том случају потребно користи-

ти статички претварач који претвара константан једносмерни напон батерије у променљив једносмерни напон који се доводи на арматурни намотај и који одговара тренутној вредности брзине обртања.

Шире гледано, електричне машине се напајају енергијом из примарног извора који може имати једносмерни, једнофазни, трофазни и неки други облик напона. Напон примарног извора треба прилагодити потребама машине. Зато се између електричних прикључака машине и примарног извора повезује енергетски претварач који напоне и струје примарног извора претвара у облик који одговарају радном режиму машине. У доњем делу слике, дат је приказ тиристорских топологија за напајање машина за једносмерну струју.

На слици 3.42 приказана је упрошћена шема транзисторског претварача за напајање машина једносмерне струје. Такав претварач се најчешће сусреће у пракси. У делу (D), приказан је прекидачки мост са четири транзистора. Прекидачки мост је у свему једнак мосту који је приказан на слици 3.37 и претходно анализиран. Диодни исправљач, приказан у делу (A) слике 3.42, претвара трофазни систем наизменичних напона у једносмерни напон. Део (B) слике 3.42 садржи калем и кондензатор чија је улога филтрирање исправљеног напона. Тај део статичког претварача се зове *једносмерно међуколо*. Напон међукола је константан и он је улазни напон прекидачког моста претходно означаван са E_i.

У делу (C) постоји додатни транзисторки прекидач који, по потреби, може бити укључен и тако повезати приказани отпорник паралелно кондензатору. Таква потреба се може јавити при раду машине у другом или четвртом квадранту, када су моменат и брзина супротног смера па машина ради као генератор. У генераторском режиму рада, арматурни намотај нема улогу електричног потрошача већ узима улогу извора. Другим речима, ток снаге је тада здесна на лево. Машина претвара механички рад у електричну енергију. Овако добијена енергија зове се и *енергија кочења*, будући да се добија при раду у парним квадрантима. Смер струја у колу је измењен, тако да прекидачки мост више не преузима снагу из једносмерног међукола, већ предаје снагу и струју елементима међукола. Услед промењеног знака средње вредности струје i_u, долази до увећања напона на кондензатору међукола. Добијена снага и енергија се не може вратити натраг у напојну трофазну мрежу, јер се смер струје у исправљачким диодама не може изменити. Вишак енергије у међуколу се акумулира у кондензатору, увећавајући његову енергију $W_C = ½\ CE_i^2$. Увећање напона E_i може довести до оштећења елемената кола, па је процес акумулације енергије кочења у кондензатору неопходно зауставити. Укључењем додатог танзисторског прекидача, отпорник велике снаге се прикључује паралелно међуколу, па се вишак енергије кочења може утрошити на Џулове губитке у отпорнику. Описани елементи се зову *уређај за кочење*, то јест *отпорник за*

кочење (*Dynamic Braking Resistor*, DBR). На слици 3.42, уређај за кочење је означен са (C).

Слика 3.42. Топологија транзисторског претварача.

Статички енергетски претварачи са транзисторима користе се у опсегу снага одређеном карактеристикама расположивих полупроводничких прекидача снаге. У време објављивања ове књиге, граде се транзисторски претварачи чија је снага већа од 1 MW. Крајем двадесетог века, технологија транзисторских прекидача је омогућавала градњу претварача за снаге од неколико киловата. Зато су претварачи за веће снаге користили тиристоре, четворослојне полупроводничке структуре које се могу укључити деловањем на гејт али се њиховим искључењем не може управљати преко гејта. Карактеристичне топологије тиристорских претварача за напајање машина једносмерне струје дате су на слици 3.43. Премда тиристорски уређаји имају пре свега историјски значај, у индустријским и другим применама се о даље могу срести раније инсталисани системи са тиристорским претварачима.

Слика 3.43. Топологија тиристорских претварача.

3.34 Основне карактеристике

Рад са машинама за једносмерну струју тражи познавање њихових електричних и механичких карактеристика, параметара и ограничења. Ради читалаца који се по први пут сусрећу са електричним машинама, овде су објашњени појмови номиналне струје, номиналног напона, механичке карактеристике, природне карактеристике, номиналне брзине, номиналног момента и номиналне. Овде је указано на потребу за радом у режиму слабљења поља и дате су карактеристике машине у том режиму. Анализира се проблем одвођења топлоте створене губицима у машини и стиче увид у могућност рада са краткотрајним преоптерећењима. Дефинишу се и конструишу експлоатациона и транзијентна карактеристика машине за једносмерну струју са независном побудом.

3.34.1 Номинални напон

Номинални напон посматраног намотаја је највиши напон који се може довести и трајно задржати између крајева намотаја, а да при томе не дође до пробоја или убрзане деградације електричне изолације.

Електрична изолација раздваја проводник од зидова жлеба у који је проводник положен. Поред тога, електрична изолација раздваја посматрани проводник од других проводника. Губитак изолације доводи до кратког споја између појединих проводника, између намотаја, као и кратког споја између намотаја и магнетског кола или кућишта машине. Сваки од поменутих инцидената доводи до прекида рада и оштећења машине.

Електрично поље које постоји у изолацији пропорционално је напону напајања. Карактеристика изолације је номинални напон U_n, као и пробојни напон U_{max}.

Пробојни напон доводи до моменталног оштећења изолације. Јачина електричног поља у критичним деловима изолационог материјала превазилази диелектричну чврстоћу и доводи до разарања изолације. Пробој се манифестује као кратак спој између два проводника, крајева намотаја или кратак спој између намотаја и уземљених металних делова од којих је машина начињена.

Номинални напон је мањи од пробојног. Довођење напона који је већи од номиналног, али мањи од пробојног не доводи нужно до пробоја. Увећана јачина електричног поља која се успоставља при напонима већим од номиналног доводи до убрзане деградације карактеристика изолационог материјала, односно до *старења изолације*. Старење изолације је повезано са електричним, хемијским и термичким процесима унутар диелектрика. Ако се напон машине задржава у границама номиналног, очекивани жи-

вотни век изолације превазилази двадесет године. Сматра се да увећање напона изнад номиналног за осам процената може преполовити животни век изолације.

3.34.2 Механичка карактеристика

Механичка карактеристика је функција $M(\Omega)$, односно $\Omega(M)$ која даје везу угаоне брзине обртања и електромагнетског момента у устаљеном стању, када нема промене брзине, струје и флукса у машини за једносмерну струју. За машину једносмерне струје са независном побудом, код које се побудни и арматурни намотај напајају независно један од другог, механичка карактеристика је дата изразом

$$M_{em} = k_m \Phi_P \frac{U_a}{R_a} - \frac{k_m k_e \Phi_P^2}{R_a} \Omega_m .$$

3.34.3 Природна карактеристика

Природна карактеристика је механичка карактеристика која постоји у случају да су напони доведени на намотаје једнаки *номиналним напонима*, то јест највећим трајно дозвољеним напонима.

3.34.4 Номинална струја

Номинална струја I_n је највећа јачина струје I_a која се може имати у трајном раду, а да при томе нема оштећења, кварова нити скраћења очекиваног животног века машине. Код машина за наизменичну струју, номинална струја се односи на ефективну вредност струје у намотајима. Струја у намотајима машине ствара Џулове губитке пропорционалне квадрату струје. Топлота створена овим губицима увећава температуру машине. Повећање **температурне разлике** између површи електричне машине и околине доводи до већег одавања топлоте конвекцијом, зрачењем и кондукцијом. Створена топлота се тако предаје околини, односно долази до хлађења машине. Снага којом се топлота предаје околини пропорционална је разлици у температури, $P_T = \Delta\theta / R_T$, где је R_T *топлотна отпорност* електричне машине према околини, пропорционалан површини машине и карактеристикама површи. Снага P_T се изражава у W, температура $\Delta\theta$ у ^{o}C, док се топлотна отпорност R_T изражава у ^{o}C/W. Равнотежно стање се успоставља када температура машине порасте толико да се одата топлота

изједначава са укупним губицима у машини. Укупна снага губитака у машини се означава са P_γ. Што су губици у машини већи, већа је и температура која се достиже у устаљеном стању. Код машине за једносмерну струју, увећање струје I_a доводи до повећања губитака услед Џуловог ефекта, пропорционалних I^2, па самим тим и до повећања температуре машине. Поједини делови и материјали електричне машине могу бити оштећени уколико се температура повећа преко критичне границе.

Електрична изолација је начињена од папира, стаклених влакана, лака или других материјала. Она раздваја бакарне проводнике у намотајима машине од металних, проводних делова машине, као и од других проводника, и тако спречава да навојци и намотаји дођу у кратак спој. Изолација може бити оштећена уколико температура пређе максималну дозвољену вредност за дати изолациони материјал. Гранична температура изнад које долази до оштећења изолације у термичкој класи A је 105 ^oC, док је гранична температура за изолацију у термичкој класи F једнака 155 ^oC. Када у машини постоји номинална струја I_n, губици чине да се машина загрева тако да температура достиже граничну вредност али је не прелази. Ако би у трајном раду постојала струја већа од номиналне, дошло би до прекорачења граничне температуре, до оштећења изолације или других виталних делова машине чија је радна температура ограничена. Поред оштећења изолације, може доћи до оштећења сталних магнета, феромагнетских материјала и елемената челичне конструкције машине. Феромагнетици губе своје магнетске особине када се загреју до Киријеве температуре. Стални магнети могу бити трајно оштећени (демагнетисани) уколико се прегреју. Машински елементи машине, међу којима су вратило и котрљајући лежајеви, могу се оштетити услед термичке дилатације челика и губитка својстава мазива на повишеним температурама.

До оштећења и испада машине не долази уколико струје у намотајима не прелазе номиналну струју. Номинална струја I_n је највећа јачина струје I_a која се може имати у трајном раду, а да при томе нема оштећења, кварова нити скраћења очекиваног животног века машине.

3.35 Термички модел машине и интермитенција

Снага губитака у електричној машини доводи до пораста температуре магнетског кола и намотаја. Машина је топлија од околине и она одаје топлоту у околину. Ако је топлота створена губицима у машини једнака топлоти која се предаје околини, ради се о устаљеном стању у коме нема промене температуре. Стварање топлоте, односно *загревање*, треба да буде у равнотежи са одвођењем топлоте, односно *хлађењем*, да би престао раст

температуре. Максимална дозвољена температура виталних делова машине одређена је издржљивошћу електричне изолације, магнетског кола, намотаја, лежајева и кућишта. Промена температуре у машини је одређена топлотном отпорношћу R_T и топлотним капацитетом C_T. Уколико је топлотни капацитет довољно велики, машина може поднети краткотрајно преоптерећење, при коме јачина струје превазилази номиналну струју, што доводи до повећаних губитака у машини, повећаног стварања топлоте и бржег раста температуре. Начин на који топлотна отпорност, топлотни капацитет и губици утичу на промену температуре приказан је на слици 3.44 која представља упрошћени термички модел машине.

Електричне машине се граде од бакра, гвожђа, алуминијума и електричних изолатора. Сви материјали од којих се израђују делови машине имају одређену специфичну топлоту. Специфична топлота представља енергију потребну да се једна јединица масе одређеног материјала загреје за 1 ^{o}C. Множењем специфичне топлоте и масе добија се топлотни капацитет који се изражава у J/^{o}C. На основу претпоставке да сви делови машине имају исту температуру, добија се упрошћени модел који је дат на слици 3.44. Параметар C_T термичког модела машине представља збир топлотних капацитета свих њених делова. Укупни топлотни капацитет машине C_T одређује топлоту која ће увећати температуру машине за један степен под условом нема одавања топлоте у околину. Део снаге губитака који увећава температуру машине једнак је

$$C_T \frac{\mathrm{d}(\Delta\theta)}{\mathrm{d}t}.$$

Преостали део снаге губитака се предаје околини. Ако је температура машине већа од температуре околине за $\Delta\theta$, снага одавања топлоте је једнака

$$\frac{\Delta\theta}{R_T}.$$

Топлотна отпорност R_T се изражава у ^{o}C/W. Она одређује пораст температуре која је потребна да би се у околину емитовала одређена топлота. Будући да се топлота одаје конвенцијом, кондукцијом и зрачењем, топлотна отпорност зависи од површине додира са околином, од брзине струјања ваздуха, особина површи које одају топлоту зрачењем, као и других околности и параметара. Промена температуре машине је одређена диференцијалном једначином

$$P_\gamma = \frac{\Delta\theta}{R_T} + C_T \frac{\mathrm{d}(\Delta\theta)}{\mathrm{d}t}. \tag{3.40}$$

Приметити да иста једначина описује промену напона у колу са паралелном везом отпорника R_T и кондензатора C_T, које се напаја из струјног извора са струјом P_γ. Термички модел машине на слици 3.44 је дуалан електричном RC колу напајаном из струјног извора. При томе напон одговара порасту температуре $\Delta\theta$, док струја одговара снази губитака.

Слика 3.44. Упрошћени термички модел електричне машине.

У случају да је $\Delta\theta(0) = 0$, при чему у машини постоје губици $P_\gamma(t) = P_1\, h(t)$, температура машине се мења према изразу

$$\Delta\theta = R_T P_1 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right). \tag{3.41}$$

Где је $\tau = R_T C_T$ термичка временска константа. Термичка временска константа малих електричних машина може узети вредности од неколико десетина секунди. Велике машине имају константе од неколико десетина минута.

Ако је снага губитака у машини променљива зато што се током рада мења струја, моменат и брзина обртања, температура машине прати промене снаге губитака са одређеним кашњењем, одређеним термичком временском константом. На слици 3.46 је дата промена температуре електричне машине чија се струја периодично мења, при чему се смењују интервали када постоји струја и постоје губици са интервалима током којих је струја једнака нули. Приказани режим рада машине се зове *интермитентни режим* рада. У устаљеном стању, температура осцилује између вредности θ_{MAX} и θ_{MIN}. Снага губитака $P_{\gamma 1}$, приказана на слици 3.46, одговара раду са струјом I_1 која је већа од номиналне.

Слика 3.45. Промена температуре електричне машине у којој је снага губитака непромењива.

Потребно је уочити да би трајан рад са губицима $P_{\gamma 1}$ врло брзо довео до неприхватљиво великог пораста температуре. Ипак, захваљујући термичкој инерцији, струја и губици машине могу краткотрајно прећи трајно дозвољене вредности у краћим временским интервалима. Дакле, електричне машине се могу краткотрајно преоптеретити. Ако су краткотрајна преоптерећења праћена интервалима када нема губитака или су губици такви да температура машине опада, краткотрајно преоптерећење се може понављати на начин приказан сликом 3.46. Уколико је период са којим се мења оптерећење машине значајно мањи од термичке временске константе, тада су осцилације температуре θ_{MAX} - θ_{MIN} врло мале. У том случају, машина се неће прегрејати уколико средња снага губитака у једном периоду њихове промене не превазилази дозвољене вредности.

Слика 3.46. Промена температуре електричне машине у интермитентном раду.

На основу спроведене анализе, закључује се да струја електричне машине може краткотрајно прећи номиналну струју, под условом да је трајање преоптерећења краће од термичке временске константе машине. Уколико је напајање машине импулсно и периодично се понавља, од значаја је да средња снага губитака не превазиђе износ губитака који се имају при номиналној струји.

Питање (3.15):

Да ли је електрична машина која после дужег рада под оптерећењем за које је начињена има веома мали пораст температуре, коректно пројектована?

Одговор (3.15):

Не. Мале радне температуре су знак да су мали и губици енергије у машини. Ово значи да постоји простор за увећање густине струје и магнетске индукције, то јест струје и флукса, па и снаге машине. Дакле, пројектована је машина која може дати значајно већу снагу од оне за коју је намењена. Самим тим, утрошено је превише гвожђа и бакра, и начињена машина је превелика и претешка. Постављени захтеви у погледу оптерећења се могу задовољити машином мањег габарита и масе.

Питање (3.16):

Електрична машина није коришћена током дужег временског интервала. После укључења, успостављена је струја двоструко већа од номиналне. Доминантни губици електричне машине су губици у намотајима, пропорционални квадрату струје, док се губици у гвожђу могу занемарити. Познато је да је термичка временска константа τ_T = 60 s. Одредити најдуже дозвољено трајање описаног оптерећења које неће довести до оштећења машине.

Одговор (3.16):

У трајном раду са двоструким оптерећењем достигао би се пораст температуре четири пута већи од дозвољеног. Гранична температура се достиже по истеку t_1, где је $1 - \exp(-t_1/\tau_T) = ¼$. Тако се добија да је t_1 = 17.26 s.

Питање (3.17):

Електрична машина је оптерећена тако да се сваких 10 секунди јавља импулс арматурне струје чија је амплитуда $2I_n$. После импулса, следи интервал у коме нема струје. Импулси се циклично понављају сваких 10 s. Доминантни губици електричне машине су губици у намотајима, пропорционални квадрату струје, док се губици у гвожђу могу занемарити. Познато је да је термичка временска константа $\tau_T >> 10$s. Одредити најдуже

дозвољено трајање импулса арматурне струје које неће довести до оштећења машине.

Одговор (3.17):

Термичка временска константа је значајно већа од периода оптерећења од 10 s. Дакле, варијације температуре су споре, тако да температурне промене у оквиру посматраног периода нису од значаја. Прегревања неће бити ако ефективна вредност струје не превазилази I_n. Импулс амплитуде $2I_n$ који се понавља сваких 10 s, имаће ефективну вредност од I_n уколико му је ширина 2,5 s.

3.36 Номинални флукс

Флукс побуде Φ_P одређује струју коју је потребно успоставити да би се развио жељени моменат, $I_a = M_{em}/(k_m\Phi_P)$. За веће вредности флукса, исти моменат се добија при мањој арматурној струји, што смањује губитке у намотајима. Дакле, од интереса је увећати флукс да би се смањила потребна арматурна струја. Побудни флукс је ограничен појавом магнетског засићења феромагнетика. У случајевима када дође до засићења, даље увећање побудне струје даје веома мале промене флукса. Тада је једини ефекат повећања побудне струје већа снага губитака $R_PI_P^2$ у побудном намотају. Магнетско засићење долази до изражаја у колену карактеристике магнећења $\Phi_P(I_P)$, где се има вредност флукса означена са Φ_{Pmax}. Будући да је сваки даљи раст побудне струје без практичног ефекта, управо ова вредност флукса се користи у машини у свим случајевима када је то могуће. Флукс Φ_{Pmax} се зове *номинални флукс* и означава се са Φ_n.

3.37 Номинална брзина

Номинална брзина је она при којој се у намотајима номинално побуђене машине индукује електромоторна сила једнака номиналном напону.

Ако се посматра машина за једносмерну струју у којој постоји номинални побудни флукс, док је отпорност R_a занемарива, електромоторна сила $E_a = k_e\Phi_n\Omega$ је једнака арматурном напону U_a. При номиналној брзини, електромоторна сила је једнака номиналном напону. Дакле, номинална брзина машине је одређена релацијом

$$\Omega_n = \frac{U_n}{k_e\Phi_n}. \tag{3.32}$$

Будући да напон намотаја не сме прећи номинални, рад са брзинама већим од номиналне могућ је искључиво уз умањење флукса. У противном, електромоторна сила $k_e\Phi_n\Omega$ би била већа од номиналног напона.

Код малих електричних машина, пад напона услед отпорности намотаја се не може занемарити. Пошто је $U_a = R_aI_a + E_a$, разлика између арматурног напона и електромоторне силе се не може занемарити. Стога је потребно дати прецизнију дефиницију номиналне брзине. Посматрајући радни режим у коме је машина номинално побуђена, где постоји номинална струја у намотајима и номинални напон на крајевима намотаја, добија се да је електромоторна сила једнака $E_a = k_e\Phi_n\Omega_n = U_n - R_aI_n$, номинална брзина се дефинише изразом

$$\Omega_n = \frac{U_n - R_aI_n}{k_e\Phi_n}. \tag{3.33}$$

3.38 Слабљење поља

У раду електричних машина постоје радни режими у којима треба мењати побудни флукс. Један од њих је рад са брзинама већим од номиналне, када је неопходно смањити флукс како би се електромоторна сила одржала у границама номиналног напона. Поред тога, флукс треба смањити и при брзинама које не прелазе номиналну уколико машина развија мали моменат и има незнатну арматурну струју. У електричним машинама постоје губици у магнетском колу који зависе од магнетске индукције и учестаности њене промене. У машинама за једносмерну струју, губици у гвожђу постоје у магнетском колу ротора, где се магнетска индукција мења са учестаношћу која је одређена брзином обртања ротора. У случају да машина ради у празном ходу, где је арматурна струја једнака нули, у магнетском колу постоје губици који зависе од побудног флукса и брзине обртања. Тада је од интереса смањити флукс побуде како би се умањили губици у машини. Наиме, ако је машина неоптерећена или развија мали моменат, релација $I_a = M_{em}/(k_m\Phi_P)$ не може бити разлог за увећање флукса, јер моменат и струја имају мале вредности. Зато је у посматраном радном режиму од користи смањити флукс побуде.

Рад са брзинама већим од номиналне

Побудни флукс се не може одржати на номиналној вредности при брзинама обртања ротора које су веће од номиналне брзине, зато што напон намотаја не сме прећи номинални напон. Веза номиналног напона и номи-

налне брзине је $U_n \approx k_e \Phi_n \Omega_n$. Дакле, номинално побуђена машина ће при брзини већој од номиналне имати електромоторну силу која прелази номинални напон, што ће довести до оштећења.

Рад при брзинама већим од номиналне је могућ уз услов да се флукс умањи тако да индукована електромоторна сила не прелази номинални напон. Флукс машине је потребно мењати у функцији брзине. При брзини $\Omega_m > \Omega_n$, у машини постоји електромоторна сила $E_a = k_e \Phi(\Omega_m)\Omega_m$. Занемарујући отпорност намотаја и узимајући да је $U_{пот} = E_a$, долази се до израза за флукс који треба имати изнад номиналне брзине,

$$\Phi(\Omega_m) = \frac{U_n}{k_e \Omega_m}. \tag{3.34}$$

На основу израза (3.31) који дефинише номиналну брзину, добија се функција

$$\Phi(\Omega_m) = \Phi_n \frac{\Omega_n}{\Omega_m}, \tag{3.35}$$

која дефинише промену флукса при брзинама већим од номиналне. Флукс је обрнуто пропорционалан брзини и мења се према закону $1/\Omega_m$. Промена флукса према изразу (3.35) неопходна је при раду са брзинама већим од номиналне. Област у којој је брзина већа од номиналне зове се *зона слабљења поља*. Ако машина ради са брзином која је мања од номиналне, тада је могуће имати номиналну вредност побудног флукса Φ_n. Зато се област у којој је $\Omega_m < \Omega_n$ зове *зона константног флукса*.

Промена момента и снаге у зони слабљења поља

Дијаграми приказани на слици 3.47 приказују промену флукса, електромоторне силе, струје, момента и снаге који се могу имати у трајном раду машине за једносмерну струју у области слабљења поља. Приказана је промена наведених величина у функцији брзине обртања. Потребно је уочити да дијаграми промене струје, момента и снаге приказују *расположиве* вредности, односно највеће вредности које се могу одржати у устаљеном стању без оштећења машине. При томе се подразумева се да тренутне вредности струје, момента и снаге могу у краћим интервалима прећи вредности дате на слици 3.47. Приказани дијаграми представљају апсолутне вредности. Дакле, момент, струја и снага могу узети и негативне вредности, па се овде изведени закључци могу применити и на моторе и на генераторе. Уз измену коришћених ознака, дијаграми на слици 3.47 и одгова-

рајући закључци могу применити на било коју електричну машину која се проучава у овој књизи.

Слика 3.47. Промена флукса, електромоторне силе, момента и снаге у зони слабљења поља и зони константног флукса.

Промена флукса у зони слабљења поља

На апсциси дијаграма приказаног на слици 3.47 дата је угаона брзина обртања ротора. Флукс побуде се одржава на максималној, то јест номиналној вредности при брзинама мањим од номиналне. Када брзина пређе номиналну, флукс мора опадати по хиперболичком закону $\Phi(\Omega_m) = \Phi_n\ \Omega_n/\Omega_m$. Вредности флукса које ће се користити током рада машине не морају достизати приказану криву $\Phi(\Omega_m)$. Флукс може имати мању вредност, али не може бити већи од вредности $\Phi(\Omega_m)$.

Промена електромоторне силе у зони слабљења поља

Електромоторна сила се мења по закону $E_a = k_e\Phi(\Omega_m)\Omega_m$. У зони $\Omega_m < \Omega_n$, флукс је једнак номиналном па електромоторна сила расте пропорционално брзини обртања. У зони слабљења поља, где је $\Omega_m > \Omega_n$, флукс опада и обрнуто је пропорционалан брзини обртања. При порасту брзине обртања, електромоторна сила остаје константна и једнака номиналном напону. Уколико је флукс мањи од вредности одређене једначином (3.34), електромоторна сила ће бити мања од номиналног напона. У области слабљења

поља, флукс $\Phi_P < \Phi_n\Omega_n/\Omega_m$ се примењује када машина ради са врло малим вредности момента и струје, па је примерено умањити флукс како би се смањили губици у гвожђу.

Промена струје у зони слабљења поља

Арматурна струја која се може имати у трајном раду не сме прећи номиналну вредност, $I_a^2 \leq I_n^2$. Струја може узети и мање вредности $|I_a| < I_n$, али је у трајном раду не сме прећи номиналну јачину струје. Стога дијаграм указује да се при свим брзинама у трајном раду може имати номинална струја.

Промена момента у зони слабљења поља

Електромагнетски моменат је одређен производом флукса и струје. У трајном раду при брзинама мањим од номиналне, флукс и струја могу имати номиналне вредности, па је у датим условима расположив моменат $M_n = k_m\Phi_n I_n$, који се зове *номинални моменат*. При брзинама већим од номиналне, флукс опада према изразу $\Phi_n\Omega_n/\Omega_m$. Зато је расположиви моменат у зони слабљења поља једнак $M(\Omega_m) = M_n\ \Omega_n/\Omega_m$. Производ опадајућег момента и растуће брзине даје константну снагу. Стога се промена расположивог момента у зони слабљења поља зове *хипербола константне снаге*.

Промена снаге у зони слабљења поља

Електрична снага претворена у механичку је једнака производу момента и брзине обртања. У зони константног флукса, при брзинама мањим од номиналне, расположиви моменат је константан тако да расположива снага расте пропорционално брзини. Зато се ова зона зове *зона константног момента*. У зони слабљења поља, снага је једнака $P_c = M_{em}\Omega_m = \Omega_m(M_n\Omega_n/\Omega_m) = M_n\Omega_n = P_n$. Дакле, у области слабљења поља, расположива снага је константна и једнака номиналној снази P_n. Други назив за зону слабљења поља је *зона константне снаге*. Снага P_n назива се *номиналном снагом*.

Потреба за радом у зони слабљења поља

Примена електричних мотора често захтева развијање великих вредности момента при малим брзинама, док се при великим брзинама обртања траже мање вредности момента. Један од примера је покретање возила од кога се очекује да савлада врло велики успон носећи велики терет, при чему је прихватљиво да се кретање обавља малом брзином. Од истог возила се

очекује да приликом вожње равном деоницом без терета развије велику брзину кретања. Овакав захтев се у $M(\Omega)$ дијаграму може представити хиперболом константне снаге $M(\Omega_m) = M_n\,\Omega_n/\Omega_m$. Код машина које не могу радити у области слабљења поља, и које немају могућност да при већим брзинама развијају константну снагу, мора се користити механички преносник са варијабилним степеном преноса. Аутомобили који имају мотор са унутрашњим сагоревањем морају имати и мењач зато што $M(\Omega)$ карактеристика мотора нема одговара хиперболи константне снаге.

3.39 Транзијентна карактеристика

Транзијентна карактеристика је геометријско место тачака у $M(\Omega)$ дијаграму које електрична машина може достићи у краћим временским интервалима. Вршне вредности момента које се могу развити при датој брзини зависе од побудног флукса $\Phi_P(\Omega_m)$ и вршне вредности струје у намотајима. Код машина за једносмерну струју, тренутна вредност струје је ограничена карактеристикама механичког комутатора као и струјним капацитетом полупроводничких прекидача у претварачу из кога се мотор напаја. Пример транзијентне карактеристике дат је на слици 3.48.

3.40 Експлоатациона карактеристика

Експлоатациона карактеристика је геометријско место тачака у $M(\Omega)$ дијаграму у којима електрична машина може трајно радити. У зони слабљења поља, експлоатација машине је ограничена хиперболом константне снаге $M_n\,\Omega_n/\Omega_m$, док се у зони константног флукса има ограничење $M(\Omega_m) = M_n$. Пример експлоатационе карактеристике дат је на слици 3.48. Будући да је рад електричне машине остварив у сва четири квадранта, експлоатациона карактеристика постоји у свим квадрантима.

Слика 3.48. (A) Транзијентна карактеристика.
(B) Експлоатациона карактеристика.

3.41 Губици и биланс снаге

Ради бољег увида у процес електромеханичког претварања у електричној машини за једносмерну струју, треба проучити токове снаге и губитке у машини. Израда биланса снаге захтева одређивање губитака у магнетском пољу, Џулових губитака у намотајима и губитака услед обртања, то јест губитака у механичком подсистему.

Овде се занемарују се губици у компензационом намотају и намотају помоћних полова. Сматра се да машина ради у устаљеном стању, без промена јачине струје, флукса, момента нити угаоне брзине обртања ротора. Биланс снаге је приказан дијаграмом на слици 47. Овде су наведени о објашњени поједини губици и снаге у оквиру дијаграма.

Снага извора

Електрични извори напајају побудни и арматурни намотај. Из извора се добија снага $P_P + P_a = U_P I_P + U_a I_a = R_P I_P^2 + (R_a I_a^2 + E_a I_a)$.

Губици у бакру побудног намотаја

Снага побуде P_P се у побудном намотају услед Џуловог ефекта претвара у топлоту, $R_P I_P^2$.

Губици у бакру арматурног намотаја

Снага $R_a I_a^2$ се претвара у топлоту у арматурном намотају.

Снага електромеханичког претварања

Снага $P_c = E_a I_a = (k_e \Phi_P \Omega_m) I_a = (k_m \Phi_P I_a) \Omega_m = M_{em} \Omega_m$ је снага електромеханичког претварања. Електрична снага $E_a I_a$ се претвара у механичку снагу $M_{em} \Omega_m$.

Губици у гвожђу

У ротору постоје губици у гвожђу P_{Fe}. Ротор се обрће у стационарном пољу статора, тако да у магнетском колу ротора долази до промене магнетске индукције. Учестаност промене магнетске индукције у ротору је одређена брзином обртања. Услед промене индукције, јављају се губици услед хистерезиса и вихорних струја. Губици у феромагнетском материјалу нису узети у обзир током извођења модела. Они зависе од квадрата побудног флукса, који одређује магнетску индукцију у магнетском колу. Поред тога, губици зависе и од брзине обртања, стога што поље пулсира у односу на роторске лимове са учестаношћу једнаком угаоној брзини обртања. Губици у гвожђу ротора стварају кочни моменат $M_{Fe} = P_{Fe}/\Omega_m$. Стварање момента M_{Fe} може се објаснити и садејством вихорних струја које постоје у гвожђу ротора и побудног поља у коме се ротор обрће. Моменат M_{Fe} се противи кретању у оба смера обртања. Он постоји и у случају када је арматурна струја једнака нули.

Губици у механичком систему (P_F)

При обртању ротора, део енергије се губи на савладавање трења у лежајевима и отпор ваздуха[4]. На својим крајевима, ротор се ослања на котрљајуће лежајеве који носе његову тежину и омогућују ослонац на статор, дајући при томе могућност обртног кретања у односу на статор. У лежајевима се јавља одређено трење које доприноси губицима. При обртању, површ

[4] Отпор ваздуха се може моделирати изразом $M_{OV} = k_{OV} \Omega_m^{2.}$. Уколико код унутрашњих отпора кретању преовлађује отпор ваздуха, одговарајућа снага је пропорционална трећем степену брзине обртања, то јест, $P_{OV} = k_{OV} \Omega_m^{3.}$.

ротора се креће у односу на околину одређеном периферном брзином, што ствара отпор ваздуха. Електричне машине могу имати и сопствено хлађење, које се остварује учвршћивањем вентилатора не један крај вратиле. При обртању ротора, вентилатор ствара аксијалну струју ваздуха која помаже одвођење топлоте, то јест хлађење машине. У том случају, отпор ваздуха је значајно увећан.

Губици услед обртања (P_{Fe}+P_F)

Збир свих губитака до којих долази услед обртања зове се *губици услед обртања*, без обзира на то јели природа губитака електрична или механичка. Губици услед обртања су једнаки P_{Fe}+P_F, Међу унутрашње отпоре кретању спадају трење у лежајевима, отпор ваздуха као и кочни моменат M_{Fe} који се јавља услед губитака у гвожђу ротора[5]. Збир унутрашњих отпора кретању ротора електричне машине се често моделује изразом $M_F = k_F\Omega_m$. Губици у гвожђу се јављају услед вихорних струја и хистерезиса. Кружна учестаност ω_m којом пулсира магнетска индукција у магнетском колу ротора одређена је брзином обртања ротора Ω_m. Пошто је снага губитака у гвожђу ротора једнака $P_{Fe}=k_V\omega_m^2+k_H\omega_m$, кочни моменат је $M_{Fe}=k_V\omega_m+k_H$. Губици услед хистерезиса су најчешће много мањи од губитака услед вихорних струја, тако да је $M_{Fe} \approx k_V\,\omega_m$. Кочни моменат M_{Fe} услед вихорних струја у магнетком колу ротора машина за једносмерну струју у потпуности одговара моделу $M_F = k_F\Omega_m$, али то није случај са моментом услед отпора ваздуха, који зависи од квадрата брзине обртања. Ако је моменат M_{Fe} доминантан, тада је оправдано сматрати да је збир отпора кретању пропорционалан брзини, то јест да је одговарајућа снага губитака услед обртања одређена изразом $P_F = k_F\Omega_m^2$.

Механичка снага

Машина преко вратила предаје радној машини корисну механичку снагу P_m. Механичка снага се добија одузимањем губитака услед обртања од снаге електромеханичког претварања. Механичка снага је $P_m = M_m\Omega_m = P_c - P_{Fe} - P_F = M_{em}\Omega_m - M_{Fe}\Omega_m - k_F\Omega_m^2$ се предаје радној машини путем вратила. Моменат који делује на радну машину је $M_m = M_{em} - P_{Fe}/\Omega_m - k_F\Omega_m$. Радна машина се противи кретању једнаким моментом (M_m) који делује у супротном смеру.

[5] Губици у магнетском колу ротора као и њихово место у билансу снаге разликују се код машина за једносмерну струју, асинхроних и синхроних машина

Слика 3.49. Биланс снаге.

<u>Питање (3.18):</u>

Посматрати машину за једносмерну струју у којој постоји номинални флукс, али јој је арматурна струја једнака нули. Машина се обрће константном, номиналном брзином Ω_n. Моменат потребан за одржавање ротације обезбеђује радна машина са којом је спрегнуто вратило машине. Снага претварања $P_c = E_a I_a$ једнака је нули. Постоје ли губици у гвожђу ротора P_{Fe}? Постоји ли моменат који делује на ротор? Описати понашање ротора у случају да се раскине веза са радном машином.

<u>Одговор (3.18):</u>

Ротор се обрће у непокретном магнетком пољу што проузрокује губитке услед хистерезиса и вихорних струја у роторским лимовима. Вихорне струје које постоје у ротору налазе се у пољу побудног флукса. Интеракција магнетске индукције створене побудом и вихорних струја створених услед ротације доводи до генерисања силе и момента. Моменат се противи кретању и једнак је $M_{Fe} = P_{Fe} / \Omega_n$. Када вратило не би било спрегнуто са радном машином, ротор би, под дејством кочионог момента, постепено успоравао. Тада би губици у гвожђу ротора загревали ротор на рачун кинетичке енергије ротора ½ $J\Omega_n^2$.

3.42 Номиналне и називне величине

У претходном поглављу су дефинисане номиналне величине машине. Номинална струја је највећа струја која се може одржати у трајном раду а да при томе не доведе до оштећења или отказа машине. Номинални напон је највиши напон који се може одржати у трајном раду а да не доведе до пробоја или убрзаног старења изолације. На исти начин су дефинисане и остале номиналне величине. Према томе, номинални износ сваке од величина треба схватити као највећу вредност која се може имати у трајном раду. Номиналне величине су карактеристике машине, односно особине њених значајних делова.

Поред појма номиналних величина, постоји и појам називних величина. Називне величине су дате на натписној плочици причвршћеној за машину, или прикључене каталошким подацима о машини. Називне величине представљају исказ произвођача машине. Дајући неку називну величину, произвођач гарантује да је машина у трајном раду може поднети без оштећења. Називна величина не може бити већа од номиналне. Називна величина може бити мања од номиналне. Произвођач може свесно дати називну величину која је мања од номиналне. У случају да произвођач има врло велике серије електричних машина снаге 100 kW, и добије захтев за израду једне машине снаге 90 kW, оне нема економског интереса да засебно начини једну мању машину, већ ће узети једну машину снаге 100 kW и на њу причврстити натписну плочицу на којој је декларисана снага од 90 kW. Тиме произвођач даје гаранцију да ће предметна машина моћи да развије снагу од 90 kW у трајном раду, што ће и бити случај, јер се ради о машини номиналне снаге од 100 kW.

3.43 Подаци који стоје на натписној плочици машине

На натписној плочици машине се налазе основни подаци о машини. Поред номиналне брзине и снаге, дају се подаци о номиналним вредностима струја, напона, брзине обртања, момента и снаге. На плочици могу налазити следећи подаци:

- Номинална струја арматурног намотаја (I_n),
- Номинална струја побудног намотаја (I_{pn}) (опционо),
- Номинални напон арматурног намотаја (U_n),
- Номинални напон побудног намотаја (U_{pn}) (опционо),

- Номинална брзина обртања,
- Номинални моменат,
- Номинална снага,
- Номинални фактор снаге (код машина за наизменичну струју)
- Начин спреге трофазног намотаја статора (код машина за наизменичну струју)

Номинална брзина се најчешће изражава у обртајима у минуту [o/min], односно *Revolutions Per Minute* [rpm]. Тако је n_n [o/min] = Ω_n [rad/s] · (30/π). Податак о номиналној брзини везан је за номиналне услове рада.

Код генератора за једносмерну струју, номинална брзина обртања је она при којој номинално побуђени генератор ($\Phi = \Phi_n$) при раду са номиналном струјом $I_G = -I_a = I_n$ даје номинални излазни напон $U_G = U_{AB} = U_n$. Струја генератора даје пад напона $R_a I_G$ који се одузима од индуковане електромоторне силе. Пошто је $U_n = k_e \Phi_n \Omega_n + R_a I_a = k_e \Phi_n \Omega_n - R_a I_G$, номинална брзина генератора је она која даје електромоторну силу $E_a = U_n + R_a I_n$, то јест $\Omega_n = (U_n + R_a I_n)/k_e \Phi_n$.

Код мотора за једносмерну струју, номинална брзина обртања је она којом се обрће номинално побуђени мотор ($\Phi = \Phi_n$) при раду са номиналном струјом. Код мотора, струја постоји у смеру од извора према мотору, па је $U_n = E_a + R_a I_n$. Дакле, $U_n = k_e \Phi_n \Omega_n + R_a I_n$, тако да при номиналној брзини постоји електромоторна сила једнака $E_a = (U_n - R_a I_n)$, па је $\Omega_n = (U_n \Omega_n - R_a I_n)/k_e \Phi_n$.

<u>Питање (3.19):</u>

За генератор једносмерне струје познатих величина U_n = 220 V, I_n = 20 A, R_a = 1 Ω, као и $k_e \Phi_n$ = 1 Wb, одредити номиналну брзину обртања.

<u>Одговор (3.19):</u>

Номинална брзина обртања генератора је $\Omega_n = (U_n + R_a I_n)/k_e \Phi_n$ = 240 rad/s. На натписној плочици генератора ће бити записано n_n = 2292 o/min.

<u>Питање (3.20):</u>

За мотор једносмерне струје познатих величина U_n = 110 V, I_n = 10 A, R_a = 1 Ω, као и $k_e \Phi_n$ = 1 Wb, одредити номиналну брзину обртања.

<u>Одговор (3.20):</u>

Номинална брзина обртања мотора је $\Omega_n = (U_n - R_a I_n)/k_e \Phi_n$ = 100 rad/s. На натписној плочици генератора ће бити записано n_n = 955 o/min.

Приликом анализе рада електричних машина за једносмерну струју, под номиналном брзином се подразумева количник номиналног напона и

флукса, односно $\Omega_n \approx U_n/(k_e\Phi_n)$. Однос $U_n/(k_e\Phi_n)$ даје брзину при којој у намотајима номинално побуђене машине постоји електромоторна сила блиска номиналном напону. Ради се о приближној вредности у којој се занемарује пад напона на арматурном отпору. Дакле, чини се апроксимација $U_n = R_aI_a + k_e\Phi_n\Omega_n \approx k_e\Phi_n\Omega_n$, па се зато добија вредност $\Omega_n=U_n /(k_e\Phi_n)$ која је незнатно већа од вредности дате на натписној плочици мотора за једносмерну струју.

У свим анализама и прорачунима где се отпорност R_a занемарује или није позната, у одговорима на теоријска питања везана за слабљење поља и експлоатационе карактеристике, као и код свих разматрања где $U_a \approx k_e\Phi\Omega$, оправдано је узети да је номинална брзина једнака $\Omega_n \approx U_n/(k_e\Phi_n)$.

У решавању задатака у којима је дата вредност отпорности R_a треба уважити пад напона R_aI_a. Тада није оправдано сматрати да је $\Omega_n \approx U_n/(k_e\Phi_n)$. За мотор треба користити израз $\Omega_n = (U_n\Omega_n - R_aI_n)/k_e\Phi_n$. Код генератора, користи се израз $\Omega_n = (U_n + R_aI_n)/k_e\Phi_n$.

4 Асинхроне машине

У овом поглављу изложени су принципи рада асинхроних машина и дати основни подаци о конструкцији статора и ротора. Анализирани су процеси електромеханичког претварања у асинхроним машинама и проучени губици у намотајима, магнетском колу и механичком подсистему. Ради проучавања електричних и механичких својстава асинхроних машина, изведен је математички модел. При извођењу модела, коришћена је трофазно-двофазна трансформација промењљивих као и обртна трансформација. Указано је на потребу за увођењем трансформација и детаљно изложена техника и поступак. Наведене су предности трансформисаног модела у коме се релевантне струје, напони, магнетопобудне силе и флуксеви посматрају у координатном систему који се обрће у синхронизму са обртним пољем. Дати су изрази за снагу обртног поља и електромагнетски моменат. За устаљена стања, одређени су заменска шема и механичка карактеристика. Дат је и упрошћени поступак одређивања заменске шеме асинхроне машине на основу сличности са трансформатором. Дате су оријентационе вредности реактанси и отпорности асинхроних машина и објашњен начин на који се ови параметри могу одредити експериментално. Објашњене су предности рада са релативним вредностима параметара и промењљивих и дате су смернице за избор базних величина. Анализирана је природна механичка карактеристика и проучен режим поласка, номинални режим, празан ход као и рад са превалним моментом у моторском и генераторском раду. Утврђен је утицај параметара машине на полазни моменат, превални моменат, превално клизање и степен корисног дејства.

Анализиране су могућности за промену брзине обртања асинхроних машина напајаних из извора константне учестаности. Приказане су промене механичке карактеристике и брзине обртања услед варијације напона напајања, као и промене услед варијација роторске отпорности, које се могу остварити код асинхроних машина са намотаном ротором. Проучени су домети промене брзине обртања путем промене броја магнетских полова. Дата је расподела магнетског поља за случај да машина има више од $2p = 2$ магнетска пола, и објашњен начин формирања намотаја статора који резултује вишеполним пољем. Објашњен је утицај броја пари полова p на синхрону брзину и моменат. Дат је пример статорског намотаја који се може повезати тако да даје двополно или четворополно поље. Дати су изрази

за синхрону брзину, брзину обртања и учестаност клизања у функцији броја полова. Утврђени су недостаци, ограничења, губици енергије и проблеми пројектовања који се јављају код напајања из извора непромењиве учестаности.

Слика 4.1: Изглед асинхроног мотора са кавезним ротором.

Анализиран је рад асинхроних машина које се напајају из статичког енергетског претварача који даје напоне чија се учестаности и амплитуда може континуално мењати. Дат је кратак приказ топологија енергетских претварача који се користе у напајању асинхроних машина. Објашњен је начин на који треба мењати амплитуду и учестаност напона како би се остварила жељена брзина обртања и жељени флукс у машини. Анализирани су ефекти промене учестаности напајања на механичку карактеристику у зони константног момента и зони слабљења поља. Наведени су основни приступи регулацији момента, флукса и снаге асинхроне машине напајане из извора промењиве учестаности. Дата је фамилија механичких карактеристика до које се долази променом учестаности. Одређена је експлоатациона и транзијентна карактеристика у M-Ω равни, као и границе рада са константном снагом у области слабљења поља.

На крају поглавља, дискутоване су разлике у конструкцији и параметрима асинхроних машина које су намењене раду са константном учестаношћу напајања и машина које се напајају из енергетског претварача који даје напоне променљиве учестаности.

4.1 Елементи конструкције и принципи рада

Асинхроне машине имају статор са три фазна намотаја. Осе фазних намотаја су просторно померене за $2\pi/3$. Ако у фазама статорског намотаја постоје простопериодичне струје исте амплитуде и кружне учестаности ω_s, при чему се почетне фазе међусобно разликују за $2\pi/3$, у машини постоји обртно магнетско поље. Брзина обртања поља одређена је кружном учестаношћу напајања ω_s. Када се асинхрона машина напаја из мреже индустријске фреквенције f = 50 Hz, поље ротира брзином од 100 π rad/s. Ротор асинхроне машине има кратко спојени кавезни намотај. Ако се ротор обрће истом брзином као и поље, тада нема промене флукса у роторском намотају, тако да се у њему не индукује електромоторна сила и не јавља се струја. Брзина обртања магнетског поља се зове *синхрона брзина* и означава са Ω_s. У случају да постоји разлика $\Omega_k = \Omega_s - \Omega_m$ између брзине поља и брзине ротора, постоји промена флукса у ротору. Индукује се електромоторна сила која у кратко спојеним роторским намотајима ствара наизменичне струје кружне учестаности ω_k која се зове учестаност клизања[1]. Разлика у брзини обртања $\Omega_k = \Omega_s - \Omega_m$ се зове брзина клизања. Садејством роторских струја са пољем добија се електромагнетски моменат M_{em}. Створени моменат тежи да доведе ротор у синхронизам са пољем. У случају када је $\Omega_k = \Omega_s - \Omega_m > 0$, моменат тежи да увећа брзину обртања ротора.

Слика 4.1 даје увид у конструкцију једне асинхроне машине чије су номиналне величине U_{nom} = 400 V, f_{nom} = 50 Hz, P_{nom} = 4 kW, n_{nom} = 1450 o/min. Бројем 1 означено је метално кућиште у које је асинхрона машина уграђена. Прстен означен бројем 9 служи за подизање и транспортовање мотора. Котрљајући лежајеви[2] су уграђени на два супротна краја вратила (19). Лежајеви су обележени бројевима 6 и 7. Предњи лежај је смештен у кућиште, у чауру 3. Магнетско коло ротора означено је бројем 16. Роторски проводници су начињени уливањем алуминијума у жлебове ротора, који се на посматраном ротору не пружају праволинијски већ су косо постављени. Проводници ротора се доводе у кратак спој алуминијумским прстеновима (17) на предњој и задњој страни роторског цилиндра. Алуми-

[1] eng. *slip*, it. *scorrimento*
[2] eng. *bearings*, it. *cuscinetto*

нијумски прстенови (17) се продужавају у пера чији је задатак да створе струју ваздуха која помаже одвођењу топлоте. Проводници статора (26) су начињени од бакра, и леже у жлебовима статорског магнетског кола (13). На задњој страни мотора, на вратило може бити уграђен вентилатор (23) који ствара струју ваздуха са спољашње стране кућишта. Такав начин одвођења топлоте зове се *сопствено хлађење*. Сопствено хлађење није примерено моторима који раде са великим брзинама обртања.

4.2 Магнетско коло

Напони и струје који постоје у намотајима статора асинхроне машине имају кружну учестаност ω_s. У ротору се индукује електромоторна сила и јављају струје кружне учестаности ω_k. Флукс и магнетска индукција статора мењају се са кружном учестаношћу ω_s. Ако се асинхрона машина напаја из градске мреже, кружна учестаност ω_s је 100 π. Флукс и магнетска индукција ротора имају кружну учестаност ω_k. За асинхроне машине снаге од неколико киловата, фреквенција клизања је реда величине 1 Hz. Да би се умањили губици који постоје у гвожђу услед вихорних струја, магнетско коло статора и ротора се израђује од лимова. Лимови имају облик приказан слици 4.2.

Слика 4.2: (A) Магнетско коло статора асинхроне машине.
(B) Магнетско коло ротора асинхроне машине.

Слагањем лимова добија се цилиндрично магнетско коло ротора и статора. На површи магнетског кола према ваздушном зазору постоје жлебови у које се уграђују проводници који чине струјно коло. У жлебове статора смештају се лаком изоловани бакарни проводници који су повезани у три фазе (три дела) статорског намотаја. У жлебовима ротора налазе се алуминијумски штапови, који се најчешће израђују ливењем, то јест уливањем течног алуминијума у жлебове. Роторски штапови су кратко спојени чеоним алуминијумским прстеном, као и прстеном на зачељу, чиме се формирају кратко спојени роторски навојци. Пресек машине дат на слици 4.3 приказује положај проводника у односу на магнетска кола.

Слика 4.3: Пресек асинхроне машине. (A) Магнетско коло ротора. (B) Проводници ротора. (C) Магнетско коло статора. (D) Проводници статора.

4.3 Струјно коло

На слици 4.4 дат је изглед роторских проводника и краткоспајајућих прстенова који би се видео после уклањања магнетског кола ротора. Сличност са кавезом, као и околност да су роторски навојци кратко спојени резултовала је називом *кавезни ротор*. Понекад се машине са кратко спојеним ротором назива и *ротор са веверичијим кавезом*[3]. Код машина веће снаге, где је од значаја умањити губитке снаге и увећати степен корисног

[3] eng. *squirrel cage rotor*, ita. *gabbia di scoiattolo*

дејства, роторски проводници могу бити начињени од бакарних штапова. Бакар има значајно мању специфичну отпорност од алуминијума, што смањује специфичне и укупне губитке снаге у намотају ротора.

Проводници ротора не поседују уобичајену изолацију. Између роторских штапова и гвоздених лимова који образују магнетско коло ротора може доћи до електричног контакта и нежељених струја. Да би се ово избегло, унутрашња површ роторских жлебова се пре уливања растопљеног алуминијума може третирати раствором киселине, како би се створио танак изолациони слој соли гвожђа. После уливања алуминијума, створени изолациони слој раздваја алуминијумски штап од магнетског кола. Описани начин производње ротора је једноставан, не захтева велику прецизност обраде, специјалне технолошке поступке нити специјалне материјале. Производња ротора машина за једносмерну струју је знатно сложеније од производње ротора асинхроне машине. Поред осталог потребно је начинити и механички комутатор, направу чије карактеристике зависе од прецизности у изради, и која садржи већи број различитих материјала.

Слика 4.4: Изглед кавезног намотаја на ротору.

Једноставност израде ротора асинхроне машине, робусност, већа специфична снага $\Delta P/\Delta m$ у односу на машину једносмерне струје, мања маса и запремина, као и могућност за рад са значајно већим брзинама обртања од оних које су доступне машинама за једносмерну струју, разлог су да је асинхрони мотор данас најраспрострањенија електрична машина. Одсуство четкица и колектора уклања потребу за одржавањем и значајно продужава животни век. Робусна конструкција асинхроног мотора се повољ-

но одражава на његову поузданост, која се оцењује средњим очекиваним временом између два узастопна квара[4].

Захваљујући развоју у области енергетских претварача, полупроводничких прекидача снаге, дигиталних сигналних процесора (ДСП) и дигиталног управљања енергетским претварачима и погонима (ДПП), могуће је градити системе са асинхроним мотором чија се брзина мења у веома широком опсегу. Дигитално управљани асинхрони мотори су најчешће коришћени извршни органи у системима за управљање кретањем.

4.4 Кавезни и намотани ротор

Поред машина са кратко спојеним ротором, у пракси се могу срести и *клизно-колутни* асинхрони мотори са *намотаним* ротором. Асинхрони мотори са намотаним ротором су налазили примену у времену када није постојала могућност промене амплитуде и учестаности напона напајања, јер није било употребљивих енергетских претварача нити неопходних ресурса за имплементацију дигиталног управљања претварачима. Тада се на статору имао напон добијен из градске мреже, са амплитудом и учестаношћу које се не могу мењати. У поменутим условима, коришћење машине са намотаним ротором је олакшавало проблем регулисања брзине обртања. Данас се овакви мотори све мање користе, тако да преовлађују мотори са кратко спојеним ротором.

У делу (А) слике 4.5 приказан је ротор машине са кратко спојеним ротором, какви се најчешће производе. У делу (В) приказан је *намотани ротор*, то јест ротор асинхроног мотора на коме постоји трофазни намотај сличан статорском. Три фазна намотаја су најчешће везана у звезду, док се три преостала краја роторског трофазног намотаја повезују на проводне колутове који су доступни на предњем делу вратила. Када је мотор у погону, на колутове належу *дирке*, еластичне металографитне плочице које крајеве ротора чине доступним на статорској страни. Повезивањем екстерног отпорника у роторско коло делује се на механичку карактеристику мотора, те се тако може утицати и на брзину обртања.

Потреба за коришћењем машине са намотаним ротором је нестала развојем енергетских претварача који омогућују континуалну промену учестаности напајања машине.

[4] MTBF, *Mean Time Between Failures*

Слика 4.5: (A) Изглед ротора асинхроне машине са кавезним намотајем изливеним од алуминијума. (B) Намотани ротор са клизним колутовима.

4.5 Трофазни намотај статора

Статор асинхроног мотора има три фазна намотаја, то јест три дела статорског намотаја. Свака фаза има два краја. Улазни крајеви сваке фазе се прикључују на трофазни извор наизменичног напона или струје, док се излазни крајеви најчешће везују у заједнички чвор. Заједнички чвор се зове *звездиште*, док се описани начин повезивања фазних намотаја зове *веза у звезду*. Уколико је збир фазних струја у сваком тренутку једнак нули, то јест $i_a(t) + i_b(t) + i_c(t) = 0$, тада не постоји потреба за повратним водом који би повезивао звездиште са извором, јер би струја у таквом воду била једнака нули. У неким случајевима, фазе трофазног статорског намотаја се везују у *троугао*. Осе фазних намотаја су просторно померене за $2\pi/3$, што значи да вектори магнетопобудне сила и флукса појединих фаза стоје под углом од $\pm 2\pi/3$, што је приказано на слици 4.6. Када се у намотајима успоставе наизменичне струје једнаке амплитуде I_m, једнаке учестаности ω_s и фазног помераја од $2\pi/3$, који одговара просторном померају оса намотаја, у магнетском колу машине се ствара обртно поље брзине $\omega_s = \Omega_s$. Тренутне вредности симетричног трофазног система фазних струја су дате једначином (4.1), док је њихова промена дата у десном делу слике 4.6.

Слика 4.6: Положај магнетопобудних сила појединих фаза.

$$F_a = N_s I_m \cos \omega_s t \tag{4.1}$$

$$F_b = N_s I_m \cos(\omega_s t - \frac{2\pi}{3})$$

$$F_c = N_s I_m \cos(\omega_s t - \frac{4\pi}{3})$$

На слици 4.6, фазни намотаји су представљени ознаком за калем. Свака од три ознаке представља намотај са расподељеним проводницима. Густина проводника се простопериодично мења по обиму машине, што је приказано на слици 4.7. Ознака која приказује намотај лежи на његовој оси, то јест на правцу вектора магнетопобудне силе и вектора флукса фазног намотаја. Ознаке се користе како би приказ био прегледнији.

Слика 4.7: (A) Сваки фазни намотај има проводнике расподељене по обиму машине. (B) Намотај се представља ознаком за калем чија оса лежи на правцу у коме постоји флукс намотаја.

4.6 Обртно магнетско поље

Сваки фазни намотај ствара магнетопобудну силу у правцу осе намотаја. Амплитуда магнетопобудних сила F_a, F_b, и F_c зависи од струја $i_a(t)$, $i_b(t)$ и $i_c(t)$. Векторски збир магнетопобудних сила даје резултантну магнетопобудну силу статора F_S. Количник вектора F_S и магнетске отпорности R_μ даје вектор статорског флукса. Линије флукса статора пролазе кроз ваздушни зазор и обухватају магнетско коло ротора. Пролазећи кроз површи које се ослањају на кратко спојене роторске навојке, статорски флукс доприноси флуксу ротора. Коефицијент пропорционалности је одређен међусобном индуктивношћу статора и посматраног роторског навојка. У случају када се ротор обрће у синхронизму са пољем ($\Omega_m = \Omega_S$) нема промене роторског флукса, тако да у ротору нема индуковане електромоторне силе нити постоји струја.

Слика 4.8: Резултантна магнетопобудна сила трофазног намотаја. (A) Положај вектора магнетопобудне силе у тренутку t ≈ 0. (B) Положај вектора магнетопобудне силе у тренутку t ≈ π/3/ωs.

Када се ротор обрће брзином мањом од синхроне ($\Omega_m < \Omega_S$), јавља се *клизање*, односно заостајање ротора $\Omega_k = \Omega_s - \Omega_m > 0$. Са становишта кратко спојеног роторског навојка, део статорског флукса који обухвата контуру мења се простопериодично, са учестаношћу $\omega_k = \Omega_k$.[5].

Промена флукса доводи до индуковања електромоторне силе у кратко спојеним навојцима ротора. Роторска струја је наизменична, она има кружну учестаност ω_k, пропорционална је индукованој електромоторној сили e и обрнуто је пропорционална импеданси ротора $R + \mathrm{j}\omega_k L$. Ако је клизање ω_k мало, струја ротора је приближно једнака e/R. У садејству са магнетским пољем, струје у проводницима ротора стварају електромагнетски моменат који тежи да доведе ротор у синхронизам са пољем.

[5] У претходном делу књиге, разматране су електричне машине чије магнетско поље има два магнетска пола. Овакве машине се зову *двополне*. У овом поглављу ће бити анализиране и машине које имају више магнетских полова. Као пример, расподела магнетског поља у зазору може бити таква да постоје два северна и два јужна пола. Број пари полова се означава са p. Биће показано да се магнетско поље које стварају наизменичне струје кружне учестаности ω_s обрће угаоном брзином $\Omega_s = \omega_s/p$. Дакле, код двополних машина постоји једнакост између кружне учестаности ω и одговарајуће угаоне брзине обртања Ω.

Слика 4.9: Представљање обртног поља вектором. (*Fs*) Вектор магнетопобудне силе намотаја. (*Φs*) Вектор флукса у једном навојку статора. (*Φm*) Вектор међусобног флукса који обухвата и роторски намотај.

4.7 Принципи развијања момента

Принцип рада асинхроних машина може се приказати коришћењем слике 4.10. Приказан је флукс Φ_m који се обрће синхроном брзином Ω_S. Ротор се обрће брзином $\Omega_m < \Omega_S$, што значи да заостаје за флуксом за износ клизања

$$\omega_k = \Omega_k = \Omega_s - \Omega_m > 0\,. \tag{4.2}$$

Угао θ_k између флукса Φ_m и ротора једнак је интегралу клизања, тако да постепено расте. На слици је приказана само једна кратко спојена контура ротора, како би се објаснило принцип генерисања момента. Флукс који постоји у роторској контури мења се у зависности од угла θ_k.

$$\theta_k(t) = \theta_{k_0} + \int_0^t \Omega_k \, d\tau\,. \tag{4.3}$$

Угао између референтне осе контуре и вектора флукса је $\theta_k + \pi/2$. Флукс статора који обухвата роторску контуру једнак је

$$\Phi_R = -\Phi_m \cdot \sin\theta_k\,. \tag{4.4}$$

Укупни флукс ротора укључује и ефекте струје ротора, која у контури ствара флукс пропорционалан коефицијенту сопствене индуктивности. Током стицања увида у принципе рада, поменути ефекти се занемарују, и сматра се да израз $\Phi_{Rm} = -\Phi_m \sin(\theta_k)$ одговара укупном флуксу ротора Φ_R. Електромоторна сила индукована у роторском намотају пропорционална је флуксу Φ_m и учестаности клизања ω_k.

$$e = \frac{\mathrm{d}\Phi_R}{\mathrm{d}t} = -\Phi_m \cdot \Omega_k \cos\,\theta_k\,. \tag{4.5}$$

Роторска струја је наизменична, обрнуто пропорционална импеданси $R + \mathrm{j}\omega_k L$ ротора. За мале вредности клизања, отпорност R је значајно већа од реактансе $\omega_k L$, тако да је струја i_R приближно једнака $e/R \sim \Phi_m \omega_k$.

$$u = 0 = R_R i_R + e, \quad i_R = +\frac{\Phi_m \cdot \Omega_k}{R_R}\cos\,\theta_k \tag{4.6}$$

Будући да је у посматраном случају $i_R > 0$, смер струје одговара смеру приказаном на слици 4.10. Исправност овог закључка се може проверити на следећи начин. Ако се посматра напредовање вектора статорског флукса у односу на ротор, закључује се да долази до увећања флукса у контури у смеру који је супротан од референтног.

Слика 4.10: Приближна оцена силе која делује на роторске проводнике.

Индукована електромоторна сила и струја по правилу имају такав смер да се противе промени флукса. Стога је смер роторске струје такав да те-

жи успостављању флукса у референтном смеру који је на слици 4.10 усмерен надоле. Струја ротора се мења пропорционално функцији $\cos(\theta_k) = \cos(\theta_0 + \omega_k t)$, дакле, ради се о наизменичној струји учестаности ω_k. Наизменичне струје у ротору стварају флукс који се обрће у односу на сам ротор брзином $\Omega_k = \omega_k/p$. Дакле, роторски флукс се обрће брзином $\Omega_m + \Omega_k = \Omega_m + (\Omega_s - \Omega_m) = \Omega_s$, чиме је показано да вектори роторског и статорског флукса не мењају релативни положај, то јест обрћу се једнаком брзином.

4.8 Зависност момента од клизања и флукса

У садејству са магнетском пољем, струје у проводницима ротора стварају електромагнетски моменат који тежи да доведе ротор у синхронизам са пољем.

У зони роторског проводника који је на слици 4.10 означен ознаком ⊙ постоји радијална компонента магнетске индукције једнака $B_m\cos(\theta_k)$, где је B_m максимална индукција која постоји у зазору и коју стварају струје у статорским намотајима. Магнетска индукција B_m постоји у правцу вектора Φ_m, док у другим правцима има мању вредност, у складу са изразом за простопериодичну расподелу радијалне компоненте магнетске индукције. Струја која постоји у проводнику једнака је $\Phi_m\omega_k \cos\theta_k/Z_R \approx \Phi_m\omega_k \cos\theta_k/R$. Сила која делује на проводник ротора означен ознаком ⊙ једнака је производу Li_RB, где је L осна дужина машине (то јест дужина проводника). Једнака сила делује и на проводник означен ознаком ⊗. Смер силе је у оба случаја позитиван у односу на референтни тангенцијални правац. Смер струје другог проводника је промењен, али се мења и смер магнетске индукције, која на месту проводника ⊗ излази из магнетског кола статора, пролази кроз зазор и улази у магнетско коло ротора.

Релација $\Phi_m = (2/\pi)\, B_m\pi RL = 2B_mRL$ повезује флукс Φ_m и максималну вредност индукције B_m. Дакле, израз за магнетску индукцију добија облик

$$B = k_1 \cdot \Phi_m \cos\theta_k \,. \tag{4.7}$$

Развијени електромагнетско моменат једнак је

$$M_{em} = D \cdot L \cdot i_R \cdot B = D \cdot L \cdot \left(\Phi_m \omega_k \cos\theta_k / R\right) B_m \cdot \cos\theta_k \,, \tag{4.8}$$

односно

$$M_{em} = \Phi_m^2 \cdot \cos^2\left(\theta_k\right) \cdot \Omega_k / R = k_2 \cdot \Phi_m^2 \cdot \cos^2\left(\theta_k\right) \cdot \Omega_k \,. \tag{4.9}$$

Дакле, **моменат асинхроне машине пропорционалан је учестаности клизања и квадрату флукса, док је обрнуто пропорционалан отпорности роторског намотаја.**

Питање (4.1):

У посматраном случају, добијени моменат је пропорционалан $\cos^2(\theta_k) = \cos^2(\theta_0 + \omega_k t)$. Дакле, добија се моменат који пулсира од нуле до двоструке средње вредности. Може ли се структура приказана на слици изменити тако да даје константан моменат?

Одговор (4.1):

Уколико се на ротор угради још једна кратко спојена контура, померена за угао од $\pi/2$ у односу на постојећу, моменат који ће се добити услед силе која делује на њене проводнике биће пропорционалан $\sin^2(\theta_k)$, па ће у збиру са претходно добијеним моментом дати $M_{em} = \Phi_m^2 \omega_k / R$ = const.

4.9 Моделирање трофазних асинхроних машина

Рад са асинхроним машинама захтева познавање њиховог понашања са стране електричног прилаза, као и познавање везе између момента и брзине обртања на механичком прилазу, то јест вратилу.

Анализа асинхроних машина у устаљеном стању захтева познавање *механичке карактеристике* и *заменске шеме за устаљена стања*. Механичка карактеристика асинхроне машине даје везу устаљених вредности електромагнетског момента и брзине обртање вратила. Механичка карактеристика зависи од учестаности и амплитуде статорског напона тако да промене у статорском напону мењају и механичку карактеристику. У устаљеном стању, напони и струје су простопериодичне величине константне амплитуде и константне учестаности које се могу представити фазорима. Везе струја и напона се могу приказати заменском шемом. Заменска шема за устаљена стања је мрежа са отпорницима и реактансама из које је могуће израчунати фазоре статорских и роторских струја за дате услове напајања и дату брзину обртања.

Рад на проблемима напајања и управљања асинхроним машинама тражи познавање *динамичког модела*, то јест једначина и израза који повезују релевантне величине машине током прелазних процеса и устаљених стања. Веза напона и струја се током прелазних процеса може дати диференцијалним једначинама које описују равнотежу напона у намотајима. Једначине равнотеже напона описују *електрични подсистем* машине. *Механички* подсистем је описан Њутновом диференцијалном једначином.

Скуп диференцијалних једначина и израза који описују понашање машине зовемо *математички модел* или *динамички модел*.

У даљем току излагања дата је анализа електричног и механичког подсистема асинхроне машине и изведен је динамички модел. Добијени динамички модел укључује и трансформације координата стања које се олакшавају анализу прелазних појава у синхроним и асинхроним машинама. Динамички модел се уобичајено користи у анализи прелазних процеса и решавању проблема управљања, али се може успешно користити и у анализи устаљених стања. Полазећи од динамичког модела, одредиће се механичка карактеристика, заменска шема као и везе напона, струја, флукса, момента и брзине у устаљеном стању.

Читаоци који немају потребе да се ближе упознају са прелазним процесима у асинхроним машинама нити интереса за проблеме напајања и управљања могу прескочити поглавља у којима се изводи и образлаже динамички модел асинхроне машине. Заменску шему за устаљена стања могуће је одредити коришћењем аналогије са трансформатором, што је показано у одељку 4.39. Анализу заменске шеме за устаљена стања и механичке карактеристике асинхроних машина могуће је наставити од одељка 4.39.

4.10 Структура модела

У поглављу *Електромеханичко претварање енергије* показано је да динамички модел електричне машине има (1) N диференцијалних једначина напонске равнотеже, (2) матрицу индуктивности, (3) израз за моменат, и (4) Њутнову једначину.

Диференцијалне једначине равнотеже напона дате су изразом

$$\underline{u} = \underline{R} \cdot \underline{i} + \frac{\mathrm{d}\underline{\psi}}{\mathrm{d}t}. \tag{4.10}$$

Веза флуксева и струја дата је нестационарном матрицом индуктивности

$$\underline{\psi} = \underline{L}(\theta_m) \cdot \underline{i}. \tag{4.11}$$

Електромагнетски моменат је одређен следећом једначином

$$M_{em} = \frac{1}{2} \underline{i}^T \frac{\mathrm{d}\underline{L}}{\mathrm{d}\theta_m} \underline{i} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left(i_k i_j \frac{\mathrm{d}L_{jk}}{\mathrm{d}\theta_m} \right). \tag{4.12}$$

Прелазне појаве у механичком подсистему одређене су Њутновом диференцијалном једначином кретања

$$J\frac{\mathrm{d}\Omega_m}{\mathrm{d}t} = M_{em} - M_m - k_F\Omega_m . \tag{4.13}$$

Четири горе дате једначине дефинишу општи модел обртне електричне машине. Модел је изведен уз четири занемарења, и то (i) занемарење ефеката расподељених параметара, (ii) занемарење паразитних капацитивности и енергије електричног поља, (iii) занемарење губитака у гвожђу и (iv) занемарење нелинеарности феромагнетика и магнетског засићења. Матрица индуктивности (4.11) је нестационарна.

У случају када електрична машина има N намотаја, израз (4.10) садржи N диференцијалних једначина напонске равнотеже, израз (4.11) даје везу између струја намотаја и њихових флуксева, израз (4.12) даје електромагнетски моменат, док је израз (4.13) заправо Њутнова диференцијална једначина која описује промену брзине обртања. Дакле, у датом моделу постоји N+1 диференцијалних једначина и исто толико *променљивих стања*.

4.11 Трофазне и двофазне машине

Асинхроне машине поседују трофазни намотај на статору. Наизменичне струје статора стварају вектор статорске магнетопобудне силе $F_S = F_a+F_b+F_c$. Ради представљања вектора у α-β координатном систему, правац оса α и β дефинише се јединичним векторима (ортовима) α_0 и β_0. Правци оса фазних намотаја могу се дефинисати ортовима

$$\begin{aligned} \vec{a}_0 &= \vec{\alpha}_0, \\ \vec{b}_0 &= -\frac{\vec{\alpha}_0}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\beta}_0, \\ \vec{c}_0 &= -\frac{\vec{\alpha}_0}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\beta}_0. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Промена фазних струја

$$\begin{aligned} i_a &= I_m \cos\omega_S t, \\ i_b &= I_m \cos(\omega_S t - 2\pi/3), \\ i_c &= I_m \cos(\omega_S t - 4\pi/3), \end{aligned} \tag{4.15}$$

даје магнетопобудне силе

$$\vec{F}_a = Ni_a\vec{\alpha}_0, \tag{4.16}$$
$$\vec{F}_b = Ni_b(-\frac{1}{2}\vec{\alpha}_0 + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\beta}_0),$$
$$\vec{F}_c = Ni_c(-\frac{1}{2}\vec{\alpha}_0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\beta}_0),$$

које у збиру дају вектор магнетопобудне силе статора

$$\vec{F}_s = \vec{F}_a + \vec{F}_b + \vec{F}_c = N\left[\vec{\alpha}_0\left(i_a - \frac{i_b}{2} - \frac{i_c}{2}\right) + \vec{\beta}_0\frac{\sqrt{3}}{2}(i_b - i_c)\right] \tag{4.17}$$
$$\vec{F}_s = \frac{3}{2}NI_m\left[\vec{\alpha}_0\cos\omega_S t + \vec{\beta}_0\sin\omega_S t\right]$$

који се обрће брзином $\Omega_S=\omega_S$ не мењајући при томе амплитуду која задржава вредност F_{Sm} = 3/2 NI_m. Моделирање трофазног намотаја је везано са тешкоћама. Фазне струје нису независне променљиве. Међу њима постоји релација $i_a + i_b + i_c = 0$, која произилази из околности да су намотаји везани у звезду. Код везе у троугао постоје проблеми исте природе. Као последица, у једначини напонске равнотеже за фазу *c* мора се користити величина ($-i_a - i_b$) на месту струје i_c. Поред тога, угао међу осама намотаја није $\pi/2$, тако да постоје међусобне индуктивности које су различите од нуле. Ова околност повећава број фактора у једначинама равнотеже напона. Математички модел машине која би имала два фазна намотаја, један у правцу орта α_0 и други у правцу β_0, био би прегледнији. Постојале би две независне променљиве, i_α и i_β, при чему би међусобна индуктивност међу овим ортогоналним намотајима била једнака нули.

Код двофазне машине са намотајима оријентисаном у правцу ортова α_0 и β_0, математички модел је прегледнији стога што струје у намотајима представљају пројекције вектора магнетопобудне силе на осе. Наиме, магнетопобудна сила у правцу осе α биће једнака $F_\alpha = Ni_\alpha$, што је пројекција вектора F_S на осу α. Такође, флукс намотаја β биће пројекција вектора флукса на осу β. Поменуте околности олакшавају разумевање и коришћење модела. Три фазна намотаја дата на слици 4.11 могу се заменити двофазним α-β системом намотаја какав је дат на слици 4.12. На основу једначине (4.17), ако је број навојака непромењен (то јест $N_{abc} = N_{\alpha\beta}$), вектор магнетопобудне силе F_S задржава исту оријентацију и амплитуду под условом да у двофазном систему постоје струје

$$i_{\alpha s} = i_a - \frac{i_b}{2} - \frac{i_c}{2} = \frac{3}{2}\, i_a = \frac{3}{2}\, I_m \cos\omega_S t \qquad (4.18)$$

$$i_{\beta s} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(i_b - i_c\right) = \frac{3}{2}\, I_m \sin\omega_S t.$$

Слика 4.11: Положај оса намотаја у односу на правоугли αβ координатни систем.

Мисаони експеримент замене трофазног система намотаја са двофазним у коме струје имају наведене вредности $i_\alpha(t)$ и $i_\beta(t)$ резултује истим вектором магнетопобудне силе статора F_S, па самим тим и истим вектором статорског флукса F_S/R_μ. У замишљеној машини, поред једнаког флукса имао би се и исти електромагнетски моменат. Наиме, уз једнаку амплитуду и брзину обртања статорског флукса, у ротору би постојало исто клизање, исте електромоторне силе и исте струје као и код машине са трофазним системом намотаја.

<u>Питање (4.2):</u>

Полазећи од описаног мисаоног експеримента у коме се трофазни систем намотаја замењује двофазним системом који има једнак број навојака

у свакој фази као и трофазни, упоредити фазне напоне који постоје у првом и другом случају. Може ли се начинити двофазни еквивалент код кога би напони/струје били другачији? (Погледати слику 4.13).

Слика 4.12: Представљање трофазног намотаја двофазним.

Одговор (4.2):

Потребно је поћи од релација $e_1 \approx \omega_s \Phi_m$, $e \approx \omega_s \Psi_m$, $u_a = R_a i_a + \mathrm{d}\Psi_a/\mathrm{d}t \approx \mathrm{d}\Psi_a/\mathrm{d}t = -\omega_s \sin(\omega_s t)\Psi_m$. Пошто је флукс статора у оба случаја исте амплитуде и обрће се истом брзином, електромоторна сила индукована у једном навојку је неизмењена. Пошто је и број навојака у сваком од фазних намотаја једнак, напони u_{abc} и $u_{\alpha\beta}$ имају једнаке амплитуде и једнаке ефективне вредности. Приметити да се мења однос u/i, који има димензије импедансе. Наиме, на основу (4.18), струје $i_{\alpha\beta}$ морају имати амплитуде и ефективне вредности које су за 50% веће у односу на струје i_{abc}. Трофазни статорски намотај је могуће заменити двофазним који би имао $N_{\alpha\beta} = mN_{abc}$ навојака. Фазни напони двофазног еквивалента биће $u_{\alpha\beta} = m\ u_{abc}$. Инваријантност магнетопобудне силе F_S налаже да се у намотајима двофазног еквивалента имају струје $i_{\alpha\beta} = (3/2)\cdot(i_{abc}/m)$.

Премда је моделирање двофазног система намотаја прегледније, електричне машине за наизменичну струју се ипак израђују као трофазне, то

јест оне имају три фазна намотаја чије су осе померене за $2\pi/3$. Трофазни статорски намотај електричне машине напаја се помоћу три једнака проводника, међу којима постоје напони исте ефективне вредности (400 V у случају напајања из градске мреже). У устаљеном уравнотеженом стању у сваком од три напојна вода постоји струје једнаке ефективне вредности. Број проводника далековода у преносној мрежи је такође три.

Питање (4.3):

Двофазна асинхрона машина се напаја из два напонска извора чији су напони фазно померени за $\pi/2$. Повезати машину са изворима коришћењем само 3 проводника. Одредити напоне између проводника и ефективне вредности струја у проводницима.

Одговор (4.3):

Двофазна машина се може напајати тако што се сва четири краја фазних намотаја повезују засебним проводником, што тражи 4>3 проводника за крајеве $\alpha1$, $\alpha2$, $\beta1$ и $\beta2$ двофазног система. Два повратна вода ($\alpha2$ и $\beta2$) се могу спојити у један. Тада би број проводника био мањи, али би струја повратног вода $i_\alpha(t)+i_\beta(t) = (3/2\ I_m)(\cos\omega_s t + \sin\omega_s t)$ имала $2^{0,5}$ пута већу амплитуду и ефективну вредност. Несиметрија би постојала и у линијским напонима, то јест напонима који постоје између проводника $\alpha1$, $\beta1$, и повратног вода $\alpha2\beta2$. Ако између проводника $\alpha1$ и повратног вода постоји фазни напон ефективне вредности U_α, напон исте ефективне вредности ће постојати између проводника $\beta1$ и повратног вода, али ће напон између проводника $\alpha1$ и $\beta1$ бити $2^{0,5}$ пута већи. Сложеност у повезивању и коришћењу оваквог трожичног система је разлог да се статорски намотај електричних машина израђује као трофазни, те да се пренос и дистрибуција електричне енергије врши трофазним системом са једнаким ефективним вредностима линијских струја и једнаким ефективним вредностима линијских напона. Ипак, постоји могућност да се приликом моделирања трофазна машина представи двофазним еквивалентом, како би се дошло до прегледних, употребљивих модела, заменских шема и других математичких представа машине.

4.12 Кларкина трансформација

Трофазна машина се може представити двофазним еквивалентом. Уколико се број навојака новог, двофазног система намотаја $N_{\alpha\beta}$ и његове струје $i_\alpha(t)$ и $i_\beta(t)$ одреде тако да вектор магнетопобудне силе статора F_s остане неизмењен (инваријантан), у машини ће постојати исти флукс, моменат, снага претварања и брзина обртања као и раније.

Веза која постоји између оригиналних величина (i_{abc}, u_{abc}, Ψ_{abc}) и њихових двофазних еквивалената ($i_{\alpha\beta}$, $u_{\alpha\beta}$, $\Psi_{\alpha\beta}$) зове се *трансформација координата стања*. У посматраном случају, ради се о трофазно-двофазној трансформацији, која се према аутору зове *Кларкина трансформација*. Уопште узевши, сваки систем који је предмет анализе или управљања описују *променљиве стања*, то јест променљиве величине које одређују стање система. Свака променљива стања мора бити независна, то јест не може бити функција других променљивих стања. Као последица, у трофазном намотају постоје само две струје које су променљиве стања. Трећа струја је одређена збиром прве две.

Трансформација координата стања може бити показана на једноставном примеру. Стање тела која се креће у простору може се описати координатама x, y и z у правоуглом Картезијанском координатном систему као и првим изводом – брзином dx/dt, dy/dt и dz/dt. Посматрач који располаже подацима о растојању r од координатног почетка, о елевацији φ под којом се тело види, као и о азимуту θ може да опише стање тела коришћењем координата r, φ и θ. Функција која даје везу координата x, y и z са координатама сферног координатног система r, φ и θ је *трансформација координата стања*. Једначине које описују кретање тела се могу записати коришћењем првих или других координата. Први сет једначина би назвали *моделом у x-y-z координатном систему*, а други *моделом у сферном координатном систему*. Одабрани координатни систем одражава угао гледања који узима посматрач, па не утиче на било који начин на само тело и његово кретање. Посматрач има интерес да одабере координатни систем, то јест да примени трансформацију променљивих стања која ће резултовати једноставнијим, прегледнијим, интуитивнијим математичким моделом из кога је лакше доносити закључке везане за управљање системом и његово коришћење. На сличан начин, једну трофазну машину можемо представити еквивалентном двофазном машином да би лакше сагледали њене особине, карактеристике, потребе за напајањем и управљачке потребе.

Струје двофазног еквивалента који представља трофазни намотај дате су једначином (4.19). Израз представља једначину (4.18) у матричној форми. Матрица се множи коефицијентом K_I. У случају да се двофазни еквивалент и трофазни намотај имају исти број навојака, коефицијент K_I има вредност 1. Треба приметити да се трофазни намотај може представити двофазним еквивалентом који има другачији број навојака. Да би вектор магнетопобудне силе статора F_s био неизмењен, коефицијент K_I мора узети другачију вредност.

Слика 4.13: Двофазни еквивалент трофазног намотаја и струје двофазног система.

$$\begin{bmatrix} i_{\alpha s} \\ i_{\beta s} \end{bmatrix} = K_I \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

4.12 Двофазни еквивалент

Трансформација промењљивих стања постојеће трофазне машине може бити математичка операција која трофазну машину представља замишљеном двофазном машином. Постоји и могућност да се постојећа трофазна машина замени реалном двофазном асинхроном машином са два фазна намотаја који стварају исту магнетопобудну силу, флукс, моменат и снагу као и оригинална трофазна машина. Полазећи од претпоставке да је начињен један двофазни прототип асинхроне машине који се зове М2, који има исто магнетско коло као посматрана трофазна асинхрона машина М3 и која има исти број навојака, тада струје у двофазној асинхроној машини морају бити једнаке

$$i_{\alpha s} = i_a - \frac{i_b}{2} - \frac{i_c}{2} = \frac{3}{2} i_a \qquad (4.20)$$

$$i_{\beta s} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(i_b - i_c\right)$$

да би магнетопобудна сила остала иста. Једнака магнетопобудна сила даје исти флукс, па у машини М2 вршна вредност електромоторне силе у једном навојку остаје неизмењена. Будући да је $N_{abc} = N_{\alpha\beta}$, као и да је индукована електромоторна сила е значајно мања од пада напона Ri, напони u_{abc} и $u_{\alpha\beta}$ морају имати једнаке вршне вредности. Дакле, напон фазе a машине М3 има исту вршну вредност као и напон фазе α машине М2. Ако се сада спроведе трофазно двофазна трансформација напона користећи израз (4.20) коришћен и за трансформацију струја, добија се

$$u_{\alpha s} = u_a - \frac{u_b}{2} - \frac{u_c}{2} = \frac{3}{2} u_a \,. \qquad (4.21)$$

Дакле, у случају када се посматрају два асинхрона мотора од којих је један двофазни а други трофазни, који имају једнака магнетска кола и исти број навојака по фази, напони и струје двофазне машине се не могу добити тако што ће се на напоне и струје трофазне машине применити иста трансформациона матрица (4.19). Другим речима, ако је коефицијент трансформације струја K_I једнак коефицијенту трансформације напона K_U и ако су оба једнака 1, напони и струје добијени трансформацијом величина машине М3 неће одговарати напонима и струјама који се могу измерити на машини М2.

Потребно је уочити да није неопходно примењивати трофазно двофазну трансформацију која има коефицијенте $K_I = K_U = 1$, већ се може одабрати друга вредност коефицијената $K_I = K_U$. Такође, за даљу анализу није неопходно да трансформисане величине одговарају реалној двофазној машини. Ако се уместо израза (4.21) за трансформацију напона машине М3 користи коефицијент $K_U = 2/3$, при чему се трансформација струја исте машине обавља коришћењем израза (4.19) у коме је $K_I = 1$, добијени напони и струје ће заиста одговарати двофазним намотајима машине М2, која има исти број навојака као и машина М3. Недостатак овог приступа је у томе што су струје машине М2 1,5 пута веће од струја машине М3, док су напони једнаки. Дакле, по обављеној трансформацији, однос напона и струје машина М2 и М3 неће бити једнак. Дакле, обављена трансформација неће бити инваријантна по импеданси. То значи да импедансе оригиналне трофазне машине треба множити са коефицијентом K_U/K_I да би се добиле импедансе двофазног еквивалента.

Ако се задржи $K_I = 1$ и $K_U = 1$, трансформацијом напона машине М3 добијају се напони двофазног еквивалента који су 1,5 пута већи од напона који се могу измерити на машини М2. Дакле, оваква трансформација је инваријантна по импеданси. Међутим, она даје напоне који не одговарају машини М2. Другим речима, коришћењем трансформација са $K_I = 1$ и $K_U = 1$, добијају се двофазни напони и струје који не одговарају реалној двофазној машини. Поред тога, оваква трансформација није инваријантна по снази.

У пракси се најчешће користи трансформација где је $K_I = K_U = 2/3$. Ради бољег разумевања, пре навођења особина овакве трансформације, биће описане карактеристичне вредности коефицијената K_I и K_U које се примењују у пракси.

4.13 Инваријантност

Ако се Кларкина трансформација изведе тако да су односи напона и струја трофазне машине и двофазног еквивалента једнаки, таква трансформација је инваријантна по импеданси. Ако су исти односи флуксева и струја, он је инваријантна по индуктивности. Ако израз за снагу двофазне машине $P_{\alpha\beta}$ даје исту вредност као и израз за снагу трофазне машине, тада је трансформација инваријантна по снази.

Потребно је рећи да постоји могућност коришћења трансформација које нису инваријантне по снази. Ако се двофазни еквивалент жели представити реалном асинхроном машином коју је могуће начинити и покренути, тада се поставља питање тачности двофазног модела који даје снагу различиту од снаге оригиналне трофазне машине. Дакле, применом трансформације која није инваријантна по снази се добија двофазни модел који се у пракси не може начинити. Међутим, то не умањује његову употребну вредност. Као пример, може се узети модел отпорника, $u = Ri$. Обављањем *трансформације* $u_1 = 2u$ и $i_1 = 2i$, добија се модел чија је снага четири пута већа од актуелне. Међутим, тај модел је и даље употребљив, јер се може искористити за одређивање струје при задатом напону јер је $u_1 = Ri_1$. При његовом коришћењу, потребно је израчунату вредност снаге $u_1 i_1$ поделити са четири. Представа u_1, i_1 отпорника не представља реалан отпорник, али се може са успехом користити.

У пракси се настоји да трансформација буде инваријантна по импеданси и индуктивности, док се евентуални изостанак инваријантности по снази често прихвата. То значи да се траснформација струја, напона и флуксева обавља коришћењем исте трансформационе матрице, дате једначином (4.22), у којој је $K_I = K_U = K_\psi$.

$$\begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} = K_I \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

У мисаоном експерименту где се трофазни намотај мења двофазним са једнаким бројем навојака ($N_{\alpha\beta} = N_{abc}$), коефицијент K_I у горњем изразу треба да има вредност 1, да би магнетопобудна сила статора F_s по обављеној трансформацији задржала исту вредност. За струје трофазног намотаја $i_a(t) = I_m\cos\omega_s t$, $i_b(t) = I_m\cos(\omega_s t\text{-}2\pi/3)$, $i_c(t) = I_m\cos(\omega_s t\text{-}4\pi/3)$, добијају се струје двофазног еквивалента $i_\alpha(t) = i_a(t) - i_b(t)/2 - i_c(t)/2 = 3/2\, I_m\cos\omega_s t$, односно $i_\beta(t) = 3^{0,5}/2 \cdot (i_b(t) - i_c(t)) = 3/2\, I_m\sin\omega_s t$.

Поред струја, у αβ координатни систем је потребно трансформисати и напоне, као и флуксеве. Кларкина трансформација за напоне и флуксеве дата је следећим једначинама.

$$\begin{bmatrix} u_\alpha \\ u_\beta \end{bmatrix} = K_U \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

$$\begin{bmatrix} \psi_\alpha \\ \psi_\beta \end{bmatrix} = K_\psi \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{bmatrix} \tag{4.24}$$

У основи, постоји слобода у погледу избора коефицијента K_U који се јавља у горњем изразу. Постојање слободе у избору је често наговештај проблема. Ако је потребно да добијени напони u_α и u_β одговарају фазним напонима реалне двофазне машине добијене заменом трофазних намотаја двофазним намотајима са $N_{\alpha\beta} = N_{abc}$ навојака, тада би коефицијент K_U морао имати вредност 2/3. Наиме, као што је раније показано, услед једнакости амплитуде и брзине обртања статорског флукса код трофазне и двофазне машине, постоји једнакост у амплитудама индукованих електромоторних сила у једном навојку. Будући да се је $N_{\alpha\beta} = N_{abc}$, у фазним намотајима двофазне и трофазне машине биће исте вршне и ефективне вредности индукованих електромоторних сила. Пошто је $e \approx u$, утврђена једнакост се односи и на напоне. Да би се добили αβ напони једнаке вршне вредности

као и напони у оригиналном *abc* домену, неопходно је усвојити коефицијент $K_U = 2/3$, различит од K_I. Премда у избору трансформације координата постоји слобода у избору коефицијената K_I и K_U, потребно је користити је тако да добијени резултат, нови математички модел, буде прегледнији и интуитивнији. Показано је да трансформисање напона и струја са коефицијентима $K_I = 1$ и $K_U = 2/3$ даје αβ напоне и струје који одговарају двофазном намотају какав би се заиста могао начинити. Међутим, постоји проблем створен избором $K_I \neq K_U$. Примена различитих трансформација на напоне и струје доводи до тога да односи *u*/*i* у *abc* и αβ координатном систему **нису једнаки.** Другим речима, не постоји инваријантност импеданси. Параметри као што су отпорности *R* и реактансе *X* имаће различите вредности. При преласку из *abc* у αβ домен, импедансе се морају множити или делити са 3/2. Тиме није доведена у питање тачност модела, али је угрожена његова прегледност и увећана могућност за грешке. Другим речима, сасвим је остваривo намотати статор асинхроне машине тако да има двофазни намотај са $N_{\alpha\beta} = N_{abc}$ навојака, али ће се тада импедансе разликовати јер нова машина има исте напоне али су струје 1,5 пута увећане. По правилу, код избора трансформације координата стања, сматра се да је неопходно постићи да отпорности (*R*) и индуктивности (*L*) остану неизмењене. Дакле, намеће се услов инваријантности по импеданси и индуктивности.

При анализи и моделирању електричних машина, трансформације координата стања се обављају тако да се на исти начин трансформишу напони, струје и флуксеви да би трансформација била инваријантна по импеданси и индуктивности.

- Једнакост између трансформационих матрица напона и струје даје инваријантност по импеданси
- Једнакост између трансформационих матрица флукса и струје даје инваријантност по коефицијентима сопствене, међусобне и расипне индуктивности
- Једнакост између трансформационих матрица напона и флукса омогућава очување релација $e = \mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t$. У случају да је $K_U \neq K_\Psi$, по обављеној трансформацији морала би се користити релација $e = (K_U / K_\Psi)\, \mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t$.

<u>Питање (4.4):</u>

Може ли се начинити реална двофазна машина са $N_{\alpha\beta} = mN_{abc}$ навојака која ће дати једнаку магнетопобудну силу статора F_s као и оригинална трофазна машина, а да при томе напони, струје и флуксеви реалне двофазне машине буду једнаки вредностима које се добијају Кларкином тран-

сформацијом *abc* величина, при чему су матрице трансформације флукса, напона и струје једнаке ($K_U = K_I = K_\Psi$) ?

Одговор (4.4):

Трофазни статорски намотај могуће је заменити двофазним који би имао $N_{\alpha\beta} = mN_{abc}$ навојака. Фазни напони двофазног еквивалента биће $u_{\alpha\beta} = m\, u_{abc}$. Инваријантност F_S налаже да се у намотајима двофазног еквивалента имају струје $i_{\alpha\beta} = (3/2)\cdot (i_{abc}/m)$. Очување односа напона и струје тражи да u_{abc}/ i_{abc} буде једнако $u_{\alpha\beta}/i_{\alpha\beta}$ тако да је

$$\frac{u_{\alpha\beta}}{i_{\alpha\beta}} = \frac{m\,u_{abc}}{(3/2)(i_{abc}/m)} = \frac{2m^2}{3}\frac{u_{abc}}{i_{abc}} = \frac{u_{abc}}{i_{abc}}$$

$$\Rightarrow \quad m = \sqrt{\frac{3}{2}} \;\Rightarrow\; K_U = K_I = K_\psi = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Дакле, замену трофазне машине двофазном могуће је обавити тако да она има $(3/2)^{0,5}$ пута више навојака. Њени напони, струје и флуксеви могу се добити Кларкином трансформацијом оригиналних величина у *abc* домену, и то тако да се све величине трансформишу на исти начин ($K_U = K_I = K_\Psi$). Спроведена трансформација је инваријантна по импеданси, индуктивности, магнетопобудној сили и снази. Амплитуде флукса у намотајима α и β, амплитуде и ефективне вредности струја и напона су $(3/2)^{0,5}$ пута веће од одговарајућих величина у оригиналном *abc* домену. Присуство ирационалног броја $(3/2)^{0,5}$ у прорачунима је разлог да значајан број аутора избегава Кларкину трансформацију са коефицијентом $K= (2/3)^{0,5}$.

<u>Питање (4.5):</u>

Показати примером да је Кларкина трансформација са $K_U = K_I = K_\Psi = (2/3)^{0,5}$ инваријантна по снази.

Одговор (4.5):

Уз претпоставку да су струје и напони фазних намотаја исте фазе, електрична снага у свакој фази се може одредити као производ ефективних вредности струје и напона. Укупна електрична снага машине се добија као збир снага у свим фазама. Посматрати трофазну машину са ефективним вредностима фазних напона и струја U_{abc} и I_{abc}. Електрична снага трофазне машине једнака је $3U_{abc}I_{abc}$. Применом Кларкине трансформације са водећим коефицијентом $K_U = K_I = K_\Psi = (2/3)^{0,5}$, добијају се струје и напони у $\alpha\beta$ домену са амплитудама које су $(3/2)^{0,5}$ пута веће. Дакле, у фази α постоји снага од $[(3/2)^{0,5}\ U_{abc}]\cdot[(3/2)^{0,5}\ I_{abc}] = 3/2\ U_{abc}I_{abc}$. У фази β постоји иста таква снага, па је укупна снага двофазне машине $3U_{abc}I_{abc}$, чиме је демонстрирана инваријантност по снази.

Питање (4.6):

Показати примером да примена Кларкине трансформације са $K_U = K_I = K_\Psi = 1$ није инваријантна по снази већ је $P_{\alpha\beta} = (3/2)\, P_{abc}$.

Одговор (4.6):

Претпоставити да су напони и струје трофазне машине познати и једнаки u_a, u_b, u_c, i_a, i_b и i_c. Користећи израз (4.22) за трофазно двофазну трансформацију, потребно је добити величине u_α, u_β, i_α и i_β. Сменом израза за фазне величине у оригиналном, abc домену у једначину $P_{ab} = u_\alpha i_\alpha + u_\beta i_\beta$ добија се да је $P_{\alpha\beta} = (3/2)\, P_{abc}$.

4.13.1 Кларкина трансформација са $K = 1$

У случају да је $K_U = K_I = K_\Psi = 1$, тада је

$$N_{\alpha\beta} = N_{abc}\,, \tag{4.25}$$

$$\left|\vec{i}_{\alpha\beta}\right| = \frac{3}{2}\cdot \hat{i}_{abc}\,, \tag{4.26}$$

$$\left|\vec{u}_{\alpha\beta}\right| = \frac{3}{2}\cdot \hat{u}_{abc}\,. \tag{4.27}$$

Трансформација је

- инваријантна по импеданси,
- инваријантна по индуктивности, али
- није инваријантна по снази већ је

$$P_{\alpha\beta} = \frac{3}{2} P_{abc}\,. \tag{4.28}$$

4.13.2 Кларкина трансформација са $K = (2/3)^{0,5}$

$$N_{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{3}{2}} N_{abc}\,, \tag{4.29}$$

$$\left|\vec{i}_{\alpha\beta}\right| = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \hat{i}_{abc}\,, \tag{4.30}$$

$$\left|\vec{u}_{\alpha\beta}\right| = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \hat{u}_{abc}\,. \tag{4.31}$$

Трансформација је

- инваријантна по импеданси,
- инваријантна по индуктивности, али
- инваријантна по снази.

4.13.3 Кларкина трансформација са *K* = 2/3

У случају да је $K_U = K_I = K_\Psi = 2/3$, тада је

$$N_{\alpha\beta} = N_{abc}\,, \tag{4.32}$$

$$\left|\vec{i}_{\alpha\beta}\right| = \frac{3}{2} \cdot \hat{i}_{abc}\,, \tag{4.33}$$

$$\left|\vec{u}_{\alpha\beta}\right| = \frac{3}{2} \cdot \hat{u}_{abc}\,. \tag{4.34}$$

Трансформација је

- инваријантна по импеданси,
- инваријантна по индуктивности, али
- није инваријантна по снази већ је

$$P_{\alpha\beta} = \frac{2}{3} P_{abc}\,. \tag{4.35}$$

4.14 Свођење на двофазни еквивалент

Претходне странице објашњавају потребу за представљањем трофазне машине двофазним еквивалентом, то јест потребу за спровођењем Кларкине 3Ф/2Ф трансформације. Наведене су и неке могућности избора коефицијe-

ната трансформације, као и последице таквих избора. Током даље анализе, усвојен је следећи приступ,

(1) Кларкина 3Ф/2Ф трансформација напона, струја и флуксева се спроводи на једнак начин, коришћењем трансформационе матрице у којој је $K = 2/3$. Ознака V у доњем изразу представља било коју од варијабли, напон, струју или флукс намотаја.

$$\begin{bmatrix} V_\alpha \\ V_\beta \end{bmatrix} = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} \tag{4.36}$$

(2) Као последица, примењена трансформација је инваријантна по импеданси и индуктивности. Дакле, параметри R_S, R_R, L_m, L_S, као и све друге индуктивности и отпорности задржавају своју вредност.

(3) Вршне и ефективне вредности $\alpha\beta$ величина једнаке су вршним и ефективним вредностима abc величина. Вреде једнакости $u_\alpha(t) \equiv u_a(t)$, $i_\alpha(t) \equiv i_a(t)$, $\Psi_\alpha(t) \equiv \Psi_a(t)$.

(4) Није могуће начинити реалан двофазни статорски намотај који би заменио трофазни, обезбедио једнаку магнетопобудну силу статора и имао статорске напоне и струје који одговарају вредностима добијеним трансформацијом. Инваријантност F_S тражи $N_{\alpha\beta} = 3/2N_{abc}$, што би довело до $u_{\alpha\beta} = 3/2\ u_{abc}$, због једнакости електромоторне силе индуковане у једном навојку.

(5) Снага двофазног еквивалента $P_{\alpha\beta} = u_\alpha i_\alpha + u_\beta i_\beta$ једнака је свега 2/3 P_{abc}. Наиме, како фазне величине у $\alpha\beta$ домену имају једнаке ефективне вредности као и одговарајуће величине у оригиналном abc домену, околност да трофазни оригинал има једну фазу више резултује закључком $P_{\alpha\beta} = 2/3\ P_{abc}$. Потребно је запамтити да нумеричку вредност снаге $P_{\alpha\beta}$, израчунату као $P_{\alpha\beta} = u_\alpha i_\alpha + u_\beta i_\beta$, треба помножити коефицијентом 3/2. Дакле,

$$P_{abc} = \frac{3}{2}P_{\alpha\beta} \tag{4.37}$$

4.15 Модел статора

Применом Кларкине трансформације, трофазна машина се може представити двофазном. Осе фазних намотаја α_S и β_S су непомичне у односу на статор, при чему је оса намотаја α_S колинеарна са осом фазног намотаја *a* оригиналне машине. Модел у коме су струје, напони и флукс статора описани одговарајућим α_S и β_S компонентама, односно, пројекцијама релевантних вектора на осе α_S -β_S координатног система, називамо *модел у стационарном координатном систему*.

Слика 4.14: Двофазни еквивалент машине

На слици 4.14 асинхрона машина је представљена двофазним статорским намотајем и двофазним роторским намотајем. Угао θ_m представља положај ротора.

$$\theta_m = \theta_{m0} + \int_0^t \Omega_m \mathrm{d}\tau \tag{4.38}$$

Свођењем трофазног статора на двофазни, модел добија два статорска намотаја, α_S и β_S, који стварају магнетопобудну силу и флукс дуж оса α_S и β_S непомичног координатног система који зовемо *стационарни* или *статорски* координатни систем. Струје и напони ових намотаја се обележавају ознакама $u_{\alpha S}$, $u_{\beta S}$, $i_{\alpha S}$, $i_{\beta S}$, како би се разликовали од роторских величина, које ће имати супскрипт *R*.

Питање (4.7):

Познат је смер, правац и амплитуда вектора F_S магнетопобудне силе статора. Одредити струје $i_{\alpha S}$ и $i_{\beta S}$.

Одговор (4.7):

Тражене струје су одређене пројекцијом вектора F_S на осе α_S и β_S непомичног координатног система.

4.16 Једначине равнотеже напона у намотајима статора

Једначине напонске равнотеже у трофазним намотајима дате су изразима у којима фигуришу фазни напони u_a, u_b, u_b, струје i_a, i_b, i_c, као и укупни флукс фазних намотајима Ψ_a, Ψ_b, и Ψ_b. Флукс Ψ_a има компоненту $L_S i_a$, где је L_S коефицијент сопствене индуктивности статорског намотаја, као и већи број компоненти $L_{ax} i_x$, где је L_{ax} међусобна индуктивност фазног намотаја a и једног од преосталих статорских или роторских намотаја, док је i_x струја у поменутом намотају. Фазни намотаји имају једнак број навојака, једнаку отпорност $R_a = R_b = R_c = R_S$ и једнаке коефицијенте сопствене индуктивности $L_a = L_b = L_c = L_S$.

$$\begin{aligned} u_a &= R_S i_a + \mathrm{d}\psi_a / \mathrm{d}t, \\ u_b &= R_S i_b + \mathrm{d}\psi_b / \mathrm{d}t, \\ u_c &= R_S i_c + \mathrm{d}\psi_c / \mathrm{d}t\,. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Применом трофазно-двофазне (Кларкине) трансформације која користи исту трансформациону матрицу за напоне, струје и флуксеве, једначине напонске равнотеже се могу превести у α_S-β_S координатни систем, тј, исказати коришћењем α_S и β_S пројекција струје, напона и флукса. Величине $\Psi_{\alpha S}$ и $\Psi_{\beta S}$ су пројекције вектора статорског флукса на осе α_S-β_S координатног система, које се могу израчунати применом трофазно двофазне трансформације на укупни флукс фазних намотајима Ψ_a, Ψ_b, и Ψ_b.

$$\begin{aligned} u_{\alpha S} &= R_S i_{\alpha S} + \mathrm{d}\psi_{\alpha S} / \mathrm{d}t\,, \\ u_{\beta S} &= R_S i_{\beta S} + \mathrm{d}\psi_{\beta S} / \mathrm{d}t\,. \end{aligned} \tag{4.40}$$

Поред моделирања статора, потребно је моделирати и кратко спојени роторски кавез. Једначине равнотеже напоне у роторском колу ће комплетирати модел електричног подсистема.

4.17 Моделирање роторског кавеза

Роторски кавез садржи релативно велики број проводника који су кратко спојени чеоним прстеном и прстеном на зачељу. Пример изгледа роторског кавеза који је раздвојен од магнетског кола дат је на слици 4.15 (A). За ротор са N_R = 28 проводника, могуће је уочити 14 кратко спојених навојака, од којих је сваки створен спајањем дијаметрално супротно постављених проводника. Дакле, могуће је начинити модел ротора који садржи 14 кратко спојених навојака који су магнетски спрегнути међусобно као и са намотајима α_S и β_S статора, што је приказано у делу (B) слике 4.15. Међутим, овакав модел не би био прегледан, па не налази примену.

Слика 4.15: Моделирање роторског кавеза.

Роторске проводнике можемо посматрати и као скуп навојака где проводници који чине сваки навојак нису постављени дијаметрално супротно, већ стоје симетрично у односу на вертикалну осу, као на слици 4.15 (C). Груписањем роторских проводника у скуп навојака на начин који је сугерисан на слици, као и претпоставком да нема везе међу навојцима, струје ротора би могле стварати флукс у вертикалној, али не и у хоризонталној оси. Описани приступ превиђа околност да чеони прстен и прстен на зачељу доводе у кратак спој све роторске проводнике. Следећи мисаони експеримент показује да би тако начињен модел био неодговарајући. Претпоставити да статорски флукс пулсира у вертикалном правцу. Промена флукса у кратко спојеном навојку ротора, приказаном на слици десно, индукује електромоторну силу и струју ротора. Дакле, приказани намотај адекватно моделује кратко спајајући ефекат роторског кавеза, то јест на-

стојање ротора да индукованом струјом спречи промену флукса. Међутим, код пулсација статорског флукса у хоризонталном правцу, у ротору нема индукованих електромоторних сила нити струја, јер нема ни промене флукса у вертикално оријентисаном роторском намотају. Дакле, модел у коме ротор има само један кратко спојени намотај не представља адекватно електромагнетске појаве у кратко спојеном роторском кавезу.

Слика 4.16: Трофазни и двофазни еквивалент роторског кавеза.

Кратко спајајући ефекат роторског кавеза манифестује је у произвољном правцу. Дакле, промена вектора флукса произвољне оријентације ће проузроковати индуковање електромоторне силе и струје у ротору на једнак начин, услед симетрије роторског кавеза. Стога се кавез може моделирати као трофазни систем намотаја, са фазама које су кратко спојене и померене за $2\pi/3$, што је показано на слици 4.16 (A). Могуће је моделирати ротор и као двофазни, кратко спојени намотај, како је приказано на слици 4.16 (B). Приказан је двофазни, кратко спојени ротор. Промене флукса произвољне оријентације могу се разложити на две ортогоналне компоненте које леже у осама два фазна намотаја. Пошто су параметри као што су отпорности и индуктивности фазних намотаја једнаки, кратко спајајући ефекат ротора ће деловати једнако на сваку од компоненти. Као последица, реакција ротора, то јест индуковане електромоторне силе и струје неће зависити од правца у коме пулсира флукс. Зато је двофазна представа кратко спојеног ротора је у свему адекватна замена кратко спојеног кавеза са већим бројем проводника.

Током рада, ротор се креће у односу на статор и може заузети произвољан положај θ_m. Зато осе двофазног роторског намотаја мењају свој релативни положај у односу на статор. На слици 4.14, осе су означене са α_R и β_R. Напони кратко спојених фаза које моделују роторски намотај једнаки су нули, то јест $u_{\alpha R} = u_{\beta R} = 0$. Струје $i_{\alpha R}$ и $i_{\beta R}$ у двофазној представи роторског кавеза стварају магнетопобудну силу ротора F_R, чија амплитуда и оријентација зависи од струја $i_{\alpha R}$ и $i_{\beta R}$, као и од положаја ротора θ_m. За случај да је $i_{\alpha R} > 0$ а $i_{\beta R} = 0$, вектор F_R лежи на оси α_R. Ако је дат вектор F_R, струје двофазног модела роторског кавеза могу се одредити из пројекција тог вектора на осе α_R и β_R ротора. Коефицијент пропорционалности између струја и вектора магнетопобудне силе је одређен бројем навојака који постоји у двофазном моделу роторског кавеза. Приметити да се кратко спајајући ефекат роторског кавеза може моделирати двофазним еквивалентом који има већи број навојака са проводницима мањег попречног пресека, али и са мањим бројем навојака са проводницима већег пресека, па и са $N_R = 1$. Оригинални кавез, добијен ливењем алуминијума, у жлебовима магнетског кола има по један проводник, то јест један роторски штап.

4.18 Једначине равнотеже напона у намотају ротора

Двофазна представа статорског и роторског намотаја омогућује да се електрични део, то јест електрични подсистем асинхроне машине представи системом од четири спрегнута, међусобно покретна намотаја. За сваки намотај вреди једначина равнотеже напона $u = Ri + \mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t$, где ознаке u, R, i, и Ψ означавају напон на крајевима намотаја, отпорност намотаја, струју у проводницима и укупни флукс, респективно. Роторски намотај је кратко спојен, тако да једначине равнотеже напона узимају облик

$$
\begin{aligned}
u_{\alpha s} &= R_s i_{\alpha s} + \frac{\mathrm{d}\Psi_{\alpha s}}{\mathrm{d}t}, \\
u_{\beta s} &= R_s i_{\beta s} + \frac{\mathrm{d}\Psi_{\beta s}}{\mathrm{d}t}, \\
0 &= R_R i_{\alpha R} + \frac{\mathrm{d}\Psi_{\alpha R}}{\mathrm{d}t}, \\
0 &= R_R i_{\beta R} + \frac{\mathrm{d}\Psi_{\beta R}}{\mathrm{d}t}.
\end{aligned}
\tag{4.41}
$$

4.19 Матрица индуктивности

Електрични подсистем асинхроне машине описују 4 диференцијалне једначине напонске равнотеже у којима фигуришу 4 струје и 4 флукса. Међу њима постоје свега 4 променљиве стања. Наиме, уколико се струје $i_{\alpha S}$, $i_{\beta S}$, $i_{\alpha R}$ и $i_{\beta R}$ узму за променљиве стања, тада се 4 флукса, $\Psi_{\alpha S}$, $\Psi_{\beta S}$, $\Psi_{\alpha R}$ и $\Psi_{\beta R}$ могу изразити као линеарна комбинација струја. Веза флуксева и струја дефинисана је матрицом индуктивности, датом у изразу (4.42). На главној дијагонали матрице индуктивности стоје коефицијенти сопствене индуктивности намотаја. Коефицијент $L_{11} = L_S$ је сопствена индуктивност статорског намотаја α_S. Коришћењем магнетске отпорности R_μ у колу статорског флукса и броја навојака N_S који је једнак у свакој од фаза статора, сопствена индуктивност статора се може одредити из једнакости $L_{11} = L_{22} = L_S = N_S{}^2/R_\mu$. Коефицијенти $L_{33} = L_{44}$ су сопствене индуктивности роторских фаза α_R и β_R. Линије поља ротора пролазе кроз исти ваздушни зазор као и статорске, па се магнетска отпорност у колу роторског флукса може се сматрати приближно једнакој отпорности који постоји у колу статорског флукса. Разлика у поменутим отпорностима може постојати услед флукса расипања статорског и роторског намотаја.

$$\begin{bmatrix} \Psi_{\alpha s} \\ \Psi_{\beta s} \\ \Psi_{\alpha R} \\ \Psi_{\beta R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & L_m \cos\theta_m & -L_m \sin\theta_m \\ 0 & L_{22} & L_m \sin\theta_m & L_m \cos\theta_m \\ L_m \cos\theta_m & L_m \sin\theta_m & L_{33} & 0 \\ -L_m \sin\theta_m & L_m \cos\theta_m & 0 & L_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{\alpha s} \\ i_{\beta s} \\ i_{\alpha R} \\ i_{\beta R} \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

4.20 Флукс расипања и међусобни флукс

Ако се ротор налази у положају када се осе једног од намотаја статора и једног од намотаја ротора поклапају, тада је њихова међусобна индуктивност највећа. Слика 4.17 дефинише међусобни флукс и флукс расипања.

$$\Phi_S = \Phi_{\gamma S} + \Phi_m, \quad (4.43)$$

$$\Phi_R = \Phi_{\gamma R} + \Phi_m.$$

Међусобни флукс има компоненту која је последица струје статора (Φ^S) и компоненту која је последица струја ротора (Φ^R) и дат је изразом

$$\Phi_m = \Phi_m^S + \Phi_m^R . \tag{4.44}$$

Флуксеви намотаја зависе од броја навојака и једнаки су

$$\begin{aligned} \psi_S &= N_S\Phi_S = N_S\Phi_m + N_S\Phi_{\gamma S} = N_S\Phi_m + \psi_{\gamma S}, \\ \psi_R &= N_R\Phi_R = N_R\Phi_m + N_R\Phi_{\gamma R} = N_R\Phi_m + \psi_{\gamma R}. \end{aligned} \tag{4.45}$$

Слика 4.17: Међусобни флукс и флукс расипања.

Флукс $\Psi_{\gamma S}$ је *флукс расипања* статорског намотаја, док је $\Psi_{\gamma R}$ флукс расипања роторског намотаја. Флукс расипања у сваком од намотаја је пропорционалан јачини струје. Коефицијент пропорционалности је *индуктивност расипања* намотаја, или расипна индуктивност. За намотаје дате на слици 4.17, индуктивности расипања су дате изразом

$$L_{\gamma S} = \frac{\psi_{\gamma S}}{i_S}, \;\; L_{\gamma R} = \frac{\psi_{\gamma R}}{i_R} . \tag{4.46}$$

Међусобна индуктивност два наспрамна намотаја асинхроне машине је

$$L_m = L_{SR} = \frac{N_S\Phi_m^R}{i_R} = L_{RS} = \frac{N_R\Phi_m^S}{i_S} . \tag{4.47}$$

Сопствена индуктивност намотаја је количник флукса у намотају који је последица струје самог намотаја. Тај флукс је једним делом међусобни, док је остатак расути флукс. Сопствене индуктивности статора и ротора су

$$L_S = \frac{N_S \Phi_m^S + N_S \Phi_{\gamma S}}{i_S} = \frac{N_S \Phi_m^S + \psi_{\gamma S}}{i_S} = \frac{N_S}{N_R} L_{RS} + L_{\gamma S} = \frac{N_S}{N_R} L_m + L_{\gamma S}, \tag{4.48}$$

$$L_R = \frac{N_R \Phi_m^R + N_R \Phi_{\gamma R}}{i_R} = \frac{N_R \Phi_m^R + \psi_{\gamma R}}{i_R} = \frac{N_R}{N_S} L_{SR} + L_{\gamma R} = \frac{N_R}{N_S} L_m + L_{\gamma R}.$$

Дакле, индуктивност расипања је један део сопствене индуктивности намотаја. Индуктивност расипања је већа у случају где је магнетска спрега спрегнутих намотаја мања. У случају када су бројеви навојака статора и ротора једнаки, као и у случају када се роторске величине своде на статорску страну, претходна једначина узима следећи облик

$$L_S = L_m + L_{\gamma S}, \tag{4.49}$$

$$L_R = L_m + L_{\gamma R}.$$

4.21 Спрега статора и ротора

Расипни флукс статора и расипни флукс ротора постоје у различитим магнетским колима, па се може јавити разлика у магнетској отпорности за статорско и роторско расипање.

Статорски флукс већим делом обухвата и роторске намотаје, али постоје и линије поља које обухватају статорске проводнике тако да не пролазе кроз ваздушни зазор и не обухватају проводнике ротора. Такве линије поља припадају расипном флуксу статора. Расипни флукс статора је мањи део флукса $\Phi_S = (L_S i_S)/N_S$ који не обухвата роторске проводнике. На једнак начин је дефинисан и расипни флукс ротора. Различит облик жлебова статора и ротора, као и разлике у облику и попречном пресеку проводника могу довести до разлика у магнетској отпорности статорског и роторског расипног флукса.

Резултантна магнетска отпорност у магнетском колу флукса статора, који садржи међусобни и расипни флукс зависи од магнетске отпорности са којим се сусрећу обе поменуте компоненте. Једнак закључак се може извести за ротор, чиме је показано да међу резултантним магнетским отпорностима за намотаје статора и ротора могу постојати мале разлике, чији узрок треба тражити у другачијој расподели расипних флуксева поме-

нутих намотаја. У случају када је расипање статора и ротора мало, доминантан је утицај магнетске отпорности на путу међусобног флукса, који пролази кроз ваздушни зазор, те се поменуте разлике у магнетској отпорности могу занемарити.

При конструкцији машина, снага претварања и створени моменат зависе од магнетске спреге статора и ротора, па се тежи да расипање буде што је год могуће мање. У идеалном случају, коефицијент магнетске спреге статора и ротора $k = L_m/(L_S L_R)^{0,5}$ достигао би вредност 1. Тада би расипни флукс, пропорционалан разлици (1-k), био једнак нули, као и коефицијенти расипне индуктивности $L_{\gamma S}$ и $L_{\gamma R}$. Машине се не могу конструисати тако да је коефицијент спреге једнак 1, стога што статор и ротор морају бити раздвојени зазором из механичких и електричних разлога. Код машина које су начињене за рад са вишим напонима, изолација појединих проводника и намотаја мора издржати већа напонска напрезања. Стога су слојеви изолационог материјала дебљи, као и растојање између појединих проводника, чиме је проширен простор у коме се јавља расипни флукс. Оријентационе вредности коефицијента спреге за електричне машине ниског напона (400 V, 50 Hz) су $k \in [0,9 .. 0,998]$, док се код машина начињених за рад са вишим напонима могу имати значајно мање вредности коефицијента спреге ($k < 0,8$).

4.22 Елементи матрице индуктивности

Уколико се занемаре разлике у магнетској отпорности за статорски и роторски флукс, однос L_S/L_R зависиће од квадрата броја навојака, $L_{11} = L_{22} = L_S = N_S^2/R_\mu$, $L_{33} = L_{44} = L_R = N_R^2/R_\mu$. Изван главне дијагонале, у матрици индуктивности стоје коефицијенти међусобне индуктивности. Међусобна индуктивност L_{jk} одређена је количником флукса који у контури k ствара струја намотаја j и јачине струје i_j. Спрега два намотаја је реципрочна, $L_{jk} = L_{kj}$, тако да је матрица индуктивности симетрична ($L = L^T$). Међусобна индуктивност ортогоналних намотаја је једнака нули, тако да је $L_{12}=L_{21}=L_{34}=L_{43}=0$. Коефицијент L_{13} матрице представља међусобну индуктивност намотаја α_S и α_R. Релативни положај посматраних намотаја се мења. Када је угао $\theta_m = 0$, намотаји се налазе један наспрам другог, осе им се поклапају, и тада струја у једном од намотаја даје највећу промену флукса у другом намотају. У случају да је $\theta_m = \pi/2$, посматрани намотаји су ортогонални, па је тада $L_{13}= 0$. У положају $\theta_m = \pi$, позитивна струја у једном даје негативан флукс другог намотаја, те је $L_{13} < 0$. Промена коефицијента L_{13} се може описати функцијом $L_{13}(\theta_m) = L_m \cos(\theta_m)$, где је $L_m = k\,(L_S L_R)^{0,5}$ највећа вредност која постоји у положају $\theta_m = 0$. На сличан начин се одре-

ђују и преостали коефицијенти матрице индуктивности. Потребно је уочити да је матрица нестационарна, то јест она је функција угла $\theta_m = \Omega_m t$, тако да постоји њен извод dL/dt различит од нуле, па и услов за развијање момента $M_{em} = ½\, i^T\, (\mathrm{d}L/\mathrm{d}\theta_m) i$.

$$\begin{bmatrix} \Psi_{\alpha s} \\ \Psi_{\beta s} \\ \Psi_{\alpha R} \\ \Psi_{\beta R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & 0 & L_m \cos\theta_m & -L_m \sin\theta_m \\ 0 & L_s & L_m \sin\theta_m & L_m \cos\theta_m \\ L_m \cos\theta_m & L_m \sin\theta_m & L_R & 0 \\ -L_m \sin\theta_m & L_m \cos\theta_m & 0 & L_R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{\alpha s} \\ i_{\beta s} \\ i_{\alpha R} \\ i_{\beta R} \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

4.23 Свођење роторских величина на страну статора

Једначине равнотеже напона за роторске намотаје, дате на претходној страни, садрже струје $i_{\alpha R}$ и $i_{\beta R}$. Ове величине није могуће директно мерити. Не ради се о струјама које постоје у конкретним роторским штаповима, већ се ради о струјама у замишљеном двофазном еквиваленту којим је замењен кавез. Кратко спајајући ефекат кавеза може се моделирати двофазним еквивалентом који има већи број навојака и проводнике мањег попречног пресека, или мањи број навојака са већим пресеком. Дакле, број навојака кратко спојеног двофазног еквивалента ротора се може произвољно бирати. Наведена тврдња се може поткрепити следећом дискусијом.

Магнетопобудна сила коју стварају струје у једном од роторских жлебова, то јест интеграл магнетског поља по затвореној контури која обухвата жлеб, једнака је збиру струја у свим проводницима који су смештени у посматрани жлеб. Када у жлебу постоји само један проводник са струјом од 100 А, магнетопобудна сила коју стварају струје у жлебу је 100 А. Уколико би у жлеб било смештено 100 проводника у којима је струја једнака 1 А, предметна магнетопобудна сила би задржала једнаку вредност. Дакле, ротор се може еквивалентирати двофазним системом намотаја са произвољним бројем завојака, све док је производ роторске струје и броја завојака (Ni) једнак ономе које ствара оригинални кратко спојени кавез.

Слобода у избору броја навојака двофазног роторског еквивалента се најчешће користи тако што се узима да ротор има једнак број навојака као и статор, то јест $N_R = N_S$, што за последицу има да је $L_S = N_S^2/R_\mu = N_R^2/R_\mu = L_R$, док је $L_m = k\,(L_S L_R)^{0,5} = kL_S = kL_R$, док су индуктивности расипања статора и ротора једнаке индуктивности $L_{\gamma S} = L_S - L_m = (1\text{-}k)L_S = (1\text{-}k)L_R = L_{\gamma R}$. Добијени изрази се заснивају на претпоставци да су разлике у магнетским

отпорностима на путу статорског и роторског флукса занемариве. Претпоставка је валидна у највећем броју случајева.

Матрица индуктивности омогућује да се сваки од 4 флукса изрази у функцији струја. Тако је флукс α намотаја статора једнак

$$\psi_{\alpha s} = L_s i_{\alpha s} + L_m \cos\theta_m \, i_{\alpha R} - L_m \sin\theta_m i_{\beta R} \tag{4.51}$$

<u>Питање (4.8):</u>

У асинхроној машини са струјама статора $i_{\alpha S} = I_{mS} \cos\omega_S t$, $i_{\beta S} = I_{mS} \sin\omega_S t$, где је $\omega_S > 0$, у ротору постоје струје $i_{\alpha R} = I_{mR} \sin\omega_x t$ и $i_{\beta R} = I_{mR} \cos\omega_x t$ чија је учестаност $0 < \omega_x << \omega_S$. Машина ради у устаљеном стању. Коришћењем израза за флукс $\Psi_{\alpha S}$, одредити брзину обртања ротора.

Одговор (4.8):

Струје $i_{\alpha S}$ и $i_{\beta S}$ дају магнетопобудну силу и флукс статора које се обрћу у позитивном смеру. Фазни редослед струја ротора је такав да се магнетско поље које оне стварају обрће брзином $\omega_x = \Omega_x$ у негативном смеру у односу на ротор. Пошто се статорско и роторско поље обрћу синхроно, закључујемо да је $\omega_m = \omega_x + \omega_S$. Исти закључак се може добити из израза за флукс, $\Psi_{\alpha S} = L_S I_{mS} \cos\omega_S t + L_m I_{mR}(\cos\omega_m t \sin\omega_x t - \sin\omega_m t \cos\omega_x t) = L_S I_{mS} \cos\omega_S t - L_m I_{mR} \sin(\omega_m t - \omega_x t)$. Сабирци морају бити једнаке учестаности, стога што се у устаљеном стању, статорске и роторске величине обрћу једнаком брзином ω_S, не мењајући при томе свој релативни положај. Постављени услов је задовољен у случајевима $\omega_m - \omega_x = +\omega_S$ као и $\omega_m - \omega_x = -\omega_S$, односно за брзине обртања $\omega_m = \omega_x + \omega_S$ или $\omega_m = -\omega_S + \omega_x$. Према условима задатка, $0 < \omega_x << \omega_S$, тако да је решење $\omega_m = \omega_x + \omega_S$. У посматраном решењу, клизање $\omega_k = \omega_S - \omega_m = -\omega_x$ је негативно. ротор се обрће брже од поља. Машина ради у генераторском режиму рада.

<u>Питање (4.9):</u>

Полазећи од матрице индуктивности за систем намотаја α_S, β_S, α_R, и β_R, показати да је моменат једнак $M_{em} = (3/2)\,(\Psi_{\alpha S}\, i_{\beta S} - \Psi_{\beta S}\, i_{\alpha S})$.

Одговор (4.9):

Електромагнетски моменат је дат изразом $M_{em} = ½\, i^T[\mathrm{d}L(\theta_m)/\mathrm{d}\theta_m]\, i$, где је $L(\theta_m)$ матрица индуктивности, чији елементи зависе од помераја ротора у односу на статор θ_m. Променљиви чланови матрице индуктивности су $L_{13}=L_{31}$, $L_{14}=L_{41}$, $L_{23}=L_{32}$, и $L_{24}=L_{42}$, док преостали коефицијенти дају $\mathrm{d}L_{jк}/\mathrm{d}\theta_m = 0$. Прорачун се може скратити стога што је $L^T = L$, тако да је резултат могуће добити удвостручавањем доприноса који дају коефицијенти L_{13}, L_{14}, L_{23}, и L_{24}. Коначно, добија се да је $½\, i^T[\mathrm{d}L(\theta_m)/\mathrm{d}\theta_m]i = -L_m \sin\theta_m\, i_{\alpha S}\, i_{\alpha R} - L_m \cos(\theta_m) i_{\alpha S}\, i_{\beta R} + L_m \cos(\theta_m) i_{\alpha R}\, i_{\beta S} - L_m \sin(\theta_m) i_{\beta R}\, i_{\beta S}$. Исти резултат се добија

полазећи од израза ($\Psi_{\alpha S}\, i_{\beta S}$ - $\Psi_{\beta S}\, i_{\alpha S}$), уводећи смену у којој се на место флуксева уводе изрази добијени из прве и друге врсте (реда) матрице индуктивности. У изразу M_{em} = (3/2) ($\Psi_{\alpha S}\, i_{\beta S}$ - $\Psi_{\beta S}\, i_{\alpha S}$), коефицијент 3/2 је последица усвајања 3Ф/2Ф (Кларкине) трансформације у којој је $K_U = K_I = K_\Psi = 2/3$.

4.24 Једначине модела

У даљем разматрању, дефинише се математички модел асинхроне машине у коме се користе координате α_S, β_S, α_R, и β_R.

Једначине напонске равнотеже и матрица индуктивности су дате на претходним страницама. Уз додатак Њутнове једначине и израза за моменат M_{em}= (3/2)($\Psi_{\alpha S}\, i_{\beta S}$ - $\Psi_{\beta S}\, i_{\alpha S}$), оне представљају комплетан математички модел асинхроне машине. Скуп диференцијалних једначина и израза који чине модел могу се унети у један од програма за рачунарску симулацију динамичких система, чиме се омогућује анализа и предвиђање динамичког понашања и особина у устаљеном стању. Одступања могу настати у специфичним случајевима где није оправдано увести нека од 4 занемарења која су у моделирању начињена. Занемарења су дата у поглављу о електромеханичком претварању енергије.

У моделу постоје α_S и β_S компоненте статорског напона, струје и флукса, као и α_R и β_R компоненте роторских величина. Показано је како се, уз услов да је број навојака двофазног еквивалента $N_{\alpha\beta}$ = $(3/2)^{0,5}$ N_{abc}, може начинити двофазна асинхрона машина једнаког флукса, момента, магнетопобудне силе и снаге као и оригинална, трофазна машина са веверичијим кавезом. Избор броја навојака двофазног еквивалента и коефицијента трансформације може бити другачији, али струје $i_{\alpha S}$, $i_{\beta S}$, $i_{\alpha R}$, и $i_{\beta R}$, као и саме намотаје α_S, β_S, α_R и β_R треба посматрати и третирати као реалне, то јест намотаје који заиста постоје у жлебовима машине.

Компоненте напона, струје и флукса које постоје у моделу су пројекције релевантних вектора напона, струје и флукса на осе координатних система α_S -β_S и α_R -β_R. Статорски вектори се пројектују на осе α_S -β_S док се роторски вектори пројектују на осе α_R -β_R.

Комплетан модел је дат једначинама (4.52), (4.53), (4.54) и (4.54).

$$u_{\alpha s} = R_s i_{\alpha s} + \frac{\mathrm{d}\Psi_{\alpha s}}{\mathrm{d}t},\ u_{\beta s} = R_s i_{\beta s} + \frac{\mathrm{d}\Psi_{\beta s}}{\mathrm{d}t},$$
$$0 = R_R i_{\alpha R} + \frac{\mathrm{d}\Psi_{\alpha R}}{\mathrm{d}t},\ 0 = R_R i_{\beta R} + \frac{\mathrm{d}\Psi_{\beta R}}{\mathrm{d}t}. \tag{4.52}$$

$$\begin{bmatrix} \Psi_{\alpha s} \\ \Psi_{\beta s} \\ \Psi_{\alpha R} \\ \Psi_{\beta R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & 0 & L_m \cos\theta_m & -L_m \sin\theta_m \\ 0 & L_s & L_m \sin\theta_m & L_m \cos\theta_m \\ L_m \cos\theta_m & L_m \sin\theta_m & L_R & 0 \\ -L_m \sin\theta_m & L_m \cos\theta_m & 0 & L_R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{\alpha s} \\ i_{\beta s} \\ i_{\alpha R} \\ i_{\beta R} \end{bmatrix} \tag{4.53}$$

$$\begin{bmatrix} \Psi_{\alpha s} \\ \Psi_{\beta s} \\ \Psi_{\alpha R} \\ \Psi_{\beta R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & 0 & L_m \cos\theta_m & -L_m \sin\theta_m \\ 0 & L_s & L_m \sin\theta_m & L_m \cos\theta_m \\ L_m \cos\theta_m & L_m \sin\theta_m & L_R & 0 \\ -L_m \sin\theta_m & L_m \cos\theta_m & 0 & L_R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{\alpha s} \\ i_{\beta s} \\ i_{\alpha R} \\ i_{\beta R} \end{bmatrix} \tag{4.54}$$

$$M_{em} = \frac{3}{2} p \left(\psi_{\alpha S} i_{\beta S} - \psi_{\beta S} i_{\alpha S} \right) \tag{4.55}$$

4.25 Недостаци модела

Иако добијени модел адекватно описује динамичко понашање и устаљено стање асинхроних машина, он није подобан за даљи рад. Наиме, коришћење добијеног модела код анализе устаљених стања, добијања заменских шема и пројектовање алгоритама за управљање машином праћени су потешкоћама. Кључни недостаци модела су (i) присуство тригонометријских функција у диференцијалним једначинама као и (ii) околност да променљиве величине модела, као што су флукс и струје, у устаљеном стању нису константне, већ имају простопериодичну промену. Ефекти наведених особина модела на његову прегледност и употребљивост ће бити детаљније описани. Коначно, биће наговештени кораци које треба предузети у циљу добијања прегледнијег, интуитивнијег модела.

Сменом израза за флукс у једначине равнотеже напона у намотајима статора добијају се следећи изрази

$$u_{\alpha s} = R_s i_{\alpha s} + L_s \frac{\mathrm{d}i_{\alpha s}}{\mathrm{d}t} + L_m \cos\theta_m \frac{\mathrm{d}i_{\alpha R}}{\mathrm{d}t} - \omega_m L_m \sin\theta_m i_{\alpha R} -$$
$$- L_m \sin\theta_m \frac{\mathrm{d}i_{\beta R}}{\mathrm{d}t} - \omega_m L_m \cos\theta_m i_{\beta R}$$

$$u_{\beta s} = R_s i_{\beta s} + L_s \frac{\mathrm{d}i_{\beta s}}{\mathrm{d}t} + L_m \sin\theta_m \frac{\mathrm{d}i_{\alpha R}}{\mathrm{d}t} + \omega_m L_m \cos\theta_m i_{\alpha R} +$$
$$+ L_m \cos\theta_m \frac{\mathrm{d}i_{\beta R}}{\mathrm{d}t} - \omega_m L_m \sin\theta_m i_{\beta R}$$

Присуство тригонометријских функција у диференцијалним једначинама отежава формирање заменске шеме за устаљена стања. Уколико би из једначине напонске равнотеже уклонили факторе са тригонометријским функцијама, једначина би узела облик

$$u_{\alpha S} = R_S i_{\alpha S} + L_S \frac{\mathrm{d}i_{\alpha S}}{\mathrm{d}t} + L_m \frac{\mathrm{d}i_{\alpha R}}{\mathrm{d}t}.$$

Веза комплексних ликова напона и струје имала би облик

$$U_{\alpha S}(s) = R_S I_{\alpha S}(s) + sL_S I_{\alpha S}(s) + sL_m I_{\alpha R}(s).$$

У случају да се ради о устаљеном стању, оператор s узима облик $\mathrm{j}\omega$, тако да се добија израз

$$U_{\alpha S}(s) = R_S I_{\alpha S}(s) + \mathrm{j}\omega L_S I_{\alpha S}(s) + \mathrm{j}\omega L_m I_{\alpha R}(s),$$

који представља једначину равнотеже напона у контури која садржи напонски извор $U_{\alpha S}$, отпорност R_S и индуктивност (L_S - L_m) са струјом $I_{\alpha S}$, као и индуктивност L_m у којој постоји струја ($I_{\alpha R}$+ $I_{\alpha S}$). Дакле, за систем диференцијалних једначина равнотеже напона у којима су коефицијенти константни, постоји могућност да се изведе еквивалентно електрично коло за устаљена стања. Присуство тригонометријских функција ово онемогућава.

Простопериодична промена величина модела у устаљеном стању доводи до потешкоћа у анализи устаљених стања и регулисању струје, флукса и момента асинхроних машина. Математичке моделе најчешће конципирамо тако да у мировању, то јест у устаљеном стању променљиве стања узимају константну вредност па су њихови изводи тада једнаки нули. Једначине које описују рад у устаљеном стању тада се могу добити из диференцијалних једначина модела, изједначавањем извода са нулом.

Промена величина у моделу током устаљених стања отежава проблем управљања. У применама електричних мотора за управљање кретањем ин-

дустријских робота и покретање возила, потребно је *регулисати* релевантне величине мотора, међу којима су флукс, моменат, брзина обртања и струја.

Термин *регулација* подразумева

(i) Дефинисање жељене, *референтне* вредности коју управљана променљива (на пример, струја) треба да узме,

(ii) Мерење управљане променљиве (струје) и одређивање *грешке регулације*, то јест одступања управљане величине од жељене вредности,

(iii) Спровођење *алгоритма управљања*, то јест рачунске процедуре или формуле која за улазни податак има грешку у регулацији, и која израчунава *управљање*, то јест управљачку променљиву, чије промене могу деловати на управљану променљиву. Управљачка променљива се одређује тако да умањује утврђену грешку у регулацији. Коректно начињен управљачки алгоритам осигурава прогресивно смањење грешке која, по истеку довољно дугог интервала времена, достиже нулту вредност,

(iv) Довођење управљачке променљиве на управљани систем коришћењем *извршног органа* или *актуатора*. Управљање се најчешће примењује коришћењем дигиталних сигналних процесора, у којима се управљачка променљива добија као бинарно кодирана бројна вредност, записана у једном од регистара процесора. С друге стране, управљачка променљива може бити напон на статорском или роторском намотају машине, који треба да варира у опсегу +/- 600 V. Извршни орган може бити прекидачки транзисторски извор који ће добијати команде t_{ON} у складу са дигиталним записом управљачке променљиве. (детаљније информације о проблемима дигиталног управљања могу се добити у склопу предмета ДПП1 и ДПП2)

У случају да се референтне вредности управљаних величина не мењају, могуће је постићи да грешка регулације буде једнака нули у свим устаљеним стањима. Један од начина да се ово постигне је коришћење интегралног управљачког дејства у склопу регулатора, то јест коришћење регулатора у коме је управљање пропорционално интегралу грешке.

У случајевима када се *референтна вредност* мења чак и у устаљеном стању, свако настојање да *управљана* променљива прати њене промене праћено је *грешком регулације* која може имати значајну вредност и тако угрозити рад система.

У случају када је потребно регулисати статорску струју асинхроне машине, управљана величина (то јест статорска струја) се мења чак и у устаљеном стању. Наиме, клизање асинхроне машине је најчешће врло мало, па је учестаност статорских струја ω_S одређена брзином обртања ротора. При великим брзинама, промене статорских струја могу бити врло велике.

Питање (4.10):

Постоји ли режим рада асинхроне машине у коме је учестаност статорских струја једнака нули?

Одговор (4.10):

Учестаност статорских струја одређена је учестаношћу напона који се доводи на статорски намотај. Уколико се асинхрона машина прикључи на градску мрежу, фреквенције статорских струја биће f_S = 50 Hz, без обзира на брзину обртања ротора и развијени моменат. Дакле, могућност да се у статору имају струје чија је учестаност различита од мрежне постоји једино у случају да се машина напаја из прекидачког извора са ширинском модулацијом, то јест трофазног транзисторског инвертора, који на прикључке статора може довести симетричан трофазни систем напона променљиве амплитуде и учестаности. У даљој дискусији, сматра се да је учестаност напајања ω_S променљива, као и да се може подесити тако да одговара жељеном радном режиму. У сваком посматраном режиму вреди релација $\omega_S = \Omega_m + \omega_k$, где је Ω_m брзина обртања ротора док је ω_k учестаност клизања. Режим рада у коме у статорским проводницима постоји једносмерна струја, то јест $\omega_S = 0$, могућ је ако је $\Omega_m = -\omega_k$. Потребно је уочити да је учестаност клизања пропорционална развијеном електромагнетском моменту. Дакле, режим рада са $\omega_S = 0$ достиже се онда када су моменат и брзина обртања супротног знака, при чему се ротор обрће брзином која је једнаке амплитуде као и учестаност клизања, али има супротан знак. Један од примера је случај када је мотор заустављен и при томе развија моменат M_{em} = 0. Други пример може бити мотор чија је номинална фреквенција напајања f_S = 50 Hz, номинална брзина обртања 2700 o/min, и који развија позитиван моменат у номиналном износу обрћући се при томе брзином од 300 o/min.

4.26 Модел машине у синхроном координатном систему

Проблеми у моделирању и управљању заснованом на α–β математичком моделу машине настају због тога што су променљиве стања, то јест пројекције вектора струје и флукса на осе α–β координатног система, простопериодичне функције времена чак и у устаљеном стању, при константној

амплитуди магнетопобудне силе F_S, константној амплитуди флукса и непромењивој брзини обртања. Недостатак модела се може отклонити применом одговарајуће трансформације координата стања, замене постојећих промењљивих стања новим. Нове промењљиве треба одабрати тако да им се вредност у устаљеном стању не мења. При томе, мора постојати једнозначна веза између старог и новог сета промењљивих. Трансформацију координата стања треба начинити тако да се очува инваријантност по импеданси, индуктивности и снази. Другим речима, на струје, напоне и флуксеве треба применити исту трансформациону матрицу. Поставља се питање начина на који се може доћи до трансформационе матрице.

4.27 Паркова обртна трансформација

У моделу машине формулисаном у стационарном α–β координатном систему, струје статора $i_{\alpha S}$ и $i_{\beta S}$ су пројекције вектора магнетопобудне силе статора $F_S = N_S i_S$ на осе α_S–β_S координатног система. Дискутовани проблем огледа се у томе што је F_S обртни вектор, тако да су његове пројекције $i_{\alpha S}$ и $i_{\beta S}$ простопериодичне функције. Избором новог координатног система, који се обрће једнаком брзином као и вектор магнетопобудне силе F_S, пројекције овог вектора на осе новог координатног система ће бити константне у устаљеним стањима. Исти закључак се може извести за векторе напона и флукса. Дакле, нова трансформација координата стања треба да формулише модел асинхроне машине у правоуглом координатном систему који ротора синхроно са обртним пољем.

Усвајањем синхроно ротирајућег координатног система са осама d и q, пројекције i_d и i_q вектора статорске струје $i_S = F_S/N_S$ на осе имају вредност која се у устаљеном стању не мења. Дакле, трансформацијом статорских величина из стационарног α_S-β_S координатног система у синхроно ротирајући d-q координатни систем, добија се модел статора у коме ће релевантне промењљиве имати константну вредност у устаљеном стању.

Под *трансформацијом* се подразумева релација која повезује величине d-q система (i_d и i_q) са величинама α_S-β_S координатног система ($i_{\alpha S}$ и $i_{\beta S}$). Трансформација не мења посматрани систем (асинхрону машину), нити утиче на њен флукс и моменат. Трансформације представља *другачији угао гледања* на посматрани систем, при чему промена угла гледања не сме имати никаквог ефекта на објекат који се посматра. Дакле, било да је математички модел машине записан у стационарном или синхроно ротирајућем координатном систему, он мора указивати на један те исти вектор магнетопобудне силе, флукса, напона, струје, као и исти моменат, брзину и снагу претварања. Према томе, трансформација се може применити под

условом да вектор магнетопобудне силе F_S буде инваријантан. Другим речима, вектор F_S који стварају струје $i_{\alpha S}$ и $i_{\beta S}$ мора бити у свему једнак вектору F_S које би стварале струје i_d и i_q.

Слика 4.18: Положај dq координатног система и струје i_d и i_q у устаљеном стању.

Премда је трансформација у основи математичка операција, она се може представити замишљеним *уклањањем* намотаја статора α_S-β_S и *уградњом* нових намотаја који леже у осама *d*-*q* координатног система, као што је приказано на слици 4.18. Намотаји *d*-*q* се не могу реализовати у пракси, па их је исправно звати *виртуелни*. Струје i_d и i_q ових нових, виртуелних намотаја морају бити такве да дају исти вектор F_S који је постојао и раније.

У наредним сликама и илустрацијама у осама *d* и *q* новог координатног система, који се обрће једнаком брзином као и обртно поље, користиће се ознаке нове ознаке за намотаје у *d*-*q* координатном систему. *Виртуелни* намотаји статора ће се означавати ознакама *d* и *q*, док ће се *виртуелни* роторски намотаји означавати ознакама *D* и *Q*. Компоненте струја у *d*-*q* координатном систему једнаке су пројекцијама вектора струје на осе *d* и *q*. Када би виртуелни намотаји заиста постојали, струје i_d и i_q би резултовале једнаким вектором магнетопобудне силе F_S какав постоји у оригиналној машини. Намотаје у *d* и *q* осама није могуће начинити. Једина сврха њиховог приказивања на сликама је помоћ у сагледавању променљивих стања, какве су i_d и i_q, које се добијају применом обртне трансформације, као и помоћ у раду са моделом асинхроне машине.

4.28 Матрица обртне трансформације

Релације обртне трансформације је могуће извести из услова инваријантности вектора F_S, На горњој слици, угао θ_S означава померај осе d синхроно ротирајућег система у односу на непомичну осу α_S. Пројекција струје $i_{\alpha S}$ на осу d једнака је $i_{\alpha S}\cos\theta_S$, док је пројекција струје $i_{\beta S}$ на исту осу једнака $i_{\alpha S}\sin\theta_S$. Дакле, инваријантност вектора F_S налаже да се у *виртуелном* намотају осе d има струја $i_d = i_{\alpha S}\cos\theta_S + i_{\beta S}\sin\theta_S$. Сабирањем пројекција струја $i_{\alpha S}$ и $i_{\beta S}$ на осу q, добија се да струја у *виртуелном* намотају q мора бити $i_q = -i_{\alpha S}\sin\theta_S + i_{\beta S}\cos\theta_S$. Паркова обртна трансформација се може исказати матрицом датом у једначини (4.56). Детерминанта трансформационе матрице једнака је 1. Трансформацијом било ког вектора из стационарног у синхроно ротирајући координатни систем, добија се вектор исте амплитуде. Применом једнаке трансформационе матрице на напоне, струје и флуксеве добијају се релевантне компоненте у d-q координатном систему (u_d, u_q, i_d, i_q, Ψ_d, Ψ_q) и остварује инваријантност по импеданси, по индуктивности и по снази (det T = 1). Ознаке Ψ_d и Ψ_q представљају укупни флукс виртуелних статорских намотаја у d и q оси.

Слика 4.19: Пројекције вектора на осе стационарног и ротирајућег координатног система.

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_s & \sin\theta_s \\ -\sin\theta_s & \cos\theta_s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{\alpha s} \\ i_{\beta s} \end{bmatrix} = \underline{T} \cdot \begin{bmatrix} i_{\alpha s} \\ i_{\beta s} \end{bmatrix} \tag{4.56}$$

<u>Питање (4.11):</u>

Полазећи од израза $u_{\alpha S} = R_S\, i_{\alpha S} + \mathrm{d}\Psi_{\alpha S}/\mathrm{d}t$, може ли се тврдити да је $u_d = R_S\, i_d + \mathrm{d}\Psi_d/\mathrm{d}t$?

Одговор (4.11):

Присуство неизмењене статорске отпорности R_S је очекивано јер је спроведена трансформација инваријантна по импеданси. Не може се, међутим, тврдити да је $u_d = R_S\, i_d + \mathrm{d}\Psi_d/\mathrm{d}t$. Наиме, једнакост $u= R\, i + \mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t$ вреди за сваки реалан, физички остварив намотај. Како је двофазни намотај статора асинхроне машине могуће практично реализовати, намотаје α_S и β_S сматрамо реалним, физички остваривим, па је равнотежа напона у њима дата изразима облика $u= R\, i + \mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t$. Виртуелни намотаји у d и q оси не постоје. Дакле, није могуће начинити машину која има синхроно ротирајући статорски намотај. Доцнијом анализом ће се показати да напон u_d није једнак $R_S\, i_d + \mathrm{d}\Psi_d/\mathrm{d}t$. Једначина равнотеже напона у виртуелним намотајима биће изведена применом трансформационе матрице на једначине $u_{\alpha S} = R_S\, i_{\alpha S} + \mathrm{d}\Psi_{\alpha S}/\mathrm{d}t$ и $u_{\beta S} = R_S\, i_{\beta S} + \mathrm{d}\Psi_{\beta S}/\mathrm{d}t$.

4.29 Трансформисање роторских величина у *dq* систем

Поред статорских величина, неопходно је начинити и обртну трансформацију роторских величина. Статорске и роторске величине је потребно трансформацијом превести у исти координатни систем. Дакле, систем од два фазна намотаја α_R и β_R, који замењују кратко спојени роторски кавез, потребно је заменити виртуелним намотајима ротора у d-q координатном систему. Ради прегледности, нотација коришћена у остатку текста подразумева да се статорске величине означавају малом словима dq у супскрипту, док се роторске величине означавају великим словима DQ.

Потребно је образложити потребу да се статорске и роторске величине трансформишу у исти, синхроно ротирајући координатни систем. Пре свега, треба уочити да је неповољан облик диференцијалних једначина равнотеже напона у α–β координатном систему последица промењљивих коефицијената у матрици индуктивности, какав је $L_{13}=L_m\cos(\theta_m)$. Промењљиви коефицијенти у матрици индуктивности су последица промене релативног положаја намотаја, то јест обртања роторских намотаја α_R-β_R у односу на статорске α_S-β_S. Уколико се роторски намотаји трансформишу, то јест за-

мене виртуелним намотајима који леже у *d-q* координатном систему, тада неће бити помераја статорских *dq* намотаја у односу на роторске *DQ* намотаје, па ће матрица индуктивности која вреди за виртуелне намотаје имати константне коефицијенте.

Слика 4.20: Положај роторског координатног система и *dq* система.

Поред потребе за добијањем константне матрице индуктивности, трансформација роторских величина у *d-q* систем је потребна и због добијања модела у коме су роторске координате у устаљеном стању константе. Познато је да у ротору постоје наизменичне струје кружне учестаности $\omega_k = \omega_S - p\Omega_m$. Ове струје стварају магнетопобудну силу и флукс ротора који се обрћу брзином Ω_k у односу на сам ротор. Ако је $p = 1$, њихова брзина у односу на статор је $\Omega_k + \Omega_m = \omega_k + \omega_m$. Другим речима, вектор магнетопобудне силе и флукса ротора се у устаљеном стању обрћу синхроно са векторима статорских величина. Међу овим векторима може постојати фазно-просторни померај који се у устаљеном стању не мења. Дакле, пројекције роторских величина на осе синхроно ротирајућег *d-q* система су у устаљеном стању непромењиве.

Обртна трансформација роторских величина је илустрована сликом 4.20. Потребно је уочити да су производи $N_R\, i_{\alpha R}$ и $N_R\, i_{\beta R}$ роторских струја и броја навојака ротора једнаке пројекцијама вектора магнетопобудне силе ротора F_R на осе α_R-β_R координатног система који је везан за ротор. Померај између оса α_R и α_S је једнак померају ротора θ_m. Синхроно ротирајући *d-q* координатни систем напредује за угао θ_k у односу на ротор, тако да је његов померај у односу на статор једнак $\theta_S = \theta_k + \theta_m$.

Матрица трансформације роторских величина из α_R-β_R координатног система у d-q координатни систем добија се из услова инваријантности магнетопобудне силе ротора. Пројекција струје $i_{\alpha R}$ на осу d једнака је $i_{\alpha R}\cos\theta_k$, док је пројекција струје $i_{\beta R}$ на исту осу једнака $i_{\alpha R}\sin\theta_k$, тако да се добија да је струја виртуелног роторског намотаја који лежи у d оси једнака $i_D = i_{\alpha R}\cos\theta_k + i_{\beta R}\sin\theta_k$. На сличан начин, $i_Q = -i_{\alpha R}\sin\theta_k + i_{\beta R}\cos\theta_k$. Изведене релације се могу записати у матричном облику, како је приказано на горњој слици. Иста трансформациона матрица се примењује на све роторске величине, чиме се добијају напони виртуелних роторских намотаја $u_D = u_Q = 0$ и укупни флуксеви Ψ_D и Ψ_Q.

$$\begin{bmatrix} i_D \\ i_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_k & \sin\theta_k \\ -\sin\theta_k & \cos\theta_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{\alpha R} \\ i_{\beta R} \end{bmatrix} \tag{4.57}$$

4.30 Представљање вектора комплексним бројем

Упрошћени запис обртне трансформације

Паркова обртна трансформација повезује координате вектора у α-β координатном систему са координатама истог вектора у d-q координатном систему. Могуће је увести нотацију која векторе представља комплексним бројевима, чиме се матрица трансформације редукује у комплексни број. Вектор струје статора се може изразити уз помоћ јединичних вектора α_S-β_S координатног система. Уколико се оси α_S дају атрибути реалне а оси β_S имагинарне осе, α_S-β_S раван се може узети за комплексну раван, у којој се вектор струје представља комплексним бројем

$$\vec{i}_{\alpha\beta S} = \vec{\alpha}_0 i_{\alpha S} + \vec{\beta}_0 i_{\beta S} \;\Rightarrow\; \underline{i}_{\alpha\beta S} = i_{\alpha S} + \mathrm{j}\, i_{\beta S} \quad .$$

На сличан начин, посматрајући вектор струје у d-q координатном систему, оса d се може узети за реалну осу, док се оса q може третирати као имагинарна, чиме се d-q простор претвара у комплексну раван, у којој је струја представљена комплексним бројем $\underline{i}_{dq}=i_d + ji_q$. Користећи комплексну нотацију, Паркова трансформација се може записати исказати изразом

$$\underline{i}_{dq} = i_d + ji_q = \underline{i}_{\alpha\beta S} e^{-\mathrm{j}\theta_S}$$

$$\underline{i}_{\alpha\beta S} e^{-\mathrm{j}\theta_S} = \left(i_{\alpha S} + \mathrm{j} i_{\beta S}\right)\left(\cos\left(\theta_S\right) - \mathrm{j}\sin\left(\theta_S\right)\right) =$$
$$= (i_{\alpha S}\cos\left(\theta_S\right) + i_{\beta S}\sin\left(\theta_S\right)) + \mathrm{j}\left(-i_{\alpha S}\sin\left(\theta_S\right) + i_{\beta S}\cos\left(\theta_S\right)\right).$$

Инверзна трансформација се може записати као

$$\underline{i}_{\alpha\beta S} = \underline{i}_{dq} e^{+\mathrm{j}\theta_S}.$$

Комплексни број $\underline{i}_{dq}=i_d + \mathrm{j}i_q$ представља компактан запис који обухвата две променљиве стања, i_d и i_q. Пошто посматрани пар променљивих описује вектор струје, прегледно је и логично записати их у форми комплексног броја. Избор реалне (d) и комплексне осе (q) условљен је чињеницом да оса q предњачи за $\pi/2$, као и околношћу да имагинарна јединица $\mathrm{j} = \exp(\mathrm{j}\pi/2)$ представља фазни и просторни померај од $\pi/2$. Комплексни запис вектора $\underline{i}_{dq}$ се у устаљеном стању претвара у комплексну константу - фазор, чија амплитуда и аргумент одређују амплитуду и фазни став статорске струје.

4.31 Матрица индуктивности у *dq* систему

Парковом обртном трансформацијом се статорски и роторски намотаји преводе у синхроно ротирајући d-q координатни систем. Виртуелни намотаји статора обележени су ознакама d и q, док су намотаји ротора обележени ознакама D и Q. При ротацији dq система, релативни положај статора и ротора се не мења, тако да су сви коефицијенти у релевантној матрици индуктивности константни. Као пример, флукс *виртуелног* статорског намотаја d одређен је првом врстом матрице, $\Psi_d = L_S i_d + L_m i_D$. Међусобна индуктивност је константна стога што намотаји d и D не мењају свој релативни положај.

Обртни координатни систем се обрће угаоном брзином Ω_S која је одређена учестаношћу напајања и код двополних машина, код којих је p = 1, једнака учестаности напајања. Угао између осе d и осе α_S је једнак

$$\theta_s = \theta_s(0) + \int_0^t \Omega_s d\tau. \tag{4.58}$$

Струје статора су једнаке

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_s & \sin\theta_s \\ -\sin\theta_s & \cos\theta_s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{\alpha s} \\ i_{\beta s} \end{bmatrix}. \tag{4.59}$$

Слика 4.21: Статорски и роторски намотаји у *dq* координатном систему.

Комплексни запис статорске струје је

$$\underline{i}_{dq} = i_d + ji_q = e^{-j\theta_S}\,\underline{i}_{\alpha\beta}\,. \tag{4.60}$$

Струје ротора су

$$\begin{bmatrix} i_D \\ i_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_k & \sin\theta_k \\ -\sin\theta_k & \cos\theta_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{\alpha R} \\ i_{\beta R} \end{bmatrix}. \tag{4.61}$$

Будући да се статорски и роторски намотаји представљају виртуелним *dq* и *DQ* намотајима чије се осе подударају и који се не међусобно не померају, међусобна индуктивност између намотаја *d* и *D* је једнака L_m као и међусобна индуктивност између намотаја *q* и *Q*, док су међусобне индуктивности намотаја у ортогоналним осама једнаке нули. Матрица индуктивности је једнака

$$\begin{bmatrix} \psi_d \\ \psi_q \\ \psi_D \\ \psi_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & 0 & L_m & 0 \\ 0 & L_s & 0 & L_m \\ L_m & 0 & L_R & 0 \\ 0 & L_m & 0 & L_R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} = \underline{L} \cdot \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix}. \tag{4.62}$$

Питање (4.12):

Електромагнетски моменат који делује на покретну контуру у систему који садржи више магнетски спрегнутих контура одређује се на основу израза $M_{em} = ½\, i^{T}(\mathrm{d}\underline{L}/\mathrm{d}\theta_m)i$, где је $\underline{L}$ матрица индуктивности. Имајући у виду стационарну матрицу индуктивности дату у једначини (4.62), закључује се да је $\mathrm{d}\underline{L}/\mathrm{d}\theta_m = 0$, што заменом у претходни израз даје $M_{em} = 0$. Постоји ли грешка у моделирању?

Одговор (4.12):

Израз $M_{em} = ½\, i^{T}(\mathrm{d}\underline{L}/\mathrm{d}\theta_m)i$ је изведен полазећи од енергије поља и израза за равнотежу намота у реалним, постојећим намотајима. Не постоји и не може се извести доказ да предметни израз за моменат вреди и за фиктивне, то јест виртуелне намотаје. Израз се, дакле, може користити уз услов да у њему фигуришу струје реалних, постојећих намотаја, при чему матрица $\underline{L}$ садржи коефицијенте сопствених и међусобних индуктивности посматраних реалних намотаја. Матрица која је дата на горњој слици дефинише сопствене и међусобне индуктивности виртуелних намотаја. Виртуелни намотаји заправо не могу постојати на машини, већ су уведени као помоћ у сагледавању и разумевању Паркове обртне трансформације. Израз за моменат се не може применити на виртуелне намотаје.

Питање (4.13):

Позната је сопствена индуктивност L_S фазних намотаја статора трофазне асинхроне машине, као и коефицијент магнетске спреге k статора и ротора. Одредити коефицијенте матрице индуктивности на слици 4.21.

Одговор (4.13)

Матрица индуктивности, приказана на горњој слици, добија се после примене Кларкине 3Ф/2Ф трансформације и Паркове обртне трансформације. Примењене трансформације су инваријантне по индуктивности. Дакле, елементи L_{11} и L_{22} матрице једнаки су L_S. Приликом моделирања ротора, најчешће се усваја да кратко спојени роторски намотај има једнак број навојака као и статор, као и да је магнетска отпорност на путу два флукса приближно једнак, тако да је $L_S = L_R$. Коефицијенти међусобне индуктивности су једнаки $L_m = k(L_S L_R)^{0,5} = kL_S$. Сукцесивном применом Кларкине и Паркове, обавља се трансформација позната као Блонделова.

4.32 Једначине равнотеже напона у *dq* систему

Математички модел електричног подсистема садржи једначине равнотеже напона у намотајима. За модел у стационарном координатном систему, равнотежа напона у намотајима статора је исказана једначинама

$$u_{\alpha S} = R_S i_{\alpha S} + \mathrm{d}\psi_{\alpha S}/\mathrm{d}t, \qquad u_{\beta S} = R_S i_{\beta S} + \mathrm{d}\psi_{\beta S}/\mathrm{d}t \tag{4.63}$$

Множењем друге једначине са имагинарном јединицом и сабирањем две једначине, добија се једна једначина напонске равнотеже у којој фигуришу вектори напона, флукса и струје у свом комплексном запису.

$$\begin{aligned}\underline{u}_{\alpha\beta S} &= \left(u_{\alpha S} + \mathrm{j}u_{\beta S}\right) = R_S\left(i_{\alpha S} + \mathrm{j}i_{\beta S}\right) + \mathrm{d}\left(\psi_{\alpha S} + \mathrm{j}\psi_{\beta S}\right)/\mathrm{d}t = \\ &= R_S\,\underline{i}_{\alpha\beta S} + \mathrm{d}\underline{\psi}_{\alpha\beta S}/\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{4.64}$$

Напон виртуелних dq намотаја добија се обртном трансформацијом $\alpha\beta$ напона.

$$\underline{u}_{dq} = u_d + \mathrm{j}u_q = \underline{u}_{\alpha\beta S}e^{-\mathrm{j}\theta_S} = \left(R_S\,\underline{i}_{\alpha\beta S} + \mathrm{d}\underline{\psi}_{\alpha\beta S}/\mathrm{d}t\right)e^{-\mathrm{j}\theta_S} \tag{4.65}$$

Величине $\underline{i}_{\alpha\beta S}$ и $\underline{\Psi}_{\alpha\beta S}$ стационарног координатног система могу се изразити у функцији dq величина уз помоћ инверзне Паркове трансформације, $\underline{i}_{\alpha\beta S} = \underline{i}_{dq}\exp(-\mathrm{j}\theta_S)$ тако да се добија.

$$\begin{aligned}\underline{u}_{dq} &= \left(R_S\,\underline{i}_{dq}e^{+\mathrm{j}\theta_S} + \mathrm{d}\left(\underline{\psi}_{dq}e^{+\mathrm{j}\theta_S}\right)/\mathrm{d}t\right)e^{-\mathrm{j}\theta_S} = \\ &= R_S\,\underline{i}_{dq} + \mathrm{d}\underline{\psi}_{dq}/\mathrm{d}t + \mathrm{j}\omega_S\underline{\psi}_{dq}\end{aligned} \tag{4.66}$$

Дакле, једначине напонске равнотеже у dq виртуелним статорским намотајима немају облик $u = Ri + \mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t$, већ се у њима јавља додатни члан који је последица извршене обртне трансформације. Горња комплексна једначина може се раставити на имагинарни и реални део, чиме се добијају две скаларне једначине. Исти поступак се може применити на једначине равнотеже напона у роторским намотајима, с том разликом што у трансформацијама на месту угла θ_S фигурише угао θ_k. За виртуелне роторске намотаје вреди једнакост

$$\begin{aligned}\underline{u}_{DQ} &= \left(R_R\,\underline{i}_{DQ}e^{+\mathrm{j}\theta_k} + \mathrm{d}\left(\underline{\psi}_{DQ}e^{+\mathrm{j}\theta_k}\right)/\mathrm{d}t\right)e^{-\mathrm{j}\theta_k} = \\ &= R_R\,\underline{i}_{DQ} + \mathrm{d}\underline{\psi}_{DQ}/\mathrm{d}t + \mathrm{j}\omega_k\underline{\psi}_{DQ}\end{aligned} \tag{4.67}$$

4.33 Једначине модела у *dq* систему

У моделирању асинхроне машине, начињене су четири претпоставке наведене у поглављу о електромеханичком претварању енергије. Начињена је

трофазно двофазна Кларкина трансформација са коефицијентом $K = 2/3$. У даљем излагању се претпоставља да се ради о двополној машини, код које је $p = 1$, и код које је кружна учестаност ω одговарајућих величина једнака угаоној брзини обртања Ω, дакле $\omega = p\Omega$.

Следеће једначине дају комплетан математички модел електричног подсистема асинхроне машине у синхроно ротирајућем dq координатном систему. Две комплексне једначине равнотеже напона у намотајима статора и ротора, изведене раније, могу се раздвојити на реални и имагинарни део, чиме се добијају четири скаларне једначине.

$$u_d = R_s i_d + \frac{d\psi_d}{dt} - \omega_s \psi_q \tag{4.68}$$

$$u_q = R_s i_q + \frac{d\psi_q}{dt} + \omega_s \psi_d \tag{4.69}$$

$$0 = R_R i_D + \frac{d\psi_D}{dt} - \omega_k \psi_Q \tag{4.70}$$

$$0 = R_R i_Q + \frac{d\psi_Q}{dt} + \omega_k \psi_D \tag{4.71}$$

Матрица индуктивности даје везу флуксева и струја виртуелних намотаја.

$$\begin{bmatrix} \psi_d \\ \psi_q \\ \psi_D \\ \psi_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & 0 & L_m & 0 \\ 0 & L_s & 0 & L_m \\ L_m & 0 & L_R & 0 \\ 0 & L_m & 0 & L_R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} \tag{4.72}$$

<u>Питање (4.14):</u>

Полазећи од израза за моменат $M_{em} = (3/2)\ (\Psi_{\alpha S}\, i_{\beta S} - \Psi_{\beta S}\, i_{\alpha S})$, изразити M_{em} у функцији **флукса** и струје статора у dq координатном систему.

Одговор (4.14)<u>:</u>

Користећи комплексну нотацију у представљању вектора, $\underline{\Psi}_{\alpha\beta S} = \Psi_{\alpha S} + \mathrm{j}\,\Psi_{\beta S}$, $\underline{i}_{\alpha\beta S} = i_{\alpha S} + \mathrm{j}\, i_{\beta S}$, моменат се може записати као $M_{em} = (3/2)\ \mathrm{Im}(\underline{\Psi}^*_{\alpha\beta S}\, \underline{i}_{\alpha\beta S})$, где Im() означава функцију која издваја имагинарни део комплексног аргумента, док је $\underline{\Psi}^*_{\alpha\beta S}$ конјугована вредност комплексног броја, то јест вредност код које имагинарни део има измењен знак. На

основу познатих израза за Паркову трансформацију, $\underline{\Psi}_{dq} = \Psi_d + \mathrm{j}\Psi_q = \exp(-\mathrm{j}\theta_S)\,\underline{\Psi}_{\alpha\beta S}$ и $\underline{i}_{dq} = i_d + \mathrm{j}\, i_q = \exp(-\mathrm{j}\theta_S)\,\underline{i}_{\alpha\beta S}$, добија се да је
$M_{em} = (3/2)\,\mathrm{Im}[(\underline{\Psi}_{dq}\exp(\mathrm{j}\theta_S))^* (\underline{i}_{dq}\exp(\mathrm{j}\theta_S))] =$
$= (3/2)\,\mathrm{Im}[\underline{\Psi}^*_{dq}\exp(-\mathrm{j}\theta_S)\ \underline{i}_{dq}\exp(\mathrm{j}\theta_S))] = (3/2)\,\mathrm{Im}(\underline{\Psi}^*_{dq}\,\underline{i}_{dq}) = (3/2)\,(\Psi_d\, i_q - \Psi_q\, i_d)$.

4.34 Улазна снага

Полазећи од израза за снагу извора $P_e = (3/2)(u_d i_d + u_q i_q)$ могуће је одредити електромагнетски моменат. Користећи једначине напонске равнотеже за статорске намотаје добија се снага извора $P_e = (3/2)(u_d i_d + u_q i_q) = (3/2)\,(R_S\, i_d^2 + R_S\, i_q^2) + (3/2)\,(\, i_d\, \mathrm{d}\Psi_d/\mathrm{d}t + i_q\, \mathrm{d}\Psi_q/\mathrm{d}t\,) + (3/2)\ \omega_S\,(\,\Psi_d\, i_q - \Psi_q\, i_d\,) = P_{cu1} + \mathrm{d}W_m/\mathrm{d}t + P_{ob}$. Сабирак P_{cu1} представља губитке у бакру статорског намотаја. Сабирак $\mathrm{d}W_m/\mathrm{d}t$ представља снагу акумулације енергије у спрежном пољу, то јест извод енергије акумулисане у спрежном пољу. Средња вредност израза $\mathrm{d}W_m/\mathrm{d}t$ мора бити једнака нули, зато што се акумулисана енергија не може непрекидно увећавати. У случају да губици у гвожђу статора P_{Fe} имају значајну вредност, требало их обрачунати скупа са $\mathrm{d}W_m/\mathrm{d}t$. Остатак снаге која долази из извора означен је са P_{ob}, зове се *снага обртног поља* и предаје се ротору. Од интереса је проучити природу снаге обртног поља и одредити механичку снагу и моменат који се преко вратила предају механичком оптерећењу, односно радној машини.

4.35 Израз за момент

Снага P_{dq} је једнака

$$u_d i_d + u_q i_q = R_s\left(i_d^2 + i_q^2\right) + \left(\Psi'_d i_d + \Psi'_q i_q\right) + \omega_s\left(\Psi_d i_q - \Psi_q i_d\right). \qquad (4.73)$$

Први сабирак на десној страни једначине је P_{cu1}, други $\mathrm{d}W_m/\mathrm{d}t$, док остатак одређује снагу обртног поља. Снага обртног поља P_{ob} оригиналне машине је

$$P_{ob} = \frac{3}{2}\omega_s\left(\Psi_d i_q - \Psi_q i_d\right). \qquad (4.74)$$

Снага обртног поља би се могла добити израчунавањем површинског интеграла Поинтинговог вектора $\vec{E}\times\vec{H}$ кроз цилиндричну површ која пролази кроз ваздушни зазор, која обухвата ротор, и кроз коју се флукс вектора $\vec{E}\times\vec{H}$ израчунава у смеру од статора ка ротору. Количник снаге обртног поља P_{ob} и брзине обртања поља $\Omega_S = \omega_S/p$ одређује меру механичке интер-

акције статора и ротора, односно електромагнетски моменат $M_{em}= P_{ob}/\Omega_S$ којим статор делује на ротор.

$$M_{em} = \frac{3}{2} p\left(\psi_d i_q - \psi_q i_d\right) \tag{4.75}$$

Њутнова једначина одређује промену брзине.

$$J\frac{\mathrm{d}\Omega_m}{\mathrm{d}t} = M_{em} - \sum M_{OPT} \tag{4.76}$$

4.36 Релативно клизање

Ако се ротор асинхроног мотора обрће брзином Ω_m различитом од синхроне брзине којом се обрће магнетско поље, тада клизање износи $\Omega_k = \Omega_S - \Omega_m$. Током прелазних процеса, брзина обртања ротора је променљива и представља једну од променљивих стања. У устаљеном стању, ротор се обрће константном брзином. Однос $s = \omega_k/\omega_S = \Omega_k/\Omega_S$, који постоји у устаљеном стању зове се *релативно клизање*. За двополни мотор који се напаја из градске мреже, синхрона брзина обртања је 50 обртаја у секунди, односно 3000 o/min. Ако се ротор обрће брзином од 2700 o/min, релативно клизање је s = 300/3000 = 0,1. За мотор чији је ротор закочен, то јест чији се ротор не обрће, релативно клизање је једнако s = 1.

4.37 Губици и механичка снага

Деловањем електромагнетског момента M_{em} на ротор који се обрће брзином Ω_m, добија се механичка снага $P_{mR} = M_{em}\Omega_m$, која се зове унутрашња механичка снага. Механичка снага $P_m = M_m\Omega_m$ коју машина преко вратила преноси оптерећењу разликује се од снаге $P_{mR} = M_{em}\Omega_m$, стога што у асинхроној машини постоје губици услед отпора ваздуха, трења у лежајевима и других губитака механичког подсистема. Дакле, електромагнетски моменат M_{em} се разликује од момента M_m који се преко вратила предаје радној машини. Механичка снага P_{mR} се разликује од снаге обртног поља P_{ob} за износ губитака роторским намотајима и магнетском колу ротора. Струја у роторским штаповима ствара губитке пропорционалне квадрату роторске струје, Ri^2. Премда су штапови ротора најчешће начињени од алуминијума, губици у кавезу се означавају са P_{Cu2}. Поред губитака у намотајима ротора, постоје и губици у гвожђу ротора који се означавају са означа-

вају са P_{FeR}. Роторско магнетско коло је као и статорско начињено од лимова. У њему постоји магнетско поље које се простопериодично мења са учестаношћу ω_k, стварајући губитке услед хистерезиса и вихорних струја. Роторска учестаност ω_k је много мања од статорске, тако да је оправдано занемарити губитке у гвожђу ротора. Занемарење није оправдано у режимима рада код којих не важи претпоставка $\omega_k << \omega_S$, односно, где не важи претпоставка $s << 1$. Један од режима у коме није оправдано занемарити губитке у гвожђу ротора је прикључење на градску мрежу и полазак из стања мировања, када се магнетско поље у ротору мења са учестаношћу мреже. Губици у кратко спојеном роторском кавезу се сабира са врло малим губицима у ротору и тај збир представља укупне губитке у ротору. У устаљеном стању, механичка снага P_{mR} је једнака $M_{em}\Omega_m = M_{em}\Omega_S(1-s) = (1-s)P_{ob}$. Дакле, остатак од sP_{ob} је снага која се губи у ротору, и која је приближно једнака губицима у намотајима.

$$P_{Cu2} + P_{FeR} = sP_{ob} \tag{4.77}$$

Слика 4.22: Подела снаге обртног поља на роторске губитке и унутрашњу механичку снагу.

<u>Питање (4.15):</u>

Двополни асинхрони мотор се напаја из градске мреже и ради у устаљеном стању. Познато је да у статорском магнетском колу постоје губици у гвожђу P_{Fe} који се не могу занемарити. Познати су губици у бакру статорског намотаја P_{cu1}, привидна снага S коју мотор узима из напојне мреже, као и фазно заостајање струје у односу на напон φ. Одредити снагу обртног поља и електромагнетски моменат.

Одговор (4.15):

Средња вредност снаге dW_m/dt која се улаже у спрежно поље је у устаљеном стању једнака нули. Снага обртног поља једнака је $P_{ob} = S\cos(\varphi)$

$-P_{Fe}$ - P_{cu1}. Електромагнетски моменат којим статор делује на ротор једнак је $M_{em}= pP_{ob}/\omega_S = P_{ob}/\omega_S$ где је ω_S кружна учестаност мреже.

Питање(4.16):

Мрежно напајана асинхрона машина се обрће брзином од 2700 о/мин. Проценити степен корисног дејства ове машине.

Одговор (4.16):

Релативно клизање износи s = (3000-2700)/3000 = 0,1. Занемарујући губитке у статору, добија се да је корисна снага блиска 90% улазне, док се у ротору губи 10% снаге.

4.38 Рад асинхроних машина у устаљеном стању

Паркова обртна трансформације променљивих стања спроведена је са циљем да се добије модел асинхроне машине у коме су променљиве стања, то јест пројекције вектора струје или флукса на осе одабраног координатног система у устаљеном стању непромењиве, као и да су им изводи једнаки нули. Овакав приступ олакшава извођење заменске шеме за устаљена стања. Комплексни запис једначина равнотеже напона се своди на облик $\underline{U} = R\underline{I} + j\omega\,\underline{\Psi}$. У устаљеном стању, комплексни записи вектора $\underline{u}_{dq}$, $\underline{i}_{dq}$, $\underline{i}_{DQ}$, $\underline{\Psi}_{dq}$ и $\underline{\Psi}_{DQ}$ постају комплексне константе, па их стога можемо обележавати са $\underline{U}_s$, $\underline{I}_s$, $\underline{I}_R$, $\underline{\Psi}_s$ и $\underline{\Psi}_R$. Наведене константе се могу третирати као фазори. Наведене константе се од фазора разликују по томе што представљају величине трофазног система намотаја, при чему њихова амплитуда не мора одговарати ефективној вредности. Веза ефективне вредности статорског напона и модула $U_s = (U_d^2+U_q^2)^{0,5}$ комплексне константе $\underline{U}_s$ одређена је коефицијентом K примењеним у 3Ф/2Ф трансформацији. За K=2/3, модул U_s једнак је вршној вредности фазног напона.

$$\underline{u}_{dq} = R_s \underline{i}_{dq} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underline{\psi}_{dq} + \mathrm{j}\omega_s \underline{\psi}_{dq}$$

$$0 = R_R \underline{i}_{DQ} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underline{\psi}_{DQ} + \mathrm{j}\omega_k \underline{\psi}_{DQ}$$

$$\underline{u}_{dq} \Rightarrow \underline{U}_s,\ \underline{i}_{dq} = \underline{I}_s,\ \underline{i}_{DQ} = \underline{I}_R,\ \underline{\Psi}_{dq} = \underline{\Psi}_s,\ \underline{\Psi}_{DQ} = \underline{\Psi}_R$$

Ради лакше анализе рада асинхроних машина, пожељно је представити једначине равнотеже напона заменском шемом за устаљена стања. Постоји, међутим, проблем стога што статорске једначине садрже учестаност ω_S

док је у роторским једначинама учестаност ω_k. Наиме, уколико се обе једначине желе представити јединственом шемом у којој се устаљене вредности простопериодичних струја и напона представљају фазорима, неопходно је имати јединствену учестаност.

$$\underline{U}_s = R_s \underline{I}_s + \mathrm{j}\omega_s \underline{\psi}_s$$

$$0 = R_R \underline{I}_R + \mathrm{j}\omega_k \underline{\psi}_R \Big/ \cdot \frac{\omega_s}{\omega_k}$$

Пошто се ради о устаљеном стању, релативно клизање $s = \omega_k/\omega_S$ је непромењиво.

$$s = \frac{\omega_k}{\omega_s} = \frac{\Omega_k}{\Omega_s}$$

Под условом да је релативно клизање s различито од нуле, роторску једначину је могуће поделити са релативним клизањем, чиме равнотежа напона у роторском колу узима облик

$$0 = \frac{R_R}{s} \underline{I}_R + \mathrm{j}\omega_s \underline{\psi}_R . \tag{4.78}$$

док је статорско коло одређено једначином

$$\underline{U}_s = R_s \underline{I}_s + \mathrm{j}\omega_s \underline{\psi}_s . \tag{4.79}$$

Флуксеви се могу изразити у функцији струја, $\underline{\Psi}_R = L_R \underline{I}_R + L_m \underline{I}_s$, $\underline{\Psi}_S = L_S \underline{I}_s + L_m \underline{I}_R$. Збир статорске и роторске струје $\underline{i}_m = \underline{i}_s + \underline{i}_R$ можемо, по угледу на трансформатор, назвати струјом магнетисања или струјом магнећења. Сада је могуће писати $\underline{\Psi}_R = L_{\gamma R} \underline{I}_R + L_m \underline{I}_m$, $\underline{\Psi}_S = L_{\gamma s} \underline{I}_s + L_m \underline{I}_m$, где су $L_{\gamma R} = L_R - L_m$ и $L_{\gamma s} = L_S - L_m$ расипне индуктивности роторског и статорског намотаја, док је $\underline{\Psi}_m = L_m \underline{I}_m = \Psi_{md} + \mathrm{j}\,\Psi_{mq}$ флукс магнетисања (флукс магнећења) то јест флукс који једновремено обухвата и статорски и роторски намотај. Претходно добијене једначине дају везу напона, струја и флукса асинхроне машине у устаљеном стању. Да би се одредила заменска шема за устаљена стања, потребно је изразити флукс у функцији струја и коефицијената сопствених, међусобних и расипних индуктивности.

$$\begin{aligned} \underline{\psi}_s &= L_{\gamma s} \underline{I}_s + L_m \underline{I}_m \\ \underline{\psi}_R &= L_{\gamma R} \underline{I}_R + L_m \underline{I}_m \end{aligned} \tag{4.80}$$

Слика 4.23: Заменска шема за устаљена стања.

Једначине равнотеже напона за статорски и роторски намотај могу се у устаљеном стању представити заменским колом приказаним на горњој слици. Напон $\underline{U}_s$, доведен са леве стране кола, једнак је $\underline{U}_s = \underline{U}_{dq} = U_d + \mathrm{j}U_q$, где су U_d и U_q вредности које се добијају применом трофано-двофазне, а потом и обртне Паркове трансформације на фазне напоне u_a, u_b и u_c. Фазори $\underline{I}_s = I_d + \mathrm{j}I_q$ и $\underline{I}_R = I_D + \mathrm{j}I_Q$ одређују амплитуду и фазни став статорских и роторских струја у устаљеном стању. Отпорник R_s и индуктивност $L_{\gamma s}$ представљају отпорности и индуктивност расипања статорског намотаја. Отпорник R_R и индуктивност $L_{\gamma R}$ представљају отпорност и индуктивност расипања роторског намотаја. Параметри R_R и $L_{\gamma R}$ су *сведени на страну статора*. Свођење роторских величина на статорску страну је извршено одлуком да се кратко спојени роторки кавез моделује кратко спојеним двофазним намотајима α_R и β_R који имају једнак број навојака као и статорски намотаји.

Свођење роторских импеданси на страну статора у свему је једнако свођењу секундарне импедансе Z_2 на примар трансформатора који има преносни однос $m = N_1/N_2$. Свођењем секундарне импедансе, на примару се добија m^2Z_2. У случају асинхроног мотора, секундар *трансформатора* је заправо кратко спојени роторски кавез. Два наспрамна роторска штапа формирају кратко спојену контуру ротора која има $N = 1$ навојак отпорности реда величине $R_2 = 1$ mΩ. Свођењем на страну статора који има $N_S = 40$ навојака, добија се $R_R = 1{,}6$ Ω. При моделирању ротора, кратко спојени кавез је еквивалентиран двофазним намотајем са $N_R = N_S$ навојака, тако да су све роторске величине имплицитно сведене на статорску страну.

4.39 Аналогија са обртним трансформатором

Заменска шема за устаљена стања се може одредити и коришћењем аналогије у којој статор представља примар трансформатора, док је ротор у улози кратко спојеног секундара. Будући да статор асинхроне машине има трофазни намотај, аналогија се може начинити са трофазним трансформатором чији је секундар кратко спојен. Разлике у раду асинхроне машине и трансформатора су у томе што струје статора и ротора немају једнаку учестаност. Поред тога, ротор се обрће у односу на статор, тако да се, поред трансформаторских електромоторних сила, јављају и електромоторне силе услед ротације.

Резултантна магнетопобудна сила и флукс Ψ_m у ваздушном зазору настају услед струја у намотајима статора и ротора. Збир струје статора и струје ротора $\underline{I}_m = \underline{I}_S + \underline{I}_R$ представља струју магнетисања, исто као што код трансформатора збир $\underline{I}_m = \underline{I}_1 + \underline{I}_2^{`}$ струје примара трансформатора $\underline{I}_1$ и струје секундара $\underline{I}_2^{`} = (N_2/N_1)\underline{I}_2$, представља струју у грани магнећења. Кавезни ротор асинхроних машина се еквивалентира кратко спојеним намотајем који има једнак број навојака као и статорски, тако да је $N_S = N_R$, што омогућује да се струја магнетисања одреди као $\underline{I}_m = \underline{I}_S + \underline{I}_R$. Множењем са бројем навојака, добија се резултантна магнетопобудна сила у машини $\underline{F}_m = \underline{F}_S + \underline{F}_R$, која је једнака збиру магнетопобудне силе статорског и роторског намотаја. Међусобни флукс, то јест флукс који обухвата оба намотаја и чије линије поља пролазе кроз ваздушни зазор, може се израчунати на основу израза $\underline{\Phi}_m = \underline{F}_m/R_\mu$, где R_μ представља магнетску отпорност, док је $\underline{\Phi}_m$ флукс кроз један од навојака.

Слика 4.24: Равнотежа напона у намотају статора.

Међусобни флукс намотаја $\underline{\Psi}_m$ добија се збрајањем, то јест интеграцијом флукса у појединим навојцима. За случај да су намотаји концентрисани, има се $\underline{\Psi}_m = N_N\, \underline{\Phi}_m$, где N_N представља број навојака. Код простопериодичне расподеле проводника, $\underline{\Psi}_m = (\pi/4)\, N_N\, \underline{\Phi}_m$. У статорском намотају,

простопериодичне промене флукса $\underline{\Psi}_m$ имају учестаност ω_S, па се у намотају јавља електромоторна сила $\underline{E}_S = \underline{U}_m = \mathrm{j}\omega_S\underline{\Psi}_m$. Напон $\underline{U}_m$ се зове *напон гране магнетисања*. Једначина равнотеже напона у статорском намотају гласи $\underline{U}_S = R_S\underline{I}_S + \mathrm{j}\omega_S L_{\gamma S}\underline{I}_S + \underline{E}_S$, и приказана је наредном сликом.

Будући да је $N_S = N_R$, исти међусобни флукс $\underline{\Psi}_m$ постоји и у намотајима ротора који су кратко спојени. Простопериодичне промене флукса $\underline{\Psi}_m$ у намотају ротора имају учестаност клизања ω_k, па се у намотају јавља електромоторна сила $\underline{E}_R = s\underline{U}_m = \mathrm{j}\omega_k\underline{\Psi}_m$. Једначина равнотеже напона у кратко спојеном ротору $\underline{U}_R = 0 = R_R\underline{I}_R + \mathrm{j}\omega_k L_{\gamma R}\underline{I}_R + \underline{E}_R$ је приказана на следећој слици.

Слика 4.25: Равнотежа напона у намотају ротора.

Задржавајући јачину струје неизмењеном, све импедансе приказане на претходној слици могу се поделити са релативним клизањем $s = \omega_k/\omega_S$. Отпорност роторске гране узима вредност R_R/s. Реактансе $\omega_k L$ имају вредност $\omega_S L$, што показује да шематски приказ роторског кола сада представља везу струја и напона чија је учестаност једнака ω_S. Сви напони у колу ће се повећати $1/s$ пута, тако да ће на месту електромоторне силе $\underline{E}_R = s\underline{U}_m$ сада стојати напон $\underline{U}_m$. После дељења са релативним клизањем, приказа роторског кола узима облик дат сликом 4.26.

Слика 4.26: Роторско коло после дељења са релативним клизањем.

Повезивањем заменске шеме за статорски намотај и заменске шеме за роторски намотај, у коме су релевантне величине помножене константном 1/*s*, добија се заменска шема na slici 4.27 која приказује везу струја, напона и флуксева асинхроне машине у устаљеном стању.

Слика 4.27: Заменска шема асинхроне машине у устаљеном стању.

4.40 Одређивање струја и момента из заменске шеме

У роторској контури заменске шеме постоји отпорност R_R/s. Релативно клизање је $s = (\Omega_S - \Omega_m)/\Omega_S = \omega_k/\omega_S$, па отпорност R_R/s зависи од брзине обртања. Дакле, струје и снаге које постоје у колу имају вредности које зависе од брзине обртања. Заменска шема се може користити за утврђивање везе између брзине обртања ротора и снаге, односно везе брзине и момента, то јест механичке карактеристике. Ради одређивања електромагнетског момента $M_{em} = P_{ob}/\Omega_S$ у устаљеном стању, потребно је наћи начин да се из величина у заменском колу израчуна снага обртног поља. Једначина (4.75) даје снагу обртног поља у функцији напона и струја *dq* система. Од интереса је повезати снагу обртног поља са заменском шемом.

Математички модел и заменска шема су изведени уз занемарење губитака у гвожђу. У устаљеном стању, снага извора једнака је (3/2) $\mathrm{Re}(\underline{u}_s\underline{i}_s^*)$ = (3/2) $(U_dI_d + U_qI_q) = P_{cu1} + P_{ob} = R_s i_s^2 + P_{ob}$, где је амплитуда фазора $|\underline{i}_s|$ одговара вршној вредности фазне струје. Увидом у заменску шему, могуће је учити да се снага извора P_e једним делом утроши на губитке у статорском

намотају, док се преостала снага $P_e - (3/2)R_s i_s^2$ дисипира на отпорности R_R/s заменске шеме. Дакле, *снага обртног поља* P_{ob} се може одредити из заменске шеме као $P_{ob} = 3/2\ (R_R/s)\ i_R^2$, где је $i_R^2 = i_D^2 + i_Q^2$. Електромагнетски моменат се може одредити као

$$M_{em} = \frac{3}{2}\frac{1}{\Omega_s}\frac{R_R}{s} I_R^2 = \frac{3}{2}\frac{p}{\omega_s}\frac{R_R}{s} I_R^2 . \tag{4.81}$$

У претходном изразу, величина I_R^2 је једнака $I_D^2 + I_Q^2$, где су I_D и I_Q компоненте струје ротора у dq систему и устаљеном стању, при чему се полази од претпоставке да је коефицијент Кларкине трансформације једнак 3/2. У случају да је струја магнетисања значајно мања од статорске струје, $|\underline{I}_m| << |\underline{I}_s|$, оправдано је усвојити претпоставку $I_R^2 \approx I_S^2$. Струја ротора и струја магнетисања се могу изразити у функцији струје статора

$$\underline{I}_{R1} = -\underline{I}_R = \frac{\mathrm{j}\omega_S L_m}{\mathrm{j}\omega_S L_m + \mathrm{j}\omega_S L_{\gamma R} + R_R / s}\underline{I}_S ,$$

$$\underline{I}_m = \frac{\mathrm{j}\omega_S L_{\gamma R} + R_R / s}{\mathrm{j}\omega_S L_m + \mathrm{j}\omega_S L_{\gamma R} + R_R / s}\underline{I}_S .$$

При раду са релативно малим клизањем s, активни део роторске импедансе је значајно већи од реактивног дела, то јест $R_R/s >> \omega_S L_{\gamma R}$,

$$\underline{i}_m \approx \frac{R_R / s}{\mathrm{j}\omega_S L_m + \mathrm{j}\omega_S L_{\gamma R} + R_R / s}\underline{i}_S ,$$

тако да роторска струја $\underline{i}_R$ фазно предњачи у односу на струју магнетисања $\underline{i}_m$ за $\pi/2$. Услед фазног помераја, утицај струје $\underline{i}_m$ на амплитуду статорске струје је значајно умањен, тако се може претпоставити да је $I_R^2 \approx I_S^2$. Дакле, приближна вредност електромагнетског момента се може одредити из израза $M_{em} = 3R_R I_S^2/(2s\Omega_S)$, док се приближна вредност снаге обртног поља може рачунати као $P_{ob} = 3/2\ (R_R/s)\ I_S^2$

<u>Питање (4.17):</u>

Коефицијент K Кларкине 3Ф/2Ф трансформације једнак је 2/3. Дискутовати везу струје i_S и простопериодичних струја $i_{\alpha S}(t)$ и $i_{\beta S}(t)$. Повезати израз са снагу обртног поља $P_{ob} = 3/2\ (R_R/s)\ I_S^2$ са изразом у коме би се сабрале снаге три фазна намотаја.

Одговор (4.17):

Једна од особина Кларкине трансформације је једнакост вршних вредности фазних величина у оригиналном abc домену и вршних вредности

струја у α_S-β_S координатном систему. Дакле, ако је позната ефективна вредност статорских струја I_{eff}, тада је вршна вредност струја $i_{\alpha S}(t)$ и $i_{\beta S}(t)$ једнака $I_{eff}\ 2^{0,5}$. Струје $i_{\alpha S}(t)$ и $i_{\beta S}(t)$ су фазно померене за π/2, тако да је $i_{\alpha S}^2 + i_{\beta S}^2 = 2I_{eff}^2$. Паркова обртна трансформација струја $i_{\alpha S}$ и $i_{\beta S}$ не мења амплитуду вектора I_S, тако да је $i_S^2 = i_d^2 + i_q^2 = 2I_{eff}^2$. Снага обртног поља P_{ob} = 3/2 $(R_R/s)\ I_S^2$ се може записати као $P_{ob} = 3(R_R/s)\ I_{eff}^2$, што одговара снази симетричног, трофазног, отпорног оптерећења R_R/s повезаног у звезду, са ефективном вредношћу струје потрошача једнаком ефективној вредности фазних струја мотора.

4.41 Одређивање момента у устаљеном стању

Вредност електромагнетског момента који асинхрона машина развија у устаљеном стању, при брзини обртања Ω_m, може се одредити тако што се

- одреди релативно клизање $s = (\Omega_S - \Omega_m)/\ \Omega_S$,
- уврсти се напон $\underline{u}_S$ и отпорност R_R/s у заменску шему и израчуна струја ротора $\underline{i}_R$,
- одреди се снага обртног поља P_{ob} = 3/2 $(R_R/s)\ i_R^2$,
- одреди се моменат дељењем снаге и синхроне брзине, $M_{em} = P_{ob}/\Omega_S$.

Уз претпоставку да је $I_R^2 \approx I_S^2$, односно да је струја магнетисања релативна мала $|\underline{I}_m| << |\underline{I}_s|$, статорска и роторска струја су једнаке

$$\underline{I}_S \approx \frac{U_S}{\left(R_S + R_R / s\right) + \mathrm{j}\omega_S\left(L_{\gamma R} + L_{\gamma S}\right)}, \tag{4.82}$$

$$I_S^2 \approx \frac{U_S^2}{\left(R_S + R_R / s\right)^2 + \omega_S^2\left(L_{\gamma R} + L_{\gamma S}\right)^2}.$$

Вредност електромагнетског момента једнака је количнику снаге обртног поља и брзине са којом се поље обрће. Брзину обртања поља називамо *синхрона брзина* и обележавамо је ознаком Ω_S. До сада су разматране двополне асинхроне машине код којих су фазни намотаји *a, b* и *c* просторно померени за 2π/3. Наизменичне фазне струје i_a, i_b и i_c, једнаке амплитуде, учестаности ω_S, фазно померене за по 2π/3, стварају магнетско поље статора које се обрће брзином $\Omega_S = \omega_S$, и које има два дијаметрално супротна магнетска пола. Статорски намотај који ствара поље са једним *N*-полом и једним *S*-полом називамо *двополни* намотај. У случају да се сваки од фазних намотаја сачини из два или више делова, уз адекватну просторну расподелу делова фазних намотаја могуће је створити магнетско поље које

има 4 или више полова. У општем случају, намотај може имати $2p$ магнетских полова, где број p одређује број пари полова. До сада су анализиране асинхроне машине код којих је $p = 1$ и $\Omega_S = \omega_S$.

Поље вишеполних машина се у простору обрће спорије него поље двополних машина. Синхрона брзина у асинхроној машини која има $p>1$ пари полова једнака је $\Omega_S = \omega_S/p$. Подробнија анализа вишеполних машина и расподела њиховог магнетског поља биће спроведена у наредним поглављима. У даљем тексту, у виду се имају двополне машине (p=1), код којих је $\Omega_S = \omega_S$, али ће се правити разлика између електричне учестаности струја и напона ω_S и брзине Ω_S са којом се магнетско поље обрће у простору. Потребно је, међутим, имати у виду да је синхрона брзина обртања вишеполних асинхроних машина ($p>1$) мања од учестаности напајања, $\Omega_S = \omega_S/p$, што мења и израз за моменат,

$$M_{em} = \frac{1}{\Omega_S} P_{ob} = \frac{1}{\Omega_S}\frac{3}{2}\omega_S\left(\psi_d I_q - \psi_q I_d\right) = \frac{3p}{2}\left(\psi_d I_q - \psi_q I_d\right). \tag{4.83}$$

Механичка брзина обртања ротора обележаваће се ознаком Ω_m. *Електрични* еквивалент брзине обртања ротора ω_m једнак је $p\Omega_m$. Код двополних машина, које су предмет досадашње анализе, $\Omega_m = \omega_m$, јер је p=1. Засебно означавање механичке брзине обртања и електричне учестаности уводи се и за клизање. Електрични еквивалент клизања је учестаност струја у ротору и означава се са ω_k, док се заостајање (механичке) брзине обртања ротора Ω_m у односу на синхрону брзину Ω_S означава Ω_k. За двополне машине, које су предмет текуће анализе, и код којих је $p = 1$, учестаност струја у ротору и механичко заостајање ротора имају једнаке вредности, $\Omega_k = \omega_k$. Уз претпоставку да је $|\underline{I}_m| << |\underline{I}_s|$, електромагнетски моменат је

$$M_{em} = \frac{P_{ob}}{\Omega_S} = \frac{3}{2\Omega_S}\frac{R_R}{s}\frac{U_S^2}{\left(R_S + R_R/s\right)^2 + \omega_S^2\left(L_{\gamma R} + L_{\gamma S}\right)^2} = \tag{4.84}$$

$$= \frac{3pR_R}{2\omega_S s}\frac{U_S^2}{\left(R_S + R_R/s\right)^2 + \omega_S^2\left(L_{\gamma R} + L_{\gamma S}\right)^2}.$$

У горе датом изразу, U_S је вршна вредност фазних напона, p је број пари полова (до сада узиман као p=1), ω_S је учестаност статорских струја и напона, R_S и $L_{\gamma S}$ су параметри статорског намотаја, док су R_R и $L_{\gamma R}$ параметри роторског намотаја сведени на страну статора. Да би се одредила механичка карактеристика, потребно је одредити релативно клизање $s = (\Omega_S - \Omega_m)/\Omega_S = (\omega_S - \omega_m)/\omega_S$, уврстити резултат у горњи израз и израчунати вредност момента.

Питање (4.18):

Одредити израз за електромагнетски моменат асинхроне машине, полазећи од заменске шеме за устаљена стања. Није оправдано начинити претпоставку да је $|\underline{I}_m|<<|\underline{I}_s|$, али се може занемарити производ $R_S R_R/s$ у односу на производ $X_{\gamma S}\, X_{\gamma R}$.

Одговор (4.18):

Електромагнетски моменат се одређује као количник снаге обртног поља и синхроне брзине обртања Ω_S. Снага обртног поља P_{ob} једнака је дисипацији на отпорности R_R/s, који постоји на десној страни заменске шеме. Одређивање снаге обртног поља без уобичајеног занемарења ($|\underline{I}_m|<<|\underline{I}_s|$) тражи да се израчуна струја у роторској контури заменске шеме, да би се одредила вредност $P_{ob} = (3/2)\,(R_R/s)\, I_R^2$. Усвајањем ознака $\underline{Z}_S = R_S + \mathrm{j}\omega_S L_{\gamma S} = R_S + \mathrm{j}X_{\gamma S}$, $\underline{Z}_R = R_R/s + \mathrm{j}\omega_S L_{\gamma R} = R_R/s + \mathrm{j}X_{\gamma R}$, и $\underline{Z}_m = \mathrm{j}\omega_S L_m = \mathrm{j}X_m$, струја статора се може изразити на следећи начин,

$$\underline{I}_S = \frac{\underline{U}_S}{\underline{Z}_S + \dfrac{\underline{Z}_R \underline{Z}_m}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_m}} = \frac{\underline{U}_S\left(\underline{Z}_R + \underline{Z}_m\right)}{\underline{Z}_S \underline{Z}_m + \underline{Z}_R \underline{Z}_m + \underline{Z}_R \underline{Z}_S},$$

док је струја ротора, уважавајући референтни смер здесна улево, једнака

$$\underline{I}_R = \frac{-\underline{U}_S \underline{Z}_m}{\underline{Z}_S \underline{Z}_m + \underline{Z}_R \underline{Z}_m + \underline{Z}_R \underline{Z}_S} =$$

$$= \frac{-\underline{U}_S\, \mathrm{j}\, L_m \omega_S}{\left(R_S + \mathrm{j}\, L_{\gamma S}\omega_S\right)\mathrm{j}\, L_m\omega_S + \left(R_R/s + \mathrm{j}\, L_{\gamma R}\omega_S\right)\mathrm{j}\, L_m\omega_S + \left(R_R/s + \mathrm{j}\, L_{\gamma R}\omega_S\right)\left(R_S + \mathrm{j}\, L_{\gamma S}\omega_S\right)}$$

Дељењем бројиоца и имениоца са импедансом $\mathrm{j}\omega_S L_m$,

$$\underline{I}_R = \frac{-\underline{U}_S}{\left(R_S + \mathrm{j}\, L_{\gamma S}\omega_S\right) + \left(\dfrac{R_R}{s} + \mathrm{j}\, L_{\gamma R}\omega_S\right) + \left(\dfrac{L_{\gamma S}}{L_m}\dfrac{R_R}{s} + \dfrac{L_{\gamma R}}{L_m} R_S\right) + \mathrm{j}\left(\dfrac{L_{\gamma R} L_{\gamma S}\omega_S}{L_m} - \dfrac{R_R R_S}{s\omega_S L_m}\right)}$$

Занемарењем $R_S R_R/(s\omega_S)$ у односу на производ $L_{\gamma S} L_{\gamma R}\omega_S$, односно производа $R_S R_R/s$ у односу на $X_{\gamma S}\, X_{\gamma R}$,

$$\underline{I}_R = \frac{-\underline{U}_S}{R_S\left(1 + \dfrac{L_{\gamma R}}{L_m}\right) + \dfrac{R_R}{s}\left(1 + \dfrac{L_{\gamma S}}{L_m}\right) + \mathrm{j}\left(L_{\gamma S}\omega_S + L_{\gamma R}\omega_S\left(1 + \dfrac{L_{\gamma S}}{L_m}\right)\right)} =$$

$$= \frac{-\underline{U}_S}{R_S \dfrac{L_R}{L_m} + \dfrac{R_R}{s}\dfrac{L_S}{L_m} + \mathrm{j}\left(L_{\gamma S}\omega_S + L_{\gamma R}\omega_S \dfrac{L_S}{L_m}\right)}$$

Коефицијенти $\nu^S = L_S/L_m>1$ и $\nu^R = L_R/L_m>1$ су блиски јединици. У случају када је $L_S=L_R$, међусобна индуктивност је једнака $L_m = k(L_S L_R)^{0,5} = kL_S$, тако да је $\nu^S = \nu^R = 1/k$. Коефицијент спреге намотаја k је близак јединици, па је и $\nu^S = \nu^R \approx 1$. Електромагнетски моменат се може одредити коришћењем следећег израза.

$$M_{em} = \frac{P_{ob}}{\Omega_S} = \frac{3}{2\Omega_S}\frac{R_R}{s} I_R^2 = \frac{3}{2\Omega_S}\frac{R_R}{s}\frac{U_S^2}{\left(\nu^R R_S + \nu^S R_R / s\right)^2 + \omega_S^2\left(\nu^S L_{\gamma R} + L_{\gamma S}\right)^2} =$$

$$= \frac{3pR_R}{2\omega_S s}\frac{U_S^2}{\left(\nu^R R_S + \nu^S R_R / s\right)^2 + \omega_S^2\left(\nu^S L_{\gamma R} + L_{\gamma S}\right)^2}$$

У случају када је $\nu^S = \nu^R \approx 1$, израз за моменат узима облик добијен на претходној страни,

$$M_{em} = \frac{3pR_R}{2\omega_S s}\frac{U_S^2}{\left(R_S + R_R / s\right)^2 + \omega_S^2\left(L_{\gamma R} + L_{\gamma S}\right)^2},$$

који ће бити коришћен у даљем тексту. Занемарење $\nu^S = \nu^R \approx 1$ је оправдано у највећем броју случајева. Веће вредности коефицијената ν^S и ν^R се јављају у случају када асинхрона машина има значајно увећан ваздушни зазор, што доводи до увећања расипног флукса и смањења коефицијента спреге k. Веће вредности расипног флукса постоје и у случају када су жлебови и зупци ротора и/или статора обликовани тако да подстичу расипни флукс.

4.42 Рад са релативним вредностима

Подаци о отпорности намотаја, реактансама расипања или магнетисања се често дају у релативној, односно сведеној форми. Релативна вредност отпорности је бездимензиони број који се добија дељењем апсолутне вредности, изражене у [Ω], и *базне* вредности отпора, која одговара релативној отпорности од 100%.

Податак о статорској отпорности изражен у апсолутним јединицама (R_S = 1 Ω) не даје могућност да се оцене губици у бакру статора, нити да се изведе закључак о томе може ли се занемарити пад напона на статорској отпорности. Наиме, за доношење поменутих закључака и оцена тражи познавање номиналног напона U_{nom} и струје I_{nom} мотора. За мотор са U_{nom} = 220 V и I_{nom} = 2,2 A, отпорност од R_S = 1 Ω се може сматрати веома малом, јер пад напона $R_S I_{nom}$ износи свега 1% од номиналног напона. С друге стра-

не, мотор са U_{nom} = 110 V и I_{nom} = 22 A, отпорност од R_S = 1 Ω је веома велика, стога што пад напона $R_S I_{nom}$ износи 20% номиналног напона.

Податак о релативној вредности статорске отпорности може омогућити да се пад напона и губици у статорском намотају директно прикажу. Релативна вредност статорске отпорности се може означити ознакама r_S или R_S^{rel}. Уколико се базна вредност импедансе одреди као количник номиналног напона и струје, $Z_B[\Omega] = Z_{nom}[\Omega] = U_{nom}[V]/I_{nom}[A]$, релативна вредност статорске отпорности једнака је $r_S = R_S^{rel} = R_S[\Omega]/Z_B[\Omega]$. Како је $r_S = R_S I_{nom}/U_{nom} = R_S I_{nom}^2/(U_{nom} I_{nom}) = R_S I_{nom}^2/P_{nom}$, може се закључити да податак о релативној вредности статорске отпорности r_S = 0,01 говори да постојање номиналне струје у отпорности статора ствара пад напона од 1%, као и то да су губици у бакру статора једнако 1% номиналне снаге. Базна вредност импедансе се најчешће одређује као количник ефективних вредности фазних напона и струја

$$Z_B[\Omega] = Z_{nom}[\Omega] = \frac{U_{nom,eff.}^{fazno}[V]}{I_{nom,eff.}^{fazno}[A]} \Rightarrow \frac{R_S I_{nom}}{U_{nom}} = R_S^{rel} . \tag{4.85}$$

Отпорност ротора $R_R[\Omega]$, сведена на страну статора, своди се на једнаку базну импедансу као и отпорност статора,

$$r_R = R_R^{rel} = \frac{R_R[\Omega]}{Z_B[\Omega]} = \frac{R_R[\Omega]}{Z_{nom}[\Omega]} . \tag{4.86}$$

Струје и напони статора и ротора се своде (то јест релативизују) на бази номиналних вредности, тако да се релативна вредност од 1, односно 100%, односи на номинални струју и напон,

$$i_S = I_S^{rel} = \frac{I_S[A]}{I_{nom}[A]}, \quad u_S = U_S^{rel} = \frac{U_S[V]}{U_{nom}[V]} . \tag{4.87}$$

При свођењу, уобичајено је да се ефективна вредност напона или струје дели са номиналном ефективном вредношћу. При свођењу, може се узети и вршна вредност, али је тада неопходно делити је са номиналном вршном вредношћу релевантне величине. Тако је ефективну вредност напона од 110 V могуће поделити са номиналном ефективном вредношћу напона од 220 V, чиме се добија да је u_S = 0,5. Исти резултат се добија дељењем вршних вредности, 155,56/311,12 = 0,5.

Релативне вредности реактанси, односно одговарајућих индуктивности, добијају се тако што се претпостави да у њима постоји струја номиналне учестаности ω_S. Релативна вредност индуктивности има исту вредност као и релативна вредност реактансе,

$$l_S = L_S^{rel} = \frac{L_S[\mathrm{H}]\omega_{Snom}[\mathrm{rad/s}]}{Z_{nom}[\Omega]}, \quad x_S = L_S^{rel} = X_S^{rel} \ . \tag{4.88}$$

Релативна вредност флукса се добија дељењем амплитуде вектора флукса статора или ротора са базном вредношћу флукса $\Psi_B = U_{nom(m)}/\omega_{Snom}$. Код одређивања базне вредности, узима се количник вршне вредности номиналног напона $U_{nom(m)}$ и номиналне статорске учестаности. Уколико се посматра флукс фазних намотаја, који има простопериодичну промену, могуће је дефинисати његову ефективну вредност. Овакав приступ, то јест рад са ефективним вредностима флукса се ређе користи. Амплитуде статорског и роторског флукса, Ψ_S и Ψ_R, које су предмет релативизације, представљају вршне вредности фазног флукса, односно модуле одговарајућег вектора флукса, на пример $\Psi_S^2 = \Psi_{\alpha S}^2 + \Psi_{\alpha S}^2$. Вршне вредности флукса у намотајима се могу одредити из заменске шеме за устаљена стања. На пример, међусобни флукс, односно флукс магнетисања Ψ_m се може одредити израчунавањем $|\underline{\Psi}_m| = |L_m\underline{I}_m| = |L_m\underline{I}_S + L_m\underline{I}_R|$, где се струје $\underline{I}_S$ и $\underline{I}_R$ одређују решавањем заменске шеме за устаљена стања.

$$\Psi_S^{rel} = \frac{\Psi_S[\mathrm{Wb}]}{\Psi_B[\mathrm{Wb}]}, \ \Psi_R^{rel} = \frac{\Psi_R[\mathrm{Wb}]}{\Psi_B[\mathrm{Wb}]}, \ \Psi_{\gamma S}^{rel} = \frac{\Psi_{\gamma S}[\mathrm{Wb}]}{\Psi_B[\mathrm{Wb}]}, \tag{4.89}$$

$$\Psi_B[\mathrm{Wb}] = \frac{U_{nom}[\mathrm{V}]}{\omega_{Snom}[\mathrm{rad/s}]}.$$

Одређивање базне вредности флукса заснива се на једначини равнотеже напона у фазном намотају статора, $u_a = R_a i_a + \mathrm{d}\Psi_a/\mathrm{d}t$. Уколико се занемари пад напона на статорској отпорности, тада је $u_a \approx \mathrm{d}\Psi_a/\mathrm{d}t$. Ако се флукс простопериодично мења са учестаношћу ω_S, однос напона, учестаности и флукса је $U_S = \Psi_S\omega_S$. Стога се за базну вредности флукса узима $\Psi_B = U_{nom}/\omega_{Snom}$.

Коначна вредност пада напона на статорској отпорности R_aI_a умањује електромоторну силу у статорском намотају $\mathrm{d}\Psi_a/\mathrm{d}t$, тако да ће релативна вредност статорског флукса који постоји у условима номиналног напајања бити мања од 1.

Релативна вредност брзине обртања се најчешће одређује као $\Omega_m^{rel} = \omega_m^{rel} = \Omega_m/\Omega_S = \omega_m/\omega_S$. Овакав избор базне вредности брзине омогућује да се релативно клизање s може израчунати као $s = 1 - \Omega_m^{rel}$. С друге стране, релативна (сведена) вредност номиналне брзине обртања $\Omega_{nom} < \Omega_S$ није једнака један, већ је $\Omega_{nom}/\Omega_S = 1 - s_{nom}$. У стручној литератури постоји одређени број радова у којима се за базну вредност брзине узима номинална бр-

зина. Тада се релативна брзина обртања одређује као $\Omega_m^{rel} = \Omega_m/\Omega_{nom}$, при чему је релативна вредност синхроне брзине већа од један, па је овакав приступ од мањег значаја.

Релативна вредност електромагнетског момента се одређује тако што се апсолутна вредност (то јест изражена у [Nm]) подели са одабраном базном вредношћу M_B[Nm]. За базну вредност момента могуће је узети номинални моменат M_{nom}, и тада ће релативна вредност момента у устаљеном стању бити једнака (100%). Узимање номиналног момента за базну вредност момента има своје недостатке. Стога се базна вредност момента најчешће одређује као M_B[Nm] = S_{nom}[VA]/Ω_{Snom}[rad/s] > M_{nom}, где је S_{nom} = $3U_{(f)nom}I_{(f)nom}$ номинална вредност привидне снаге асинхроне машине, док је $\Omega_{Snom} = \omega_{Snom}/p$ синхрона брзина која постоји код напајања из трофазног извора номиналне кружне учестаности.

Релација $M_B > M_{nom}$ произилази из везе номиналне привидне и номиналне корисне снаге машине. Привидна снага S_{nom} је већа од номиналне снаге машине. Номинална снага P_{nom}, коју асинхрони мотор даје на вратилу, једнака је $P_{enom}\eta_{nom}$, где је $P_{enom}= S_{nom}\cos(\varphi_{nom})$ снага извора, то јест улазна електрична снага у номиналном режиму рада, док је $\eta_{nom} = P_{nom}/P_{enom} < 1$ степен корисног дејства. Номинална снага је једнака производу номиналног момента, који се добија на вратилу и номиналне брзине обртања $\Omega_{nom} = \Omega_{Snom}(1-s_{nom})$, где је s_{nom} номинална вредност релативног клизања машине. Изједначавањем $P_{nom}= M_{nom}\,\Omega_{Snom}(1-s_{nom})$ и $P_{nom} = S_{nom}\cos(\varphi_{nom})\eta_{nom}$, добија се веза базне вредности момента $M_B = S_{nom}/\Omega_{Snom}$ и номиналне вредности M_{nom},

$$\frac{M_{nom}}{M_B}=\frac{M_{nom}}{\left(\dfrac{S_{nom}}{\Omega_{Snom}}\right)}=\frac{\cos(\varphi_{nom})\eta_{nom}}{1-s_{nom}}<1 \qquad (4.90)$$

<u>Питање (4.19):</u>

Доказати да је за асинхрону машину $\cos(\varphi_{nom})\eta_{nom}/(1-s_{nom})<1$.

Одговор (4.19):

У номиналном режиму рада, снага обртног поља $P_{ob} = P_{enom}–P_{cu1}-P_{Fe1}$ се дели на губитке у ротору, једнаке $s_{nom}P_{ob}$, и снагу $P_{mR} = (1-s_{nom})P_{ob}$, која се претвара из електричне у механичку и једнака је $P_{mR} = M_{em}\Omega_{nom}$. Моменат $M_{em}>M_{nom}$ је незнатно већи од номиналног због губитака услед трења и вентилације. За случај да се може занемарити снага губитака у намотајима статора P_{cu1}, губици у магнетском колу статора P_{Fe1}, као и губици на трење и вентилацију, веза улазне и излазне снаге би се свела на $P_{nom} = P_{enom}(1-s_{nom})$. Тада би степен корисног дејства узео вредност $\eta_{nom} = (1-s_{nom})$.

Имајући у виду да сви поменути губици постоје у машини у мањем или већем позитивном износу, закључује се да је $\eta_{nom} < (1\text{-}s_{nom})$. Једновремено је и $\cos(\varphi_{nom}) < 1$, тако да је тражена тврдња доказана. Као последица, релативна вредност номиналног момента, добијена свођењем на базну вредност $M_B = S_{nom}/\Omega_{Snom}$, мања је од један.

4.43 Сведена вредност динамичког момента

Избор базне вредности момента $M_B = S_{nom}/\Omega_{Snom}$ за последицу има $M_{nom}^{rel} < 1$, дакле, сведена вредност номиналног момента је мања од 1. На пример, у номиналном режиму ће постојати моменат релативне вредности 0,90, односно 90%. Зато је потребно објаснити разлоге за избор $M_B = S_{nom}/\Omega_{Snom}$ уместо $M_B = M_{nom}$. Проблеми који се јављају као последица одлуке $M_B = M_{nom}$ могу се сагледати анализом израза који одређује моменат у функцији релативних вредности струја и флукса. Полазећи од израза за електромагнетски моменат током прелазних процеса,

$$M_{em} = \frac{3p}{2}\left(\psi_d i_q - \psi_q i_d\right),$$

свођење момента на базну вредност $M_B = M_{nom}$ и усвајање ознака Ψ_{dnom}, Ψ_{qnom}, i_{dnom}, i_{qnom} за вредности dq компоненти флукса и струје статора у номиналном режиму рада добија се израз

$$M_{em}^{rel} = \frac{M_{em}}{M_{nom}} = \frac{\left(\psi_d i_q - \psi_q i_d\right)}{\left(\psi_{dnom} i_{qnom} - \psi_{qnom} i_{dnom}\right)}\,. \tag{4.91}$$

Дељењем бројиоца и имениоца претходног израза са номиналним вредностима флукса $\Psi_{nom} = \Psi_B$ и $I_{nom} = I_B$, добија се израз за релативну вредност момента који одређује M_{em}^{rel} у функцији релативних (сведених) вредности струје и флукса. Ознаке које стоје у имениоцу доњег израза представљају релативне вредности флукса и струје статора које постоје у номиналном режиму рада.

$$M_{em}^{rel} = \frac{M_{em}}{M_{nom}} = \frac{\left(\psi_d^{rel} i_q^{rel} - \psi_q^{rel} i_d^{rel}\right)}{\left(\psi_{dnom}^{rel} i_{qnom}^{rel} - \psi_{qnom}^{rel} i_{dnom}^{rel}\right)} = K_{RM}\left(\psi_d^{rel} i_q^{rel} - \psi_q^{rel} i_d^{rel}\right), \tag{4.92}$$

где је

$$K_{RM} = \frac{1}{\left(\psi_{dnom}^{rel} i_{qnom}^{rel} - \psi_{qnom}^{rel} i_{dnom}^{rel}\right)}$$

Константа K_{RM} у претходном изразу није једнака 1, већ има вредност $K_{RM} > 1$ која зависи од номиналног клизања, номиналног фактора снаге и степена корисног дејства у номиналном режиму рада, што тражи да се за сваку машину користи засебан коефицијент K_{RM} у горе датом изразу за моменат. Вредност $1/K_{RM}$ је једнака векторском производу релативне вредности флукса и струје статора који постоје у номиналном режиму рада. У номиналном режиму струја узима номиналну вредност, те јој је релативна вредност једнака један. Дакле, $i^{rel}_{dnom}{}^2 + i^{rel}_{qnom}{}^2 = 1$. У условима номиналног напајања, релативна вредност статорског флукса $\Psi_S^2 = \Psi^{el}_{dnom}{}^2 + \Psi^{el}_{qnom}{}^2$ је незнатно мања од 1, услед пада напона $R_S i_S$. Векторски производ међу векторима јединичне амплитуде једнак је синусу угла између њих, тако да је $K_{RM} = 1$ могуће само у случају да вектори статорског флукса и струје образују угао $\pi/2$, што није могуће имати у номиналном, устаљеном режиму.

<u>Питање (4.20):</u>

Проценити угао који постоји између статорског флукса и струје асинхроне машине која ради у номиналном режиму рада. Користити заменску шему као и околност да се угао може одредити поређењем фазора флукса и струје.

Одговор (4.20):

Полазећи од заменске шеме за устаљена стања, процену је могуће начинити тако што се занемари пад напона на серијској импеданси статора $(R_S + \mathrm{j}\omega_S L_{\gamma S})\underline{I}_S$. После занемарења, напон на грани магнетисања $\underline{U}_m = \underline{U}_S - (R_S + \mathrm{j}\omega_S L_{\gamma S})\underline{I}_S$ је приближно једнак напону напајања, $\underline{U}_m = \mathrm{j}\omega_S \underline{\Psi}_m \approx \underline{U}_S = \mathrm{j}\omega_S \underline{\Psi}_S$, чиме се и флукс магнетисања сматра приближно једнаким статорском флуксу, $\underline{\Psi}_m \approx \underline{\Psi}_S$. Струја статора је једнака збиру струје магнетисања $\underline{I}_m$ и струје $\underline{I}_{R1} = -\underline{I}_R$, која постоји у колу ротора. Фазни став и просторна оријентација флукса $\underline{\Psi}_m \approx \underline{\Psi}_S$ одређени су фазним ставом струје магнетисања $\underline{I}_m$. Струја $\underline{I}_{R1}$ једнака је количнику напона $\underline{U}_m = \mathrm{j}\omega_S \underline{\Psi}_m$ и роторске импедансе $(R_R/s + \mathrm{j}\omega_S L_{\gamma R})$. Клизање $s=s_{nom}$ је значајно мање од 1, тако да је $R_R/s >> \omega_S L_{\gamma R}$. Дакле, номинална вредност импеданса ротора је доминантно отпорна, тако да ће фазно заостајање струје $\underline{I}_{R1}$ за напоном $\underline{U}_m$ бити релативно мало, приближно једнако $s_{nom}\omega_S L_{\gamma R}/R_R$ rad. Може се закључити да струја $\underline{I}_{R1}$ фазно предњачи у односу на струју $\underline{I}_m$ за нешто мање од $\pi/2$. Статорска струја $\underline{I}_S = \underline{I}_{R1} + \underline{I}_m$ ће такође предњачити у односу на струју $\underline{I}_m$ и статорски флукс $\underline{\Psi}_m \approx \underline{\Psi}_S$. Фазно предњачење ће бити веће уколико је струја магнетисања мања, али никада неће достићи вредност од $\pi/2$.

Претходно спроведена анализа показује да у номиналном раду асинхроне машине угао између статорског флукса и струје не може имати вредност $\pi/2$, тако да је коефицијент K_{RM} већи од 1. Коефицијент се може изразити у функцији φ_{nom}, η_{nom}, и s_{nom}. Одређивање коефицијента K_{RM}, неоп-

ходног за израчунавање момента у функцији релативних вредности флукса и струје, у изразу $M_{em} = K_{RM}\,(\Psi_d i_q - \Psi_q i_d)$, представља потешкоћу. Стога се моменат не своди своди на базну вредност $M_B = M_{nom}$, већ се узиме $M_B = S_{nom}/\Omega_{Snom}$.

Као последица избора $M_B = S_{nom}/\Omega_{Snom}$, образац за израчунавање релативне вредности момента је веома једноставан,

$$M_{em}^{rel} = \frac{M_{em}}{M_B} = \left(\psi_d^{rel} i_q^{rel} - \psi_q^{rel} i_d^{rel}\right). \tag{4.93}$$

У обрасцу нема коефицијената као што је K_{RM}, 3/2, или p. Када је потребно одредити моменат у апсолутним јединицама [Nm], добијена релативна вредност се множи са $M_B = S_{nom}/\Omega_{Snom}$. Приказане предности чине да се недостатак $M_{nom}^{rel} < 1$ може толерисати. Сведена вредност номиналног момента M_{nom}^{rel} је мања од 1, тако да се у номиналном режиму рада има моменат чија релативна вредност мања од 100%.

Проблем у избору базне вредности момента се не јавља код машина за једносмерну струју у облику какав је претходно приказан. Један од разлога је и тај да се улазна снага арматурног намотаја машине за једносмерну струју добија множењем струје и напона, при чему резултат није потребно помножити са фактором снаге $\cos\varphi_{nom}$, што је случај код машина за наизменичну струју.

4.44 Одређивање параметара заменске шеме

Анализа заменске шеме за устаљена стања тражи познавање параметара R_S, R_R, $L_{\gamma S}$, $L_{\gamma R}$, L_m. Потребно је имати представу о оквирним вредностима параметара. Поред тога, треба се упознати са могућностима за експериментално одређивање параметара и за процену параметара на бази података датих на натписној плочици машине.

Статорска отпорности се може одредити тако што се два од три прикључка статорског намотаја, повезаног у звезду, повежу на извор једносмерне струје. Мерењем једносмерног напона између прикључака, добија се збир отпорности намотаја две фазе статора, $2R_S = U_{JSS}/I_{JSS}$. Релативна вредност отпорности статора R_S се креће од 10%, код мотора чија је снага реда 100 W, па до 0,1%, што је случај код мотора снаге 1 MW.

<u>Питање (4.21):</u>

Зашто је релативна вредност отпорности намотаја мања код мотора веће снаге?

Одговор (4.21):

У машинама постоје губици у магнетском и струјном колу, то јест губици у гвожђу и бакру. Специфична снага губитака у гвожђу, то јест износ губитака у делу јединичне запремине или масе, зависи од магнетске индукције и учестаности са којом се мења индукција у магнетском колу. Ако у две различите машине постоји иста густина флукса (индукција B) и једнака учестаност, тада је специфична снага губитака у гвожђу ових машина једнака. Однос P_{Fe1} и P_{Fe2} једнак је количнику запремина магнетских кола V_{1f}/V_{2f}, односно маса m_{1f}/ m_{2f}.

Специфична снага губитака у бакру, то јест износ губитака у делу јединичне запремине или масе, зависи од густине струје [A/mm^2] и специфичне проводности метала од кога су начињени проводници. Ако у две различите машине постоји иста густина струје, тада је специфична снага губитака у намотајима ових машина једнака. Однос P_{Cu1} и P_{Cu2} зависи од количине материјала од кога су начињени намотаји, то јест одређен је количником запремина V_{1Cu}/V_{2Cu}, односно маса m_{1Cu}/ m_{2Cu}.

Ако једна од посматраних машина има двоструко већи пречник и осну дужину, њена запремина је осам пута већа ($V \sim l^3$). Уз једнаке густине струје, једнаку индукцију B и фреквенцију f, снага губитака у већој машини је осам пута већа.

Губици енергије у магнетском и струјном колу електричних машина стварају топлоту која увећава температуру виталних делова машине. Очување интегритета електричне изолације, феромагнетика, лежајева и других делова захтева да температура не пређе максималну дозвољену вредност да се машина не би оштетила. Стога се електричне машине морају хладити, неопходно је располагати начином за одвођење топлоте. У устаљеном стању, кад температура машине достигне устаљену вредност и престане да расте, топлота створена губицима у машини мора бити једнака топлоти која се одводи хлађењем. Различити начини хлађења (конвекција, кондукција, зрачење) одводе топлоту у износу који је пропорционалан површини додирне површини између електричне машине и амбијента, односно површини додира делова машине са расхладним флуидом. Површине $S \approx l^2$ машине која има два пута већи пречник и два пута већу осну дужину су четири пута веће од површина машине мањих димензија.

Може се закључити да машине чије су димензије l пута веће имају l^3 пута веће губитке, док је њихова способност за одвођење топлоте увећана l^2 пута. Бржи раст снаге губитака указује да се код великих машина јавља проблем одвођења топлоте. Стога се машине велике снаге пројектују и израђују тако да имају мање вредности магнетске индукције у гвожђу, као и мање густине струје у намотајима. Као последица, намотаји се граде тако да имају већу површину попречног пресека, па је њихова отпорност мања. Стога је и релативна вредност статорске отпорности мања за машине веће

снаге. Потребно је уочити да податак о R_S = 0,001 за машину снаге 1 MW значи да се у намотајима њеног статора снага од 0,001×1 MW = 1 kW претвара у топлоту. Одвођење топлоте брзином од 1000 J у секунди је својеврстан технички проблем. Значајније увећање R_S код оваквих машина довело би до неприхватљивог пораста температуре.

Однос снаге губитака и расхладне површине је код малих машина знатно повољнији, па се у пракси могу имати релативне вредности R_S веће од 10 %.

Индуктивност магнетисања L_m одређује струју $\underline{I}_m = \underline{I}_S + \underline{I}_R$, потребну за достизање жељеног флукса $\underline{\Psi}_m = L_m \underline{I}_m$. Струја магнетисања $\underline{I}_m$ је знатно мања од номиналне струје. По аналогији са трансформатором, са статором у улози примара и ротором у улози секундара, струја магнетисања одговара струји *празног хода*. У случају да асинхрона машина није спрегнута са теретом, вратило се слободно обрће тако да је моменат оптерећења близак нули. Ротор се тада обрће брзином која је блиска синхроној, па је релативно клизање $s \approx 0$. Импеданса R_R/s узима веома велику вредност, па се роторска струја може занемарити. Заменска шема се своди на редну везу статорске отпорности R_S, индуктивности расипања статора и индуктивности магнетисања.

Оглед у коме је асинхрона машина има номинални напон, номиналне учестаности на крајевима статора, при чему вратило није оптерећено зове се *оглед празног хода*. У устаљеном стању, струја статора једнака је $\underline{I}_0 = \underline{U}_{Sn}/(R_S + \mathrm{j}\omega_{sn}L_S)$. Занемарењем статорске отпорности и расипне индуктивности, добија се да је $L_S \approx L_m \approx U_{Sn}/(I_0\,\omega_{sn})$.

Струја празног хода асинхроних машина мале снаге креће се у опсегу од 50% до 70% номиналне струје. Код машина велике снаге, струја празног хода може бити мања од 20% номиналне струје.

<u>Питање(4.22)</u>:

Зашто је релативна вредност струје празног хода мања код машина велике снаге?

Одговор (4.22):

Машине велике снаге се пројектују тако да имају мању вредност магнетске индукције у магнетском колу. Машине велике снаге се теже хладе, па се у фази пројектовања узимају мање вредности магнетске индукције и густине струје у проводницима. Карактеристика магнетисања материјала (B-H крива) има већи нагиб $\Delta B/\Delta H$ у делу који је ближи координатном почетку. Стога је магнетска пермеабилност већа, док је отпорност $R_{\mu Fe}$ дела магнетског кола начињеног од гвоздених лимова мања. Поред мање отпорности $R_{\mu Fe}$, машине велике снаге имају и повољнији однос ширине ваздушног зазора δ и пречника машине D. Услед мањег односа δ/D, удео

магнетске отпорности у зазору је мања. Мање вредности магнетске отпорности резултују већим вредностима индуктивности, која је обрнуто пропорционална отпорности R_μ. Сопствена индуктивност статорског намотаја L_S је пропорционална количнику N^2/R_μ, док се индуктивност магнетисања може одредити као $L_m = kL_S$. Из наведеног се закључује да је утицај магнетске отпорности мање изражен код машина велике снаге, тако да оне имају веће релативне вредности индуктивности L_m и мање релативне вредности струје празног хода.

Индуктивности расипања статора и ротора се могу сматрати приближно једнаким, $L_{\gamma S} \approx L_{\gamma R}$. У случају да се кратко спојени роторски кавез еквивалентира намотајем који има једнак број навојака као и статор $N_S = N_R$, све роторске величине се своде на статорску страну без измене, због јединичног преносног односа $m = N_S/N_R$. Индуктивности статора и ротора су пропорционалне количнику квадрата броја навојака и магнетске отпорности. Међусобни и расипни флукс статора и ротора постоје у магнетским колима приближно једнаке дужине и попречног пресека, деле заједнички ваздушни зазор, и сачињена су од лимова једнаке дебљине и пермеабилности. Стога је оправдано претпоставити да је $L_S \approx L_R$ и $L_{\gamma S} \approx L_{\gamma R}$. Претпоставка је валидна за већину асинхроних машина. Одступања се јављају код машина са значајним разликама у димензијама и облику статорских и роторских жлебова.

Приближна вредност расипне индуктивности се може одредити из *огледа кратког споја*. Током огледа, ротор машине је *закочен*, то јест спречено је његово покретање тако да је брзине обртања ротора Ω_m једнака нули, док је релативно клизање s једнако један. Импеданса R_R/s се своди на релативно малу вредност R_R. Занемарењем струје магнетисања, еквивалентна импеданса мотора се своди на $\underline{U}_S/\underline{I}_S = R_S + R_R + \mathrm{j}\omega_s L_{\gamma S} + \mathrm{j}\omega_s L_{\gamma R}$. Код машина чија снага превазилази десетак киловата, релативне вредности отпорности $R_S + R_R$ су тако мале да се могу занемарити. Индуктивност расипања се тада одређује као $L_{\gamma S} \approx L_{\gamma R} = ½\ U_S/(I_S\omega_s)$, где су U_S и I_S ефективне вредности напона и струје статора, измерене у огледу кратког споја. Уколико се ради о малим машинама, код којих се отпорност намотаја не може занемарити, током мерења је потребно одредити и фазни став струје и напона, како би се одредио реални и имагинарни део импедансе кратког споја $\underline{Z}_K = R_S + R_R + \mathrm{j}\omega_s L_{\gamma S} + \mathrm{j}\omega_s L_{\gamma R}$.

Реактанса кратког споја $\omega_{sn}(L_{\gamma R}+L_{\gamma S})$, која постоји при номиналној учестаности напајања има вредности од 0,05 до 0,3. Мање вредности се сусрећу код нисконапонских (400 V) машина мале снаге, док се веће вредности имају код машина за средњи напон (6 kV) и снаге реда мегавата. Код машина за веће снаге и напоне, растојање између проводника у оквиру статорских и роторских намотаја је веће. Већа растојања су потребна због

ефикаснијег хлађења и већих напонских напрезања. Као последица, коефицијент спреге намотаја k је мањи, што увећава индуктивности расипања $L_{\gamma S} \approx L_{\gamma R} \approx (1\text{-}k)L_S$.

$$L_{\gamma S} = L_S - L_m, \quad L_{\gamma R} = L_R - L_m. \tag{4.94}$$

Слика 4.28: Одређивање еквивалентне индуктивности расипања из заменске шеме у којој су отпорности изједначене са нулом.

Реактанса која постоји у кратком споју асинхроне машине приближно је једнака збиру статорске и роторске реактансе расипања $\omega_{sn}(L_{\gamma R}+L_{\gamma S}) = X_{\gamma S} + X_{\gamma R}$. Разлика између реактансе кратког споја $L_{\gamma e}\Omega_{sn}$ и збира статорске и роторске реактансе расипања јавља се због реактансе $L_m\Omega_{sn}$.

Статорски и роторски намотај асинхроне машине су спрегнути магнетским пољем, на једнак начин као и примар и секундар трансформатора. Кратко спојени асинхрони мотор, код кога је $R_R/s = R_R << \omega_{sn}(L_{\gamma R}+L_{\gamma S})$, еквивалентан је трансформатору чији је секундар кратко спојен. Улазна (еквивалентна) индуктивност $L_{\gamma e} = X_{\gamma e}/\omega_{sn}$ кратко спојене асинхроне машине, то јест *еквивалентна индуктивност расипања* једнака је

$$L_{\gamma e} = L_{\gamma S} + \frac{L_m L_{\gamma R}}{L_m + L_{\gamma R}} = \frac{L_{\gamma S} L_R + L_{\gamma m} L_{\gamma R}}{L_R} = \tag{4.95}$$

$$= \frac{L_{\gamma S} L_R + L_m L_R - L_m L_R + L_{\gamma m} L_{\gamma R}}{L_R} = \frac{L_S L_R - L_m^2}{L_R}.$$

Добијени израз је сличан изразу за улазну индуктивност L_u кратко спојеног трансформатора за који је позната сопствена индуктивност примара (L_1), сопствена индуктивност секундара (L_2) и међусобна индуктивност M. Израз гласи $L_u = (L_1L_2 - M^2)/L_2$.У случају када је $L_{\gamma R} << L_m$, може се сматрати да је $(L_{\gamma R}+L_{\gamma S}) \approx L_{\gamma e}$.

Релативна вредност реактансе $L_{\gamma e}\omega_{sn}$ је релативно мала и креће се од 0,05 до 0,25. Релативна вредност струје кратког споја је приближно једнака количнику релативне вредности напона и релативне вредности реактансе кратког споја. Дакле, довођењем номиналног напона на кратко спојену асинхрону машину, добијају се струје које вишеструко прелазе номиналну вредност. Услед великих губитака, рад машине у описаном режиму мора бити веома кратак, како не би дошло до нежељеног пораста температуре и оштећења изолације. Стога се оглед кратког споја најчешће обавља са сниженим статорским напоном, значајно мањим од номиналног. У случају када се изводи оглед кратког споја са номиналном струјом (то јест, i_S = 1 [p.j.], односно једна релативна јединица), тада је потребно да напон на крајевима намотаја буде $u_S \approx x_{\gamma e} < 1$. У случају да се оглед врши при номиналном напону, струја је $i_S \approx 1/x_{\gamma e}$ и вишеструко превазилази номиналну струју. Реактанса добијена огледом кратког споја при номиналном напону може бити различита од реактансе која се одређује из огледа кратког споја са номиналном струјом. Разлика се може јавити услед појаве магнетног засићења у магнетском колу расипног флукса. Наиме, у условима када струја вишеструко превазилази номиналну, магнетски материјал у колу расипног флукса може доћи у стање магнетског засићења, што доводи до увећања магнетске отпорности и смањења индуктивности.

Отпорност роторског намотаја сведена на страну статора се обележава ознаком R_R. Релативна вредност параметра R_R је блиска релативној вредности R_S. Код машина мале снаге, R_R је блиско 10%, док се код мотора снага реда 1 MW може имати $R_R \approx$0,1%. У основи, параметар R_R у заменском колу би се могао одредити мерењем или израчунавањем отпорности роторских штапова, одређивањем еквивалентног полифазног намотаја и свођењем роторског кола на страну статора. У пракси, ово је тешко остварити.

Мерење отпорности ротора

Један од начина за процену параметра R_R полази од реактансе добијене огледом кратког споја $\underline{Z}_K = R_S + R_R + \mathrm{j}\omega_s L_{\gamma S} + \mathrm{j}\omega_s L_{\gamma R}$, од чијег се реалног дела може одузети отпорност статорског намотаја и тако добити R_R. Грешке се јављају стога што, током огледа кратког споја, у ротору постоје струје фреквенције једнаке статорској, f_S = 50 Hz, док се током уобичајеног рада машине у ротору имају струје чија је фреквенција одређена клизањем, и износи $f_k \sim$ 0,5 .. 5 Hz. Попречни пресек роторског проводника је одређен обликом жлеба. Код већих учестаности, постоји ефекат потискивања роторске струје ка делу жлеба ближе зазору, тако да је густина струје на дну жлеба најмања. Неравномерна расподела струје на већим учестаностима

доводи до увећања еквивалентне отпорности. Ефекат потискивања струје (*skin* ефекат) видљив је у роторским штаповима и на фреквенцијама реда величине 50 Hz. Стога је роторска отпорност која се мери у огледу кратког споја значајно већи од отпорности која постоји за струје са учестаношћу клизања.

Параметар R_R се може проценити на основу временске константе роторског кола, $\tau_R = L_R/R_R$. Један од огледа који даје увид у вредност τ_R тражи да се неоптерећена асинхрона машина ($M_m = 0$) покрене довођењем номиналног напона номиналне учестаности. После залетања до синхроне брзине, успоставља се устаљени режим, у коме су моменат, снага и клизање блиски нули, док у магнетском колу постоји номинални флукс. Потребно је располагати опремом за мерење облика линијског напона, што може бити дигитални осцилоскоп са меморијом. После отварања прекидача који статорске прикључке повезује са напојном мрежом, статорски прикључци се раздвајају од напојне мреже па се статорске струје изједначавају са нулом. Кратко спојене контуре роторског кавеза се противе промени флукса. У њима се јавља електромоторна сила и струја ротора која тежи да спречи промену роторског флукса. У заменској шеми се прекид статорске струје манифестује тако да се струја магнетисања I_m која је постојала пре искључења прекидача сада добија из роторског кола. Роторска струје је у празном ходу била једнака нули, а после отварања прекидача има јачину која одговара пређашњој струји магнећења. Обртање ротора ствара обртно поље брзине блиске синхроној. У првим тренуцима, нема већих измена у амплитуде и флукса, па се у намотајима статора индукују електромоторне силе амплитуде $\Psi_m\omega_S$, блиске номиналном напону. Како је статорско коло раскинуто, струја ротора и струја магнетисања постоје у колу са три елемента, L_m , $L_{\gamma R}$ и R_R. Струја у роторском колу ће експоненцијално опадати са временском константом одређеном количником индуктивности и отпорности у колу, $\tau_R = L_R/R_R$. Као последица, обвојница (анвелопа) која обухвата простопериодични линијски напон ће опадати по закону $\exp(-t/\tau_R)$. Дакле, одређивањем анвелопе линијског напона, роторска временска константа се може проценити као време потребно да амплитуда опадне за $1/e$, односно на 37% иницијалне вредности.

Приближна процена параметра R_R се може начинити на основу номиналних података о машини. Параметар R_R се може проценити из анализе величина у заменском колу у номиналном режиму рада, у коме статорски напон U_S и струја I_S имају јединичне релативне вредности. Занемарењем статорске отпорности и индуктивности магнетисања, заменска шема се своди на редну везу реактансе кратког споја $L_{\gamma e}\omega_{sn}$ и роторске отпорности R_R/s. Напон који у номиналном режиму рада постоји на отпорности R_R/s једнак је $(U_n^2 - (I_nL_{\gamma e}\omega_{sn})^2)^{0,5}$. Уколико се користе релативне вредности, та-

да је u_n=1 и i_n=1. Реактанса $L_{\gamma e}\omega_{sn}$ има релативну вредност која се креће од 0,05 до 0,25. Фазор пада напона на овој реактанси је нормалан на фазор I_nR_R/s, тако да пад напона $I_nL_{\gamma e}\omega_{sn}$ није од пресудног утицаја на роторки напон. У случају да је $L_{\gamma e}\omega_{sn}$ = 0,25, релативна вредност роторског напона I_nR_R/s је 97%. Дакле, могуће је сматрати да у номиналном раду на импеданси R_R/s заменске шеме постоји номинални напон, тако да је $R_R/s_n = U_n/I_n = Z_B$. На основу уведених занемарења, $R_R \approx s_nZ_B$. Другим речима, релативна вредност роторске отпорности $r_R = R_R/Z_B$ блиска је номиналној вредности релативног клизања s_n. Као пример, за асинхрони мотор на чијој натписној плочици стоји да је I_n = 22 A, U_{fn} = 220 V (то јест 380 V), f_n = 50 Hz и n_n = 2700 o/min, може се дати процена параметра $R_R \approx s_nZ_B$ = 1 Ω.

4.45 Анализа механичке карактеристике

Електромагнетски моменат асинхроне машине је једнак количнику снаге обртног поља P_{ob}, коју статор предаје ротору, и синхроне брзине $\Omega_S = \omega_S/p$ којом се поље обрће у ваздушном зазору. На основу анализе заменске шеме за устаљена стања, уз уважавање струје $\underline{I}_m$ у грани магнетисања, моменат се може израчунати на основу израза

$$M_{em} = \frac{P_{ob}}{\Omega_S} = \frac{3}{2\Omega_S}\frac{R_R}{s}I_R^2 \ .$$

Решавањем заменске шеме која је дата на слици 4.29 могу се добити струје статора и ротора.

Слика 4.29: Заменска шема асинхроне машине.

Роторска струја је једнака

$$\underline{I}_R = \frac{\underline{Z}_m \underline{U}_S}{\underline{Z}_m \underline{Z}_S + \underline{Z}_m \underline{Z}_R + \underline{Z}_S \underline{Z}_R}\ , \tag{4.96}$$

где је

$$\underline{Z}_m = \mathrm{j}\omega_s L_m,\ \underline{Z}_S = R_s + \mathrm{j}\omega_s L_{\gamma s},\ \underline{Z}_R = R_R / s + \mathrm{j}\omega_s L_{\gamma s}.$$

У устаљеном стању, моменат је једнак

$$M_{em} = \frac{P_{ob}}{\Omega_S} = \frac{3}{2\Omega_S}\frac{R_R}{s} I_R^2 = \tag{4.97}$$

$$= \frac{3pR_R}{2\omega_S s}\ \frac{U_S^2}{\left(\nu^R R_S + \nu^S R_R / s\right)^2 + \omega_S^2\left(\nu^S L_{\gamma R} + L_{\gamma S}\right)^2},$$

где је $\nu^S = L_S/L_m$ и $\nu^R = L_R/L_m$. Ознаке U_S и I_R представљају амплитуде вектора статорске струје и напона, односно вршне вредности фазних величина. Исти израз се може користити тако што се на место ознаке U_S уврсти *ефективна* вредност фазног напона, с тим што тада вредност горњег израза треба удвостручити, чиме коефицијент 3/2 постаје 3/2 x 2 = 3. Коефицијенти ν^S и ν^R су блиски јединици и зависе од расипања машине. Индуктивност магнетисања L_m је десетинама пута већа од индуктивности расипања $L_{\gamma S}$, тако да се струја магнетисања може сматрати значајно мањом од струје статора или ротора. Другим речима, коефицијенти $\nu^S = L_S/L_m$ и $\nu^R = L_R/L_m$ су блиски јединици, па се у изразу за моменат могу користити вредности $\nu^S = \nu^R \approx 1$. Уз наведене претпоставке, збир индуктивности расипања статора и ротора $L_{\gamma S} + L_{\gamma R}$ је тада једнак еквивалентној индуктивности расипања $L_{\gamma e}$, која стоји у имениоцу израза за моменат. Уз наведена занемарења, статорска и роторска струја су једнаке

$$\underline{I}_S \approx \underline{I}_R \approx \frac{\underline{U}_s}{(R_s + \frac{R_R}{s}) + \mathrm{j}\omega_s (L_{\gamma s} + L_{\gamma R})}, \tag{4.98}$$

а моменат је једнак

$$M_{em} = \frac{3pR_R}{2\omega_S s} \frac{U_S^2}{\left(R_S + R_R / s\right)^2 + \left(\omega_S L_{\gamma e}\right)^2} = \tag{4.99}$$

$$= 3\frac{1}{\Omega_S}\frac{R_R}{s}\frac{U_{S(eff)}^2}{\left(R_S + R_R / s\right)^2 + \left(\omega_S L_{\gamma e}\right)^2}.$$

Добијени израз се може користити за анализу механичке карактеристике асинхроне машине $M_{em}(\Omega_m)$, која представља промену момента у функцији брзине обртања ротора у устаљеном стању. Да би се одредио моменат, потребно је,

- одредити релативно клизање $s = (\Omega_S - \Omega_m)/\Omega_S$,
- одредити ефективну вредност фазног напона $U_{S(eff)}$,
- уврстити напон напајања $U_{S(eff)}$ (алтернативно, вршну вредност напона), синхрону брзину $\Omega_S = 2\pi f_S/p$ и отпорност R_R/s у израз за електромагнетски моменат,
- израчунати моменат према формули која садржи коефицијент 3, за случај да се користи ефективна вредност напона, односно 3/2, уколико број U_S представља вршну вредност фазног напона.

Овде ће бити показано да се, уз одређена занемарења, зависност момента од клизања s може представити функцијом

$$M_{em}(s) \approx \frac{K_1}{s + \frac{K_2}{s}} \tag{4.100}$$

и сликом 4.30.

У случају када се ради о двополној машини (p=1), постоји једнакост између кружне учестаности ω релевантних струја и напона, и одговарајућих механичких брзина обртања Ω, тако да се може сматрати да је $\Omega_S = \omega_s$, $\Omega_k = \omega_k$ и $\Omega_m = \omega_m$. Током даље анализе, узима се да је p=1, док се апсциса механичке карактеристике, која представља брзину ротора, може обележавати и ознакама ω или ω_m.

Анализа механичке карактеристике се може спровести тако што се случај са врло малим вредностима клизања разматра одвојено од случаја са врло великим вредностима клизања. У зони малих клизања, отпорност R_R/s је доминантни део импедансе која стоји у имениоцу израза за моменат. Струја статора и ротора су блиске вредности $U_S/(R_R/s)$. Моменат се може одредити користећи израз $M_{em} = (3/2)\ (s/R_R)(p/\omega_S)U_S^2$, где је U_S вршна вредност фазног напона.

Слика 4.30: Механичка карактеристика.

<u>Питање (4.23):</u>

Уколико се на место вршне вредности U_S у изразу за моменат користи ефективна вредност фазног напона, треба ли мењати коефицијент 3/2? Колика је ефективна вредност фазног напона ако је машина прикључена на нисконапонску мрежу?

Одговор (4.23):

Коефицијент који је имао вредност 3/2 добија вредност 3. Ефективна вредност фазног напона је 220 V.

4.46 Рад у области малих клизања

На основу разматрања принципа рада асинхроног мотора добијена је једначина (4.9) која показује да се при релативно малим вредностима клизања има моменат који је пропорционалан клизању. Уколико се ради о двополној машини где је $p = 1$, угаона брзина обртног поља Ω_S , то јест синхрона брзина једнака је кружној учестаности напајања ω_s. Ако је клизање мало, тада је и угаона брзина обртања ротора блиска синхроној. Будући да је клизање s мало, импеданса R_R/s је највећа од свих импеданси у имениоцу израза (4.99). Зато се израз за моменат своди на

$$M_{em} \approx \frac{3}{2}\frac{1}{\Omega_s}\frac{R_R}{s}\frac{U_s^2}{\left(\frac{R_R}{s}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad M_{em} \approx \frac{3p}{2}\frac{s}{R_R}\frac{1}{\omega_s}U_s^2 . \tag{4.101}$$

Дакле, моменат је пропорционалан релативном клизању. Множењем бројиоца и имениоца са кружном учестаношћу, израз добија облик

$$M_{em} \approx \frac{3p}{2}\frac{\omega_k}{R_R}\frac{1}{\omega_s^2}U_s^2 .$$

Уз претпоставку да се пад напона услед отпорности статорског намотаја може занемарити, количник вршне вредности фазног напона U_S и статорске кружне учестаности ω_S представља вршну вредност флукса у фазном намотају статора, односно, амплитуду вектора статорског флукса.

$$\psi_s \approx \frac{U_s}{\omega_s} \quad \Rightarrow M_{em} \approx \frac{3}{2}\frac{\psi_s^2}{R_R}\cdot\omega_k , \tag{4.102}$$

који одговара једначини (4.9) у одељку где се анализирају принципи рада. Дакле, у области малих клизања, моменат $M_{em} = 3p\omega_k\Psi_S^2/(2R_R)$ је пропорционалан клизању, квадрату статорског флукса, и обрнуто пропорционалан роторској отпорности. Може се закључити да је у зони малих клизања механичка карактеристика асинхроног мотора линеарна, те да има стрмину која је пропорционална односу Ψ_S^2/R_R.

Слика 4.31: Механичка карактеристика у области малих клизања.

4.47 Рад у области великих клизања

На апсциси механичке карактеристике приказана је брзина обртања ротора $\omega = \omega_m = \Omega_m$. На истој оси се може приказати и релативно клизање, које је једнако нули за $\Omega_m = \Omega_S$. У координатном почетку механичке карактеристике, релативно клизање s је једнако 1.

У зони великих клизања, доминантни део импедансе у имениоцу израза за моменат је еквивалентна реактанса расипања $L_{\gamma e}\omega_s$, која зависи од учестаности напајања. Код номиналне учестаности напајања, реактанса $X_{\gamma e} = L_{\gamma e}\omega_{sn}$ има релативну вредност од 10% до 25%. Струја $U_s/X_{\gamma e}$ која у датим условима постоји у намотајима износи оријентационо од 4 до 10 I_{nom}, и не зависи од брзине обртања. Моменат је пропорционалан квадрату струје и отпорности R_R/s. Стога се моменат у зони великих клизања мења обрнуто пропорционално релативном клизању. Смањењем брзине обртања, релативно клизање расте, док се кретни моменат умањује по хиперболичном закону.

Слика 4.32: Механичка карактеристика у области великих клизања.

$$\underline{I}_s \approx \frac{\underline{U}_s}{j\omega_s L_{\gamma e}}$$

$$M_{em} \approx \frac{3}{2}\frac{R_R}{s}\frac{1}{\omega_s}\frac{U_s^2}{L_{\gamma e}^2\omega_s^2} \tag{4.103}$$

Моменат који постоји при брзини $\Omega_m = 0$ и клизању $s = 1$ зове се полазни моменат. Уз начињена занемарења, полазни моменат је једнак $M_{pol} = (3p/2)\,(R_R/\omega_S)\,(U_S/X_{\gamma e})^2$, где је U_S вршна вредност фазног напона док је ω_S кружна учестаност напајања.

4.48 Полазак мрежом напајане машине

По прикључењу асинхроног мотора чији је ротор у мировању, на трофазну мрежу линијског напона 400 V и фреквенције f_S = 50 Hz, у намотајима статора се јавља полазна струје $I_{Peff} \approx U_{Seff}/X_{\gamma e}$, која вишеструко прелази номиналну вредност. Под дејством полазног момента M_{pol} = (3p/2) (R_R/ω_S) $(U_S/X_{\gamma e})^2$, ротор убрзава, брзина обртања Ω_m расте, приближава се синхроној брзини Ω_S, при чему се релативно клизање постепено умањује. Смањење клизања увећава R_R/s и умањује струју у намотајима. У одсуству оптерећења M_m, залетање се окончава тако што брзина достиже синхрону, док се струја у намотајима своди на ниво струје празног хода $I_{0(eff)} \approx U_{Seff}/X_m$.

У случајевима када полазни моменат није довољан да покрене ротор, задржава се стање у коме је $I_{Peff} \approx U_{Seff}/X_{\gamma e} \approx 5I_{nom}$. Губици у таквом стању су неколико десетина пута већи од номиналних, тако да температура намотаја веома брзо расте. Ако се описано стање благовремено не прекине искључењем напајања, долази до трајног оштећења изолације и других виталних делова услед прегревања.

4.49 Превални моменат и превално клизање

Механичка карактеристика асинхроне машине је линеарна у зони малих клизања, при брзинама обртања ротора које су блиске синхроној. У близини координатног почетка, за клизања блиска 1 и за брзине блиске нули, моменат је обрнуто пропорционалан клизању. Између двају области постоји екстремум, у коме се добија највећа вредност момента у датим условима напајања. Максимална вредност момента се назива *превалном*. Превални моменат се може одредити из израза за моменат $M_{em}(s)$, налажењем екстремума функције. Уколико се претпостави да је отпорност R_s тако мала да се може занемарити, превално клизање се одређује према изразу

$$\frac{dM_{em}}{ds} = \frac{d}{ds}\left[\frac{3}{2}\cdot\frac{R_R}{\omega_s\cdot s}\frac{U_s^2}{\frac{R_R^2}{s^2}+\omega_s^2 L_{\gamma e}^2}\right] = 0, \tag{4.104}$$

$$s_{pr} = \pm\frac{R_R}{\omega_s L_{\gamma e}}$$

Први извод функције $M_{em}(s)$ је једнак нули за $s = +s_{pr} = +R_R/X_{\gamma e}$ и за $s = -s_{pr} = -R_R/X_{\gamma e}$. При брзини $\Omega_m = \Omega_S(1- R_R/X_{\gamma e})$ постоји максимум момента M_{em} =

$+M_{pr}$ у моторном режиму рада, у коме је моменат позитиван а брзина обртања нешто мања од синхроне. За негативну вредност клизања, при брзини $\Omega_m = \Omega_S(1+ R_R/X_{\gamma e})$, постоји максимум момента $M_{em} = -M_{pr}$ у генераторском режиму рада, у коме је моменат негативан а брзина обртања нешто већа од синхроне. На слици је превално клизање s_{pr} приказано нешто већим од вредности која се јавља код стандардних асинхроних мотора.

Слика 4.33: Превални моменат и превално клизање на механичкој карактеристици.

Превална учестаност $\omega_{pr} = \omega_S\, s_{pr} = R_R/L_{\gamma e}$ не зависи од учестаности напајања, и једнака је количнику отпорности ротора и еквивалентне индуктивности расипања. Увођењем смене $s = s_{pr} = R_R/X_{\gamma e}$ и занемарења $R_S \approx 0$ у израз за моменат, добија се вредност превалног момента. Превални моменат у генераторском раду је једнаке амплитуде и супротног знака.

$$M_{pr} = \frac{3}{2}\frac{1}{\Omega_S}\frac{R_R}{s_{pr}}\frac{U_S^2}{\left(R_R/s_{pr}\right)^2+\left(\omega_S L_{\gamma e}\right)^2} = \frac{3}{2}\frac{1}{\Omega_S}\frac{U_S^2}{2\omega_S L_{\gamma e}} = \tag{4.105}$$

$$= \frac{3p}{4\omega_S}\frac{U_S^2}{\omega_S L_{\gamma e}} = \frac{3p}{4L_{\gamma e}}\frac{U_S^2}{\omega_S^2} = \frac{3p}{4L_{\gamma e}}\psi_S^2$$

Превални моменат се може изразити у функцији статорског флукса $\Psi_S \approx U_S/\omega_S$. Горе дати израз се може записати као $M_{pr} = (3p/4)\,\Psi_S^2/L_{\gamma e}$.

$$M_{pr} = \frac{3p}{2L_{\text{ж}}} \frac{U_{Seff}^2}{\omega_S^2} \tag{4.106}$$

Дакле, превални моменат је пропорционалан квадрату статорског флукса и обрнуто пропорционалан еквивалентној индуктивности расипања. Стога је превални моменат већи код асинхроних машина које имају већи коефицијент магнетске спреге k статорских и роторских намотаја. Током пројектовања асинхроних мотора који се покрећу прикључењем на мрежу, избор коефицијента спреге намотаја и еквивалентне индуктивности расипања је резултат компромиса. Наиме, мање вредности $L_{\text{ж}}$ дају већи превални моменат, али и већи полазну струју $I_{Peff} \approx U_{Seff}/X_{\text{ж}}$.

4.50 Клосов образац

У случају када је познато превално клизање s_{pr} и превални моменат M_{pr}, функција $M(s)$ се може свести на форму у којој не фигуришу параметри машине. Полазећи од израза за превални моменат и превално клизање,

$$M_{pr} = 3\frac{1}{\Omega_S}\frac{U_{Seff}^2}{2\omega_S L_{\text{ж}}}, \quad s_{pr} = \frac{R_R}{\omega_S L_{\text{ж}}}, \tag{4.107}$$

израз за кретни моменат се може свести на следећу форму.

$$\begin{aligned} M(s) &= \frac{3}{\Omega_S}\frac{R_R}{s}\frac{U_{Seff}^2}{(R_R/s)^2 + (\omega_S L_{\text{ж}})^2} = \\ &= M_{pr}\left(\frac{\Omega_S}{3}\frac{2\omega_S L_{\text{ж}}}{U_{Seff}^2}\right)\left(\frac{3}{\Omega_S}\frac{R_R}{s}\frac{U_{Seff}^2}{(R_R/s)^2 + (\omega_S L_{\text{ж}})^2}\right) = \\ &= M_{pr}\frac{R_R}{s}\frac{2\omega_S L_{\text{ж}}}{(R_R/s)^2 + (\omega_S L_{\text{ж}})^2} = \\ &= M_{pr}\frac{2}{\frac{R_R/s}{\omega_S L_{\text{ж}}} + \frac{\omega_S L_{\text{ж}}}{R_R/s}} = \frac{2M_{pr}}{\frac{s_{pr}}{s} + \frac{s}{s_{pr}}} \end{aligned} \tag{4.108}$$

Добијени израз, познат под називом *Клосов образац*, заснива се на претпоставци да је отпорност статора R_S тако мала да се може занемарити.

Поред тога, претпостављено је да међусобна индуктивност L_m тако велика да се струја магнетисања $|\underline{I}_m|$ може занемарити, јер је значајно мања од струје у статорским и роторским намотајима. Одређивање момента на основу израза

$$M(s)=\frac{2M_{pr}}{\frac{s_{pr}}{s}+\frac{s}{s_{pr}}} \tag{4.109}$$

је релативно једноставно, јер захтева познавање само две величине. Потребно је знати превални моменат и превално клизање.

Питање (4.24):

Упоредити превални моменат у моторном и генераторском режиму.

Одговор (4.24):

Према Клосовој формули, као и формули за електромагнетски моменат $M_{em}(s)$ која занемарује утицај отпорности статора R_S, превални моменат у моторном и генераторском режиму су једнаки. Разлике које се јављају у случају када R_S није занемариво могу се утврдити решавањем заменске шеме уз уважавање отпорности R_S, одређивањем израза за моменат $M_{em}(s)$, и налажењем екстремума функције $M_{em}(s)$. До закључка је могуће доћи и краћим путем. Полазећи од израза за превални моменат $M_{pr} = (3p/4)\,\Psi_S^2/L_\gamma$, закључује се да он зависи од квадрата статорског флукса. Фазор статорског флукса се може одредити на основу израза $\underline{\Psi}_S = (\underline{U}_S - R_S\underline{I}_S)$. У моторном режиму рада, активна компонента струје постоји у смеру из извора према машини, тако да пад напона $R_S\underline{I}_S$ чини да статорски флукс буде мањи од количника U_S/ω_S. Када се ради о генераторском режиму рада, смер струје је измењен, па је флукс увећан. Стога је и превални моменат у генераторском режиму рада већи него превални моменат у моторном режиму.

Максимални моменат на механичкој карактеристици $M_{em}(s)$ назван је *превални* моменат стога што је рад у режиму $M_m = M_{em} = M_{pr}$, при брзини обртања $\Omega_m = \Omega_S(1- s_{pr})$, повезан са ризиком преласка у зону где стрмина механичке карактеристике $\Delta M/\Delta\omega$ мења смер. Прелазак у зону механичке карактеристике у којој је $\Omega_m < \Omega_S(1- s_{pr})$ и $s > s_{pr}$ доводи до прогресивног умањења брзине обртања и заустављања.

4.51 Стабилна и лабилна равнотежа

Ако је моменат радне машине M_m константан, превални моменат и превално клизање раздвајају део механичке карактеристике у коме се остварује

стабилна равнотежа од дела у коме постоји лабилна равнотежа. Анализа полази од Њутнове једначине кретања.

$$J\frac{\mathrm{d}\Omega_m}{\mathrm{d}t} = M_{em}(\Omega_m) - M_m \tag{4.110}$$

На слици 4.34 дате су области стабилне и лабилне равнотеже. Полази се од претпоставке да је моменат оптерећења константан. Тачка **LR** представља лабилну равнотежу. Уколико се брзина обртања умањи за $\Delta\Omega_m$, што је приказано слици, радна тачка се креће слева удесно и долази у тачку означену са LR1 у којој моменат M_m остаје неизмењен, док се електромагнетски моменат $M_{em}(\Omega_m)$ умањује. Треба уочити пад момента у делу криве лево од тачке LR. Извод брзине $J\,\mathrm{d}\Omega_m/\mathrm{d}t = M_{em}(\Omega_m) - M_m$ је негативан, тако да се брзина обртања даље умањује. Радна тачка се прогресивно удаљава на леву страну и креће ка координатном почетку. Мотор се неће вратити у тачку LR.

На истој слици, тачка SR је радна тачка са стабилном равнотежом. Уколико се брзина обртања умањи, радна тачка се креће слева удесно, моменат M_m остаје исти, док се моменат $M_{em}(\Omega_m)$ увећава. Извод брзине је позитиван, па се радна тачка враћа у равнотежно стање, у тачку SR.

Превални моменат је највећа вредност момента која се може остварити. Полазећи из тачке $s = 0$, где је $M_m = 0$ и $\Omega_m = \Omega_S$, постепено увећање момента оптерећења доводи до смањења брзине и увећања клизања све док се електромагнетски моменат не изједначи са моментом оптерећења. Када M_m достигне M_{pr}, даљи поремећаји доводе до преласка ***превалне*** тачке на карактеристици, што доводи до прогресивног смањења брзине и заустављања.

Слика 4.34: Област стабилне и лабилне равнотеже.

4.52 Област трајног рада

Трајан рад асинхроне машине могуће је у режимима рада у којима је струја у намотајима једнака номиналној или је мања од номиналне. У случајевима када је $I_S > I_{nom}$, губици у машини су већи од дозвољених. Током дужег рада са увећаним губицима, температура машине прелази границе изнад којих се јављају трајна оштећења виталних делова. Зона у којој је трајан рад дозвољен приказана је на слици 4.35.

У празном ходу, клизање је блиско нули док у намотајима постоји струја празног хода $\underline{I}_0 = \underline{U}_{Sn}/(R_S+j\omega_{sn}L_S)$ која је значајно мања од номиналне. Описана радна тачка одговара пресеку механичке карактеристике и апсцисе дијаграма 4.35. Увећање момента оптерећења M_m успорава ротор, тако да клизање расте док импеданса R_R/s опада, што проузрокује увећање роторске и статорске струје. При номиналном клизању $s = s_{nom}$, асинхрона машина развија номинални моменат M_{nom}, обрће се номиналном брзином обртања $\Omega_{nom}=\Omega_{Snom}(1-s_{nom})$ док у статору има струју номиналне јачине I_{nom}.

У случају да је моменат оптерећења M_m мањи од нуле, тада он тежи да убрза ротор, повећавајући његову брзину изнад синхроне. Клизање сада узима негативне вредности тако да је импеданса R_R/s негативна, што даје негативну снагу обртног поља и негативни моменат. Машина ради у генераторском режиму и претвара механички рад у електричну снагу. При клизању које је једнако негативном износу номиналног, $s = -s_{nom}$, асинхрона машина развија моменат $-M_{nom}$, обрће се брзином $\Omega_{Snom}(1+s_{nom})$ која је већа од синхроне брзине, док у статору постоји струја ефективне вредности једнаке номиналној (I_{nom}).

У номиналним условима напајања, статорска струја се одржава у границама номиналне за клизања $|s| \leq s_{nom}$, односно, за брзине обртања $\Omega_{Snom}(1- s_{nom}) \leq \Omega_m \leq \Omega_{Snom}(1+ s_{nom})$. Код асинхроних машина мале снаге, брзина се може одступати од синхроне за +/- 10%, а да струја статора при томе не прекорачи номиналну. За машине средње и велике снаге, дозвољена варијација брзине је мања од 1%. Дакле, **да би се остварила континуална промена брзине обртања асинхроне машине, неопходно је мењати њену синхрону брзину, што се постиже променом учестаности статорских напона и струја, односно напајањем машине из трофазног извора променљиве учестаности.**

Слика 4.35: Област дозвољеног рада

4.53 Губици у асинхроним машинама и биланс снаге

Моделирање електричних машина је спроведено уз занемарење губитака у магнетском колу. Када се занемаре губици услед вихорних струја и хистерезиса, тада се приближна процена губитака у асинхроној машини може начинити на основу губитака у намотајима, то јест *губитака у бакру*. Овде ће бити узети у обзир и губици у гвожђу.

У ротору асинхроног мотора постоје промене магнетске индукције са релативно малом учестаношћу клизања. Стога је и снага губитака у магнетском колу ротора мала. Снага губитака у магнетском колу статора је знатно већа, будући да магнетско поље у феромагнетику статора пулсира на учестаности напајања. Детаљнија анализа губитака у процесу електромеханичког претварања тражи уважавање губитака у гвожђу као и губитке у механичком систему, који укључују отпоре обртању, међу којима отпор ваздуха и отпор трења у лежајевима.

4.54 Губици у асинхроним машинама

У доле датој листи, наведени су најзначајнији губици,

- Губици у бакру статора, $R_S I_S^2$
- Губици у ротору, $R_R I_R^2$
- Губици у гвожђу статора, $\sigma_H f_s B_m^2 + \sigma_V f_s^2 B_m^2$
- Губици у гвожђу ротора, $\sigma_H f_k B_m^2 + \sigma_V f_k^2 B_m^2$
- Губици услед обртања, $k_F \Omega_m^2$

Губици у бакру статорског намотаја пропорционални су квадрату ефективне вредности статорске струје, $P_{cu1} = 3R_S I_{Seff}^2$.

У магнетском колу статора постоје губици P_{Fe1}, пропорционални квадрату магнетске индукције и зависни од статорске фреквенције f_S.

Струја у роторским штаповима ствара губитке пропорционалне квадрату роторске струје, $P_{cu2} = 3R_R I_{Reff}^2$. Поред губитака у намотајима ротора, постоје и губици у гвожђу ротора, у коме постоји променљиво магнетско поље учестаности ω_k. Роторска кружна учестаност ω_k је много мања од статорске, тако да је у многим случајевима оправдано занемарити губитке у гвожђу ротора. Један од режима у коме се губици у гвожђу ротора не могу занемарити је полазак машине из стања мировања, прикључењем на градску мрежу, када је $\omega_k = \omega_S$.

Губици услед обртања јављају се услед трења у лежајевима, отпора ваздуха и других појава у механичком подсистему машине. Отпор ваздуха је пропорционалан квадрату брзине обртања, али се збир свих губитака услед обртања често моделује приближним изразом $P_F \approx k_F \Omega_m^2$, односно $M_F \approx k_F \Omega_m$. Моменат трења M_F се одузима од електромагнетског момента M_{em}, којим статор делује на ротор, тако да је на вратилу расположив нешто мањи моменат $M_m = M_{em} - M_F$.

4.55 Снага обртног поља и унутрашња механичка снага

Извор предаје асинхроној машини снагу P_e. У устаљеном стању, електрична улазна снага се може одредити на основу израза $P_e = 3U_{Seff} I_{Seff} \cos(\varphi)$, где је U_{Seff} ефективна вредност фазног напона, I_{Seff} ефективна вредност струје у намотајима статора, док је $\cos(\varphi)$ фактор снаге. У бакру статора постоје губици $P_{cu1} = 3R_S I_{Seff}^2$, пропорционални квадрату ефективне вредности струје. У магнетском колу статора постоје губици у гвожђу P_{Fe1}, који зависе од фреквенције струја статора f_S и квадрата магнетске индукције.

Губици у гвожђу статора се могу изразити и у функцији квадрата амплитуде статорског флукса. Снага обртног поља $P_{ob} = P_e - P_{cu1} - P_{Fe1}$ се предаје ротору. Дељењем ове снаге са брзином обртања поља Ω_S добија се електромагнетски моменат $M_{em} = P_{ob}/\ \Omega_S$.

$$P_{ob} = P_e - 3R_s i_{s_{eff}}^2 - P_{Fe}^{stat} = M_{em}\Omega_s \tag{4.111}$$

Унутрашња механичка снага машине је

$$P_{mR} = M_{em}\Omega_m \Rightarrow P_{ob} - P_{Cu}^{rot} - P_{Fe}^{rot} \approx P_{ob} - P_{Cu}^{rot}\ . \tag{4.112}$$

У ротору постоје губици

$$P_{\gamma R} = P_{ob} - P_{mR} = M_{em}(\Omega_s - \Omega_m) = sP_{ob} = P_{Cu}^{rot} + P_{Fe}^{rot}\ . \tag{4.113}$$

Брзина ротора је мања од синхроне за износ клизања. Механичка снага P_{mR} која се ствара унутар машине једнака је $P_{mR} = M_{em}\Omega_m$. У устаљеном стању, механичка снага P_{mR} једнака је $M_{em}\Omega_m = M_{em}\Omega_S(1\text{-}s) = (1\text{-}s)P_{ob}$. Дакле, остатак у износу од sP_{ob} представља снагу која се у самом ротору претвара у топлоту. Снага sP_{ob} једнака је збиру снаге губитака у роторским намотајима и снаге губитака у магнетском колу ротора. Како је роторска учестаност релативно мала, најчешће је оправдано користити израз $sP_{ob} \approx P_{cu2}$.

Слика 4.36: Расподела снаге обртног поља на губитке у ротору и унутрашњу механичку снагу.

Корисна механичка снага $P_m = M_m\Omega_m$ разликује се од унутрашње снаге $P_{mR} = M_{em}\Omega_m$ за износ механичких губитака услед обртања, међу којима су отпор ваздуха и трење у лежајевима.

Заменска шема асинхроне машине дата на слици 4.37 модификована је тако да се губици у ротору $P_{Cu2} = sP_{ob}$ могу посматрати одвојено од унутрашње механичке снаге P_{mR}. Отпорност R_R/s у роторској грани заменске шеме подељен је у два дела, R_R и $R_R(1\text{-}s)/s$. Узимајући да је I_R ефективна

вредност струје у роторској грани, дисипација $3R_RI_R^2 = sP_{ob}$ представља губитке у намотају ротора, док $3R_RI_R^2(1\text{-}s)/s = (1\text{-}s)P_{ob}$ представља унутрашњи механичку снагу P_{mR} која се добија претварањем електричне снаге у механичку.

4.56 Веза напона и флуксева

Заменска шема на слици 4.37 показује начин на који се могу одредити флукс статора $\underline{\Psi}_S$, међусобни флукс $\underline{\Psi}_m$, као и флукс ротора $\underline{\Psi}_R$. Напон $\underline{U}_S^1$ је једнак $\underline{U}_S$ - $R_S\underline{I}_S$ и одређен је производом $j\omega_S\underline{\Psi}_S$, што омогућује да се флукс статора $\underline{\Psi}_S$ одреди израчунавањем $\underline{U}_S^1/j\omega_S$. У случају да величине $|\underline{U}_S|$, $|\underline{I}_S|$, и $|\underline{I}_R|$ представљају ефективне вредности напона и струја, тада се вршна вредност флукса $\underline{\Psi}$, односно амплитуда вектора флукса, одређује израчунавањем $2^{0,5}|\underline{\Psi}|$. Напон $\underline{U}_m = \underline{U}_S^1\text{-}j\omega_S L_{\gamma S}\underline{I}_S$ једнак је $j\omega_S\underline{\Psi}_m$, што омогућује да се флукс магнетисања $\underline{\Psi}_m$ одреди израчунавањем $\underline{U}_m/j\omega_S$. Напон $\underline{U}_R = \underline{U}_m + j\omega_S L_{\gamma R}\underline{I}_R$ једнак је $j\omega_S\underline{\Psi}_R$, што омогућује да се флукс ротора $\underline{\Psi}_R$ одреди израчунавањем $\underline{U}_R/j\omega_S$.

Слика 4.37: Заменска шема асинхроног мотора и веза напона кола са флуксевима.

4.57 Биланс снаге у моторном режиму рада

Биланс снаге асинхроне машине која ради у моторном режиму дат је на слици 4.38. Назначене снаге P_e, P_{ob}, P_{mR} и P_m су позитивне и стоје у

односу $P_e > P_{ob} > P_{mR} > P_m$. Степен корисног дејства у моторном режиму рада једнак је $\eta = P_m/P_e$.

Слика 4.38: Биланс снаге асинхроне машине

Корисна механичка снага је

$$P_m = P_{mR} - k_F\Omega_m^2 . \tag{4.114}$$

Ако се занемаре губици у бакру статора, губици у гвожђу статора и губици услед обртања, електрична снага коју машина узима из извора, то јест мреже је

$$P_e \approx P_{ob} \approx P_{Cu}^{rot} + P_m = sP_{ob} + (1-s)P_{ob} . \tag{4.115}$$

У генераторском режиму рада, машина преко вратила узима механичку снагу $P_m = M_m\Omega_m < 0$. Уважавајући референтне смерове, снага P_m у генераторском режиму има негативну вредност. На горњој слици, таква снага је усмерена здесна налево. Назначене снаге P_e, P_{ob}, P_{mR} и P_m су у генераторском раду негативне и стоје у односу $P_e > P_{ob} > P_{mR} > P_m$, односно $|P_e| < |P_{ob}| < |P_{mR}| < |P_m|$.

Усвајањем за референтни ток снаге здесна улево, изостају негативне вредности чиме је биланс снаге асинхроног генератора лакше сагледати. Генератору се, путем вратила, саопштава улазна механичка снага. Одузимањем снаге губитака у механичком подсистему, то јест губитака услед обртања, добија се унутрашња механичка снага, која се претвара у електричну. Од добијене електричне снаге ($-P_{mR} > 0$) одузимају се губици у намотајима ротора и губици у магнетском колу ротора, те се добија снага обртног поља ($-P_{ob} > 0$), коју ротор предаје статору. После одузимања губитака у бакру и гвожђу статора, добија се корисна електрична снага ($-P_e$

> 0) коју је могуће саопштити електричном потрошачу, или трофазној мрежи коју асинхрони генератор снабдева електричном енергијом. Степен корисног дејства у генераторском режиму рада једнак је $\eta = P_e/P_m$. Асинхрони генератори се често користе у малим хидроелектранама и електранама на ветар. Асинхрони генератор мале снаге се може прикључити на мрежу, чиме се добија магнетско поље које се обрће синхроном брзином $\Omega_S = 2\pi \cdot 50 /p$. Захваљујући снази ветра или тока воде, ротор генератора се обрће брзином која је већа од синхроне. Релативно клизање је тада негативно, као и еквивалентна отпорност дела R_R/s у заменској шеми. Стога је снага коју машина узима из мреже негативна, што значи да се механички рад претвара у електричну енергију и предаје мрежи.

4.58 Промена брзине мрежом напајане машине

У највећем броју примена електричних машина потребно је остварити континуалну промену брзине обртања. Неки од примера су управљање кретањем производних машина, индустријских робота, покретање електричних возила, потискивању флуида и многи други.

Брзина обртања асинхроних машина се разликује од синхроне за износ брзине клизања. Код напајања асинхроног мотора из градске мреже, статорска струја се одржава у границама номиналне под условом да је клизање $|s| \leq s_{nom}$, односно, за брзине обртања $\Omega_{Snom}(1- s_{nom}) \leq \Omega_m \leq \Omega_{Snom}(1+ s_{nom})$. Ради се релативно малом опсегу брзина. Код машина средње и велике снаге, номинално клизање је мање од 1%, тако да је услов $I_S \leq I_{nom}$ задовољен у опсегу брзина од 99% до 101% синхроне брзине. Рад са већим учестаностима клизања је скопчан са великом снагом губитака и великим јачинама струје у намотајима статора и ротора. Коришћење мотора изван зоне у којој је $|s| \leq s_{nom}$ и $I_S \leq I_{nom}$ доводи до повећања температуре мотора. Стога се трајан рад асинхроних машина одвија уз релативно мале вредности клизања, тако да је оправдано сматрати да је брзина обртања Ω_m блиска синхроној брзини Ω_S. Синхрона брзина $\Omega_S = \omega_S/p$ је одређена кружном учестаношћу напајања ω_S, односно, учестаношћу струја које постоје у намотајима статора. Код двополних машина, где је број пари полова p једнак 1, синхрона брзина је једнака кружној учестаности напајања. Стога је континуалну промену брзине обртања асинхроне машине могуће добити променом учестаности статорских напона и струја. Ово се може остварити напајањем машине из трофазног извора наизменичног напона променљиве учестаности, какав је трофазни транзисторски инвертор, енергетски статички претварач снаге заснован на полупроводничким прекидачима.

Трофазни транзисторски инвертори су енергетски претварачи који се напајају из градске мреже, напона 400 V и фреквенције f = 50 Hz, који на излазним прикључцима дају трофазни систем напона континуално променљиве учестаности и амплитуде. Инвертори примењују ширинску модулацију и користе полупроводничке прекидаче као што су биполарни транзистори (BJT), MOSFET и IGBT транзистори, који се примењују од осамдесетих година 20. века. Енергетски претварачи који користе транзисторе снаге данас су стандардно индустријско решење за напајање и промену брзине асинхроних машина.

Асинхроне машине се користе од деведесетих година 19. века. Током првог столећа индустријске употребе асинхроних машина, нису били расположиви полупроводнички прекидачи који су неопходни за градњу трофазних инвертора, нити су постојале друге компоненте или направе које би дале практично, примењиво решење за варијацију учестаности напајања и континуалну промену брзине. Стога се брзина обртања асинхроног мотора није могла мењати променом учестаности статорског напона. Машине су биле напајане из мреже са индустријском фреквенцијом f_S = 50 Hz, односно f_S = 60 Hz, и коришћене пре свега као машине са константном, непромењивом брзином обртања.

У применама где је промена брзине била неопходна, користили су се поступци који су у датом тренутку били технолошки остварив. Традиционални приступи промени брзине обртања укључују

(i) варијацију статорског напона,
(ii) промену роторског отпора и
(iii) промену броја полова.

Ефекти традиционалних приступа ће бити укратко приказани у даљем тексту.

4.59 Ефекти промене амплитуде статорског напона

Код напајања из извора константне фреквенције f_S, механичка карактеристика асинхроне машине има пресек са апсцисом у тачки $\Omega_m = \Omega_S = 2\pi f_S/p$, $M_{em} = 0$. При оптерећењу клизање расте док брзина обртања опада. Развијени моменат је пропорционалан квадрату статорског флукса Ψ_S, односно, квадрату количника статорског напона и кружне учестаности U_S/ω_S.

Смањењем статорског напона постиже се смањење флукса и редуковање стрмине механичке карактеристике $S = \Delta M/\Delta\omega$. Као последица, умањење брзине које се јавља при оптерећењу ће бити веће. Познато је да у зони малих клизања електромагнетски моменат варира по закону M_{em} =

$k\omega_k \Psi_S^2/R_R$, тако да се може закључити како смањење флукса Ψ_S мора довести до увећања брзине клизања ω_k и смањења брзине обртања.

Домети варијације напона, као начина за промену брзине, су ограничени. Наиме, брзину је могуће мењати у опсегу који не прелази превално клизање s_{pr}. Последица смањења брзине увећањем клизања је увећање губитака у ротору $P_{cu2} \approx sP_{ob}$, што може довести до прегревања машине.

Слика 4.39: Утицај напона напајања на механичку карактеристику.

Варијација брзине обртања асинхроног мотора путем промене напона напајања се ретко користи. Једна од могућих примена је покретање вентилатора, чија је снага пропорционална трећем степену брзине обртања, тако да мале промене брзине знатно утичу на снагу, док губици $P_{cu2} \approx sP_{ob}$ не доводе до прегревања јер је и снага обртног поља $P_{ob} \sim \Omega_m^3$ при мањим брзинама значајно умањена. Код мањих вентилаторских мотора, напон се може смањити уградњом серијски везаних отпорника променљиве отпорности. У случају да је редна веза мотора и серијског отпорника прикључена на константан напон мреже, напон статора се може смањити увећавањем отпорности серијског отпорника, што даје могућност за промену брзине обртања вентилатора.

4.60 Машине са намотаним ротором

Намотаји ротора асинхроног мотора се могу начинити по угледу на статорске. Они могу бити формирани од изолованих бакарних проводника који се смештају у жлебове ротора и формирају трофазни намотај, повезан у звезду. Три слободна краја овако формираног намотаја се могу довести на три проводна колута који стоје на вратилу. Колутови се обрћу скупа са вратилом, од кога су изоловани у електричном погледу. На колутове належу проводне дирке, које су причвршћене за конструкцију статора, и које додирују спољашњу површ колутова остварујући електрични контакт. На описани начин добија се *асинхрона машина са намотаним ротором*. Промена споља додатог (екстерног) трофазног отпорника мења механичку карактеристику машине на начин приказан сликом 4.40.

Слика 4.40: Утицај отпорности ротора на механичку карактеристику.

Када се дирке доведу у кратак спој, роторски намотај је кратко спојен па су понашање машине и њена механичка карактеристика у свему једнаки понашању и карактеристици асинхроне машине са кавезним ротором. Коришћењем дирки, у роторско коло је могуће прикључити додатни отпор R_{ext}, чиме се увећава вредност параметра $R_{Re} = R_R + R_{ext}$ у заменском колу за устаљена стања.

На основу израза за превални моменат, закључује се да је $M_{pr} \sim \Psi_S^2/L_{\gamma e}$, тако да увећање укупног роторског отпора не утиче на вредност превалног момента. С друге стране, електромагнетски моменат је обрнуто пропорци-

оналан роторском отпору, $M_{em} \sim k\omega_k \Psi_S^2/R_R$, тако да увећање укупне отпорности R_{Re} смањује стрмину механичке карактеристике $\Delta M/\Delta\omega$. Превално клизање $s_{pr} = R_{Re}/X\gamma e$ је пропорционално роторском отпору, тако да ће се увећање екстерног отпорника R_{ext} повећати превално клизање у моторном и генераторском режиму рада. Свеукупни ефекти промене роторског отпора на механичку карактеристику су приказани на слици 4.40. Превални моменат остаје неизмењен, превално клизање се увећава, док се стрмина механичке карактеристике постепено смањује.

За случај да је моменат оптерећења константан, пресек карактеристике терета са механичким карактеристиком (видети слику) постоји при брзини која се може променити избором екстерног отпорника повезаног у роторско коло путем дирки и колутова. Континуална промена отпора омогућава континуалну промену брзине обртања. У раду са клизањима која су већа од номиналног, статорска и роторска струја мотора са кавезним ротором значајно превазилазе номиналну струју, што доводи до прегревања. Асинхрони мотор са намотаним ротором може радити са већим вредностима клизања. При увећаном клизању, отпорност роторске гране заменске шеме R_{Re}/s се умањује, али се зато укупна отпорност $R_{Re} = R_R + R_{ext}$ увећава услед додавања екстерног отпора, тако да струје ротора и статора остају у прихватљивим границама.

Слика 4.41: Изглед и повезивање роторског намотаја са спољашњим отпорником. (A) Трофазни намотај ротора. (B) Колутови. (C) Статор. (D) Ротор. (E) Спољашњи отпорник.

Недостатак описаног приступа огледа се у томе што се брзина $\Omega_m = \Omega_S(1\text{-}s)$ регулише тако што синхрона брзина Ω_S задржава своју вредност, док се брзина ротора Ω_m умањује на рачун увећања клизања s. Последица увећаног клизања су већи губици у ротору $sP_{ob} = P_{cu2}$. Увећани губици P_{cu2} не проузрокује прегревање саме асинхроне машине, стога што се значајан део те снаге дисипира у екстерном трофазном отпорнику. Ипак, значајно се смањује степен корисног дејства. У случају када двополни асинхрони

мотор, синхроне брзине n_S = 3000 o/min, треба да достигне брзину обртања n_m = 1500 o/min, степен корисног дејства асинхроног мотора са намотаним ротором и екстерним отпорником биће мањи од 50%. Лош степен корисног дејства је последица великог износа снаге sP_{ob}, која се зове и *снага клизања*.

Слика 4.42: Статички претварач у роторском колу рекуперира снагу клизања. (A) Претварач се преко колутова и дирки повезује са роторским намотајем. (B) Диодни исправљач претвара енергију наизменичних роторских струја у енергију једносмерних струја. (C) Тиристорски претварач претвара енергију једносмерних струја у енергију наизменичних струја. (D) Преко трансформатора за раздвајање, снага и енергија клизања се враћа у напојну мрежу.

Степен корисног дејства асинхроне машине са намотаним ротором би се могао увећати коришћењем снаге клизања. Средином 20. века, развијене су полупроводничке диоде и тиристори за индустријску употребу. Коришћењем диода и тиристора, пројектовани су и коришћени статички претварачи снаге. Повезивањем претварача у роторско коло, снага клизања sP_{ob} се саопштава диодном исправљачу који је приказан на слици 4.42 и који претвара наизменичне струје ротора у једносмерну струју пригушнице L_d. Потом тиристорски претварач (C) претвара једносмерну струју у наизменичну, мрежне учестаности, и тако враћа снагу клизања sP_{ob} натраг у мрежу. Претварачке структуре у роторском колу познате су под именом *каскаде*. Деведесетих година двадесетог века развијени су транзисторски

инвертори за велике снаге, чиме се губи потреба за коришћењем асинхроних машина са намотаним ротором.

4.61 Промена броја полова

Брзина обртања асинхроне машине са кратко спојеним кавезом је блиска синхроној брзини $\Omega_S = \omega_S/p$, где је ω_S учестаност напајања док је $2p$ број полова машине. Када се машина напаја из транзисторског инвертора, учестаност напајања се може мењати, па тако и брзина обртања ротора. Уколико је машина прикључена на мрежу константне учестаности, ω_S се не може мењати. Постоји, међутим, могућност да се промени број полова $2p$. За двополну машину ($p = 1$), синхрона брзина је $n_S = 3000$ o/min. Увећањем броја полова, добијају се синхроне брзине од 1500 o/min, 1000 o/min, 750 o/min, итд. У многим погонским применама, није неопходно остварити континуалну промену брзине обртања, већ је довољно имати две или три дискретне вредности брзине које се могу одабрати у складу са потребама. Тада се проблем регулације брзине обртања може решити употребом асинхроне машине која се напаја из мреже константне учестаности, под условом да се број полова може мењати.

Код машина за једносмерну струју, број магнетских полова је одређен конструкцијом машине, једнак је броју главних полова, не може се мењати и не зависи од напајања. У случају асинхроне машине, полови обртног поља нису везани за одређени део магнетског кола, већ се обрћу у односу на магнетско коло статора и ротора. Број полова зависи од расподеле струје у жлебовима статора, то јест од начина на који је формиран намотај статора. До сада су анализиране машине чији статор ствара двополно поље, са дијаметрално супротним магнетским половима. На следећој слици приказана је расподела статорских струја која ствара магнетско поље са два северна и два јужна пола.

У доњем делу слике 4.43, струја у дијаметрално супротним проводницима има исти смер (⊙). Други пар дијаметрално супротних проводника, са струјом измењеног смера (⊗), померен је за угао од $\pi/2$ у односу на први пар. Магнетопобудна сила коју ствара систем од четири проводника има две зоне у којима линије магнетског поља прелазе из ротора у статор, и две зоне у којима линије магнетског поља прелазе из статора у ротор. Дакле, статорске струје у претходном примеру стварају магнетско поље са два северна и два јужна пола. Овакво поље називамо четворополним. Ради се о магнетском пољу које има четири магнетска пола, то јест $p = 2$ пара полова.

Слика 4.43: Двополно и четворополно магнетско поље.

Систем од три фазна намотаја са одговарајућом расподелом проводника може створити четворополно обртно поље. На левој страни доње слике приказана су три фазна намотаја статора, међу собом померена за $2\pi/3$, која у ваздушном зазору машине стварају двополно обртно поље. Статорски намотај који у машини ствара двополно поље се често назива *двополним намотајем*. На десној страни исте слике, приказан је начин формирања трофазног статорског намотаја чија магнетопобудна сила у ваздушном зазору ствара четворополно поље. Свака од фаза *a*, *b*, и *c* је подељена у две секције. Секције фазних намотаја су просторно померене за π, док је померај између суседних секција једнак $\pi/3$, двоструко мање него у случају двополног намотаја.

Слика 4.44: Трофазни четворополни намотај статора.

Фазни намотај a четворополног статорског намотаја се састоји од две дијаметрално супротне секције. Секције се везују на ред, тако да у проводницима двеју половина постоји иста струја $i_a(t)$. Референтни крајеви секција су на следећој слици означени тачкама. Када струје улазе у тачку посматране секције, тада она ствара магнетопобудну силу и поље које је полази из магнетског кола ротора и простире се кроз зазор у правцу посматране секције. У случају да су секције, то јест половине $a1$ и $a2$ фазног намотаја a редно везане тако да струја $i_a(t)$ улази у тачком означени референтни крај секције, ствара се магнетско поље које има два северна и два јужна пола. Наиме, на положајима $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ се јавља поље чије линије из ротора прелазе у статор. Магнетско поље није изворно, тако да једнак број линија поља мора прелазити из статора у ротор на положајима $\theta = \pi/2$ и $\theta = 3\pi/2$. На описани начин се формира четворополно поље, то јест поље са два пара полова (p=2), два северна и два јужна магнетска пола. Промена тренутних вредности простопериодичних, фазно померених струја $i_a(t)$, $i_b(t)$ и $i_c(t)$ доводи до обртања четворополног поља. Може се показати да је брзина обртања Ω_S четворополног поља једнака половини учестаности напајања ω_S. Посматрајући наредну слику, потребно је уочити да се један од магнетских полова налази наспрам секције $a1$ у тренутку t=0, када струја $i_a(t) = I_m \cos\omega_S t$ има вредност $i_a(t) = +I_m$. Посматрани магнетски пол је обележен стрелицом ➞ усмереном ка секцији a_1. Струја $i_b(t) = I_m \cos(\omega_S t - 2\pi/3)$ је фазно померена, тако да се највећа позитивна вредност ове струје достиже у тренутку $t_1 = 2\pi/(3\omega_S)$. У интервалу $0 < t < t_1$, посматрани магнетски пол се помера према секцији b_1, коју достиже у тренутку t_1. По истеку времена $t_2 = 4\pi/(3\omega_S)$, струја $i_c(t)$ достиже максималну вредност. Тада се по-

сматрани магнетски пол налази наспрам секције c_1 на доњој слици. По истеку једног периода $t_3 = T = 2\pi/\omega_S$, понавља се максимум $i_a(t) = +I_m$ у фазној струји намотаја a. Посматрани магнетски пол се тада налази наспрам секције a_2 на доњој слици. Током једног периода промене електричних величина (*електрични период*) $T = 2\pi/\omega_S$, промена у фазном ставу струја износи $\Delta\theta_e = 2\pi$, док просторни померај магнетског пола износи $\Delta\theta_m = \Delta\theta_e/2 = \pi$. Дакле, брзина обртања поља једнака је половини учестаности напајања, $\Omega_S = \omega_S/2$.

Приметити да четворополно поље приказано на слици 4.44, има два истоимена магнетска пола који су дијаметрално супротно постављени. Током једног периода промене електричних величина, оба пола се помере за π, при чему они заправо промене место.

У општем случају, када су намотаји статора начињени тако да формирају обртно магнетско поље са p полова, поље се обрће синхроном брзином једнаком $\Omega_S = \omega_S/p$. Моменат вишеполних асинхроних машина се одређује на основу израза $M_{em} = P_{ob}/\Omega_S = pP_{ob}/\omega_S$.

Утицај броја пари полова на изразе за брзину и моменат

Број пари магнетских полова електричне машине се означава са p. Синхрона брзина асинхроног мотора је једнака

$$\Omega_s = \frac{\omega_s}{p}, \tag{4.116}$$

док је брзина обртања ротора једнака

$$\Omega_m = \frac{\omega_m}{p} = \frac{\omega_s - \omega_k}{p} = \Omega_s - \Omega_k, . \tag{4.117}$$

где је ω_k кружна учестаност роторских струја. Електромагнетски моменат је

$$M_{em} = \frac{P_{ob}}{\Omega_s} = p\frac{P_{ob}}{\omega_s} \tag{4.118}$$

4.62 Предности и мане вишеполних машина

Вишеполне машине (p>1) имају боље искоришћење гвожђа и бакра. Постоје примене асинхроних машина у којима опредељење за већи број по-

лова даје већи специфични моменат и снагу у односу на решења са двополним машинама. Овде се дају образложења оваквих тврдњи.

Познато је да су проводници који чине један навојак фазног намотаја двополне машине постављени дијаметрално супротно, на угаоном растојању $\Delta\theta \approx \pi$. Када је један од проводника у зони северног магнетског пола обртног поља, тада се други проводник налази испод јужног пола. На челу и зачељу машине, наспрамни проводници се спајају повратним водовима, који су код двополне машине релативно дуги, што резултује увећаним утрошком бакра, већом отпорношћу намотаја и већим губицима у бакру. Код вишеполних машина, проводници који чине један навојак су на угаоном растојању $\Delta\theta \approx \pi/p$, што одговара размаку између два суседна и супротна магнетска пола. Дужина повратних водова је код вишеполних машина знатно мања, што се повољно одражава на укупну масу утрошеног бакра, на отпорност намотаја и губитке снаге.

Линије магнетског поља из зоне северног магнетског пола пролазе магнетским колом статора, долазећи тако у зону јужног магнетског пола. Пролазећи обимом статора у тангенцијалном правцу, линије поља код двополне машине прелазе угаоно растојање $\Delta\theta \approx \pi$. Простирући се тангенцијално, линије поља не пролазе кроз зону у којој стоје зупци и жлебови статора, већ постоје у спољашњем делу магнетског кола статора званом *јарам*. Јарам је неопходан како би се умањила магнетска отпорност у колу. С друге стране, јарам не доприноси на директан начин електромеханичком претварању, али увећава утрошак гвожђа и укупну масу машине. Код вишеполних машина, пут који прелазе линије поља између два магнетска пола је краћи и износи $\Delta\theta \approx \pi/p$, тако да је искоришћење феромагнетског материјала веће него у случају двополних машина.

Вишеполне машине напајане из статичких претварача

Код примена асинхроних машина напајаних из статичког претварача, то јест транзисторског инвертора који даје симетричан, трофазни систем напона променљиве учестаности и амплитуде, боље искоришћење бакра и гвожђа вишеполне машине омогућује да се достигне већи специфични моменат и већа специфична снага. У случају када је потребно одабрати асинхрону машину која треба да достигне жељену брзину Ω_m, потребно је обезбедити напајање које ствара магнетско поље које се обрће брзином $\Omega_S \approx \Omega_m$. Ово се може постићи избором двополне машине и кружне учестаности напајања $\omega_S = \Omega_S$, или избором вишеполне машине (p>1) и кружне учестаности напајања $\omega_S = p\Omega_S$. У сваком случају, асинхрона машина развија исти електромагнетски моменат, одређен условима примене, и даје исту снагу. Уколико се одабере вишеполна машина (p = 2, 3, или 4), боље иско-

ришћење материјала и већа специфична снага омогућује да се за посматрану примену одабере машина мање масе и мањих димензија. Потребно је уочити да се наведене предности вишеполних машина губе у случају где је број полова веома велики. Тада се јављају велике вредности кружне учестаности напајања $\omega_S = p\Omega_S$, што доводи до значајног увећања губитака у гвожђу. У градњи магнетског кола асинхроне машине која ради са високим учестаностима напајања користе се ферити и други специјални феромагнетски материјали.

Мрежом напајане вишеполне машине

Код мрежом напајаних машина, синхрона брзина је одређена фреквенцијом мреже f и једнака је $\Omega_S = 2\pi \cdot f/p$. Зависност специфичне снаге од броја полова може се одредити полазећи од везе електромагнетског момента и величине машине. У претходним поглављима показано је да расположиви моменат машине зависи од њене запремине, што даје пропорцију $M_{em} \sim V \sim D^2L$, где су D и L пречник и осна дужина машине. Будући да је $M_{em} = P_{em}/\Omega_S = p \cdot P_{em}/(2\pi \cdot f)$, може се закључити да су димензије мрежом напајане вишеполне асинхроне машине веће уколико је већи број полова. За дату снагу P_{em}, димензије машине задовољавају пропорцију $V \sim D^2L \sim p \cdot P_{em}$. Дакле, мрежно напајана асинхрона машина задате снаге има димензије које расту са бројем полова. Као пример, могу се посматрати масе стандардних трофазних асинхроних мотора снаге 1,1 kW, начињених за рад са напоном U = 400 V, f = 50 Hz. Двополни мотор има масу од $m \approx 8$ kg, четворополни масу од 13 kg, шестополни масу од 16 kg, док осмополни мотор има масу од 23 kg. Практичне вредности масе мотора се разликују од предвиђања $m \approx k \cdot p$ због ефеката који су у спроведеној анализи занемарени.

Недостаци вишеполних машина

Кружна учестаност статорских струја и напона је пропорционална броју полова, то јест $\omega_S = p\Omega_S$. Када се пројектује машина која мора достићи брзину $\Omega_m \approx \Omega_S$, потребна статорска учестаност ће бити пропорционална броју полова. Познато је да су губици који постоје у магнетском колу услед вихорних струја пропорционални квадрату учестаности, док губици услед хистерезиса расту линеарно са учестаношћу. Стога ће губици у гвожђу вишеполних машина бити већи. Током пројектовања, неопходно је предвидети адекватно хлађење, или смањити вршну вредност магнетске индукције B_m, да би се снага губитака одржала у границама дозвољеног.

Код вишеполних машина, теже је постићи простопериодичну расподелу проводника у једном намотају. Код двополних машина, намотај се форми-

ра тако што се проводници са истим референтним смером ⊗ смештају испод једног магнетског пола, у појасу ширине $\Delta\theta \approx \pi$, док се проводници супротног усмерења ⊙ смештају испод супротног пола. Код вишеполних машина, проводници једнаког усмерења се смештају у појасу ширине $\Delta\theta \approx \pi/p$, колико износи угаоно растојање између два суседна и супротна магнетска пола.

Проводници статорског намотаја се смештају у жлебове. За машину са N_Z жлебова, постоји једнак број дискретних локација у којим се могу налазити проводници. Дакле, проводници не могу имати идеалну синусоидалну расподелу, већ је њиховом расподелом у коначан број жлебова потребно створити приближну, квази-синусоидалну расподелу. Код вишеполних машина, у појасу ширине $\Delta\theta \approx \pi/p$ постоји p пута мање жлебова, што отежава расподелу проводника која би била блиска простопериодичној. Као последица, индукована електромоторна сила вишеполних машина може имати значајнији садржај виших хармоника, као и повећану валовитост момента и губитке снаге услед виших хармоника.

<u>Питање (4.25):</u>

Моменат вишеполних асинхроних машина се одређује на основу $M_{em} = P_{ob}/\Omega_S = pP_{ob}/\omega_S$. Уколико се посматра асинхрона машина одређене осне дужине L и пречника D, чији је статор могуће намотати тако да ствара поље са произвољним бројем парова полова p, може ли се закључити да ће увећање броја полова довести до увећања момента који машина може развити?

Одговор (4.25):

За дату вредност максималне индукције B_{max} и дату вредност дозвољене густине струје у проводницима, моменат који може дати електрична машина је пропорционалан l^4, четвртом степену линеарних димензија, односно $V^{4/3}$, где је V запремина машине. Дакле, за случај да су димензије магнетског кола машине већ дефинисане, тада начин формирања статорског намотаја не може утицати на расположиви моменат. Другим речима, расположиви моменат неће зависити од броја магнетских полова обртног поља. Закључак се може извести и тако што се генерисање момента представи интеракцијом укупне струје која постоји у жлебовима ротора и обртног магнетског поља које ствара статор. Услед ограничене густине струје, струја у роторским жлебовима се не може увећати променом броја полова. Јачина магнетског поља B_{max} је одређена карактеристикама гвоздених лимова. Генерисани електромагнетски моменат зависи од струје у роторским штаповима, од магнетске индукције, од дужине штапова, од полупречника ротора и укупног броја штапова. Занемарујући секундарне ефекте, може се закључити да моменат асинхроне машине датих димензија не зависи од

броја полова обртног поља, то јест не зависи од начина формирања статорског намотаја.

Питање (4.26):

Проводници ротора су положени у жлебове раздвојене гвозденим зупцима. Будући да се линије магнетског поља машине усмеравају путем мање магнетске отпорности, индукција у самом жлебу и простору у коме је положен проводник биће блиска нули, док ће флукс бити усмерен у зупце. Постоје ли услови за стварање електромагнетског момента?

Одговор (4.26):

У претходно датој процени узето је да се моменат генерише захваљујући силама које делују на проводнике. У случају када су проводници смештени у релативно дубоке жлебове, јачина магнетске индукције у зупцима (деловима магнетског кола између два суседна жлеба) вишеструко превазилази магнетску индукцију у самим жлебовима. Однос јачине магнетског поља у жлебу и зупцима близак је количнику μ_0/μ_{Fe}. Дакле, на проводнике делује веома мала сила. Уместо тога, јавља се сила која делује на зидове жлебова услед интеракције статорског и роторског поља,. После спровођења релативно сложених прорачуна у којима се анализира јачина магнетске индукције у свим тачкама, одређује еквивалентни магнетски притисак на површи које деле гвожђе и простор унутар жлебова и тако одређује моменат, може се показати да је тако израчуната вредност момента једнака вредности израчунатој на основу претпоставке да на сваки проводник делује сила LIB. У последњем случају, узима се да је проводник положен уз саму површ ротора при чему је B јачина магнетске индукције која би постојала у ваздушном зазору на месту проводника у случају да је ротор идеалан феромагнетски цилиндар.

Питање (4.27):

Показано је да се статорски намотај асинхроне машине може формирати тако да ствара обртно магнетско поље са четири магнетска пола или са више полова. Утиче ли број полова на конструкцију ротора?

Одговор (4.27):

Ротор асинхроне машине са кратко спојеним кавезом састоји се од релативно великог броја штапова који се доводе у кратак спој проводним прстеновима на челу и зачељу ротора. Електромоторне силе и струје које се јављају у роторским штаповима зависе од релативне брзине кретања ротора у односу на поље то јест од брзине клизања $\Omega_k = \omega_k/p$ и магнетске индукције у зазору. Под северним магнетским полом обртног поља, индукују се роторске струје у једном смеру, док се под јужним магнетским полом обртног поља јављају роторске струје у другом смеру. Дакле, број полова створеног роторског поља ће бити одређен бројем полова обртног поља

које ствара статор. Другим речима, један те исти ротор се може користити на једнако успешан начин у двополној машини као и у машини са више полова.

4.63 Двобрзински намотај статора

Промену брзине обртања асинхроног мотора могуће је остварити променом броја полова. Да би се оваква промена остварила, потребно је да постоји могућност промене везе између секција статорског намотаја. Промена везе треба да омогући другачији број полова. На слици 4.45 приказан је статор трофазног асинхроног мотора чији су фазни намотаји подељени у по две секције. Секције a_1 и a_2 фазног намотаја a су начињене тако да стварају магнетопобудне силе једнаког правца и супротних смерова, што резултује четворополним магнетским пољем. Уколико се смер струје у једној од секција промени, последичне магнетопобудне силе имају исти смер, што ствара двополно магнетско поље. Промена положаја вектора магнетопобудне силе статора током једне трећине периода напајања $T = 1/f_S$ је дата на слици 4.46 за двополну и четворополну конфигурацију.

Слика 4.45: Двобрзински намотај статора. Променом начина повезивања половина фазних намотаја остварује се двополна или четворополна структура.

Промена брзине обртања путем измене броја полова захтева промену везе статорских секција у току рада машине. Да би се оваква промена постигла, неопходно је располагати већим бројем прекидача који ће успоставити или раскинути везу међу крајевима секција како би се остварио же-

љени број полова и жељена брзина обртања. Брзина обртања се најчешће мења од стране дигиталног управљачког уређаја који управља процесом у коме се мотор користи. Дакле, брзину је потребно променити без присуства руковаоца. Тада прекидачи морају бити контролисани, то јест такви да им се стање може променити у складу са командним напоном. Потреба за већим бројем контролисаних прекидача чини примену релативно сложеном. Поред сложене примене, основни недостатак промене брзине обртања изменом броја полова је дисконтинуална регулација. Наиме, брзину мотора није могуће континуално мењати. Уместо тога, може се одабрати једна у скупу од две или три расположиве дискретне вредности брзине, што се постиже превезивањем статорског намотаја у две или три могуће конфигурације.

Појавом транзисторских инвертора са ширинском модулацијом створена је могућност за континуалну промену учестаности напајања, чиме се губи потреба за променом броја полова у току рада.

Слика 4.46: Обртање вектора магнетопобудне силе током једне трећине периода напајања у двополној конфигурацији (лево) и четворополној конфигурацији (десно).

<u>Питање (4.28):</u>

Двополна асинхрона машина начињена за напајање из градске мреже развија превални моменат при брзини од n_{pr} = 2000 o/min. Статорски намотај је уклоњен, и на његово место је уграђен намотај који ствара четворополно поље. Одредити брзину при којој се развија превални моменат са четворополним намотајем.

Одговор (4.28):

Електромагнетски моменат је једнак количнику снаге обртног поља и синхроне брзине. Снага обртног поља је највећа за релативно клизање s_{pr} =

$R_R/(L_{\gamma e}\omega_S)$, односно за учестаност роторских струја $\omega_{kpr} = R_R/L_{\gamma e}$. Дакле, превални моменат се развија у случају када роторске струје имају учестаност ω_{kpr} која не зависи од броја полова. Релативна вредност превалног клизања једнака је $s_{pr} = (n_S - n_{pr})/n_S = 1/3$. Код двополне машине, има се $n_{pr} = 2000$ o/min, док ће код четворополне машине брзина обртања бити једнака $n_{pr} = n_S(1-s_{pr}) = 1500\ (1-s_{pr}) = 1000$ o/min.

4.64 Ознаке за брзину и учестаност

У претходним разматрањима је напоменуто да се кружна учестаност струја и напона означава малим словом ω, док се брзине којима се обрћу ротор, магнетско поље и магнетопобудна сила обележавају великим словом Ω. Овде ће бити дат преглед означавања са примерима вишеполних машина. У случају када се ради о двополним машинама, код којих је $p = 1$, постоји потпуна једнакост међу електричним учестаностима и механичким брзинама обртања.

Ω_s	синхрона брзина, угаона брзина обртања магнетског поља,
$\omega_s = p\Omega_S$	кружна учестаност напајања, учестаност статорских струја и напона,
$\omega_m = p\Omega_m$	електрична представа угаоне брзине обртања ротора
Ω_m	угаона брзина обртања ротора
$n = 9.54\ \Omega_m$	брзина обртања ротора изражена у обртајима у минуту
$\omega_k = \omega_s - p\Omega_m$	кружна учестаност роторских струја
$\Omega_k = \Omega_s - \Omega_m$	угаона брзина клизања или заостајање ротора за синхроном брзином

На примеру четворополне асинхроне машине са номиналном фреквенцијом напајања од $f = 50$ Hz и номиналном брзином обртања ротора од $n = 1350$ o/min, значајне вредности су

$$p = 2, \quad f = 50 \text{ Hz}$$
$$\omega_s = 100\,\pi, \; \Omega_s = 50\,\pi, \; n_s = 1500 \text{ об/мин}$$
$$n_k = 150 \text{ о/min}, \; \Omega_k = 5\,\pi, \; \omega_k = 10\,\pi$$
$$n = 1350 \text{ о/min}, \; \Omega_m = 45\,\pi.$$

Анализирани су традиционални приступи промени брзине обртања, међу којима

- варијација статорског напона,
- промена роторске отпорности и
- промена броја полова.

Поменути приступи имају један или више од поменутих недостатака,

- сложеност примене
- велики губици енергије
- изостанак могућности континуалне промене брзине у ширем опсегу

Савремено решење регулације брзине обртања асинхроних машина ослања се на енергетске претвараче који користе транзисторске прекидаче, раде на принципу ширинске модулације и пружају могућност континуалне варијације учестаности напајања и континуалне промене брзине.

4.65 Напајање из извора променљиве учестаности

Савремено решење регулације брзине обртања асинхроних машина ослања се на енергетске претвараче који користе транзисторске прекидаче, раде на принципу ширинске модулације и пружају могућност континуалне варијације учестаности напајања и континуалне промене брзине. Промена статорске учестаности омогућује постизање континуалне промене брзине без увећања губитака и без потребе за коришћењем сложене опреме или специјалне конструкције асинхроне машине. У даљем тексту биће анализирани напони које треба имати на прикључцима статорског намотаја.

4.66 Карактеристике извора променљиве учестаности

У фази *a* статорског намотаја постоји струја $i_a(t)$ и флукс $\Psi_a(t)$. Сматрајући да је расипни флукс мали, флукс фазног намотаја се може сматрати последицом обртног поља. У тренутку када вектор обртног поља лежи у оси фазног намотаја, флукс $\Psi_a(t)$ узима максималну вредност Ψ_m. Ако се поље обрће, флукс фазе *a* се простопериодично мења. Фазни напон једнак је $u_a(t) = R_S i_a(t) + \mathrm{d}\Psi_a(t)/\mathrm{d}t$. Занемарењем пада напона на статорској отпорности добија се

$$u_\alpha = u_a \cong \frac{\mathrm{d}\psi_{\alpha s}}{\mathrm{d}t} = \omega_s \psi_m \sin(\omega_s t - \varphi) \tag{4.119}$$

Клизање асинхроних машина је релативно мало, па је учестаност напајања одређена брзином обртања ротора, $\omega_S = p\Omega_S = p(\Omega_m + \Omega_k) \approx p\Omega_m$. Дакле, континуална промена брзине обртања захтева напајање статора трофазним системом напона континуално променљиве учестаности и континуално променљиве амплитуде ($\Psi_m \omega_S$). Облик фазног напона који треба имати на крајевима фазног намотаја дат је у наредној слици. Неопходно је да постоји могућност континуалне промене периода и вршне вредности таласног облика фазног напона.

Слика 4.47: Жељени облик напона на крајевима статорског намотаја.

4.67 Топологија енергетског претварача

На слици 4.48 је дата електрична шема енергетског претварача за напајање асинхроног мотора и облик линијског напона који се добија на излазним прикључцима. Напон на прикључцима у десном делу слике користи се за напајање трофазних машина напоном променљиве учестаности и амплитуде. Трофазни диодни исправљач који има шест диода исправља трофазну мрежу која се доводи на улаз енергетског претварача (леви део слике). Исправљени напон E постоји на кондензатору који је постављен у средишњи део претварача који се зове *једносмерно међуколо*. Прекидачка структура се састоји од укупно шест транзисторских прекидача снаге, организованих у три групе од по два транзисторска прекидача снаге повезана на ред и прикључена између сабирница једносмерног напона. Група од два редно везана прекидача зове се *фаза инвертора* (eng. *inverter arm*). У сваком тренутку је укључен један од два прекидача. Укључење оба прекидача би начинило кратак спој једносмерног међукола.

4.68 Импулсно ширинска модулација

Узимајући негативни пол једносмерног међукола за референтни потенцијал, укључење горњег прекидача резултује фазним напоном $u_a = E$, док укључење доњег прекидача даје $u_a = 0$. Исто важи и за фазне напоне u_b и u_c. Фазни напони узимају дискретне вредности, $u \in \{0, +E\}$, тако да линијски напони, какав је $u_{ab} = u_a - u_b$, узимају једну од три дискретне вредности, $u_{ab} \in \{-E, 0, +E\}$. Дакле, тренутна вредност линијског напона се не може мењати, већ узима једну од три дискретне вредности. Међутим, брзом изменом прекидачких стања може се добити поворка импулса променљиве ширине. Континуалном променом ширине импулса могуће је остварити континуалну промену средње вредности напона. Брзом изменом расположивих дискретних вредности $\{-E, 0, +E\}$, линијски напон може имати облик поворке импулса као што је показано на горњем десном делу слике. Променом ширине приказаних импулса могуће је мењати средњу вредност напона, и тако у машини створити ефекте једнаке онима који би се јавили код напајања из идеалног напонског извора са простопериодичном променом тренутне вредности напона.

Слика 4.48: Електрична шема енергетског претварача за напајање асинхроног мотора и облик линијског напона.

4.69 Промена средње вредности фазног напона

Фреквенције f_{PWM} комутација полупроводничких прекидача у трофазном транзисторском инвертору је најчешће блиска 10 kHz. Фазни напон $u_a(t)$ је импулсног облика. Током сваког периода од $T = 1/f_{PWM} \approx 100$ μs, прекидачко стање у коме је укључен горњи прекидач се задржава у трајању од t_{ON}, где је $0 < t_{ON} < T$, док током преосталог дела периода траје стање у коме је укључен доњи прекидач. Облик фазног напона приказан је на слици 4.49. Средња вредност напона је пропорционална времену t_{ON}. За тачку референтног потенцијала узима се негативни пол једносмерног кола, па је у интервалу $0 < t < t_{ON}$ фазни напон једнак $+E$, док се у преосталом делу периода T има напон $u_a = 0$. Континуалном променом времена t_{ON} у опсегу од $0 < t_{ON} < T$, средња вредност фазног напона $u_a^{sr} = E\,(t_{ON}/T)$ се мења од 0 до $+E$.

$$U_{SR} = \frac{1}{T} \cdot \int_{NT}^{(N+1)T} u_a dt = \frac{t_{on}}{T} E \tag{4.120}$$

Слика 4.49: Облик фазног напона. Горњи прекидач је укључен током интервала t_{ON}.

4.70 Простопериодична промена напона

Ширина импулса који образују фазни напон се може мењати, то јест *модулисати*. Промена ширине импулса се зове *импулсно ширинска модулација*, односно *Pulse Width Modulation* (PWM). Полазећи од израза $u_a^{sr} = E(t_{ON}/T)$ за средњу вредност напона u_a^{sr} који је у једном периоду комутације одређен временом t_{ON} могуће је одредити промену ширине импулса која даје жељену варијацију напона.

Да би се постигла промена средње вредности напона $u_a^{sr}(t)$, ширину импулса треба мењати по закону $t_{ON}(t) = T\, u_a^{sr}(t)/E$. Ширина импулса се може мењати у сукцесивним периодима комутације, тако да се у практичној примени ширина импулса у периоду $[nT..(n+1)T]$ одређује на основу израза $t_{ON}(n) = T\, u_a^{sr}(nT)/E$. Ако је $f_S \approx 50$ Hz жељена фреквенција фазног напона, φ почетна фаза, док број $0 < A < 1$ одређује жељену амплитуду, ширину импулса треба мењати по закону

$$t_{ON}(n) = \frac{T}{2} + \frac{T}{2} A \sin(2\pi f_S \cdot nT - \varphi) \tag{4.121}$$

да би се добио фазни напон u_a са средњом вредношћу које се мења на основу израза

$$u_a^{sr}(t) \approx \frac{E}{2} + \frac{E}{2} A\sin(2\pi f_S \cdot nT - \varphi)\,. \tag{4.122}$$

Наизменична компонента напона има амплитуду која се може произвољно мењати избором параметра A, док су фреквенција и фаза одређени параметрима f_S и φ. Фреквенције комутација f_{PWM} мора бити знатно већа од жељене фреквенције фазног напона, $f_S << f_{PWM}$. У изразу за $u_a^{sr}(t)$ постоји и једносмерна компонента $E/2$, која је последица избора тачке референтног потенцијала. Она није од значаја за рад машине. Наиме, асинхрона машина је повезана са трофазним транзисторским претварачем уз помоћ три проводника, па је њен рад одређен напоном између проводника, то јест линијским напоном. Треба сагледати и чињеницу да сам избор тачке референтног потенцијала, који је произвољан, не може утицати на рад електричне машине. Ради потврде оваквог става, може се одредити линијски напон $u_{ab}^{sr}(t)$ као разлика $u_a^{sr}(t)$ и фазног напона

$$u_b^{sr}(t) \approx \frac{E}{2} + \frac{E}{2} A\sin(2\pi f_S \cdot nT - \varphi - 2\pi/3)\,,$$

који фазно заостаје за $2\pi/3$. Одређивањем $u_{ab}^{sr}(t) = u_a^{sr}(t) - u_b^{sr}(t)$, једносмерне компоненте се поништавају, дајући наизменичан линијски напон који је једнак

$$u_{ab}^{sr}(t) \approx \frac{AE\sqrt{3}}{2}\sin(2\pi f_S \cdot nT - \varphi + \pi/6)$$

Дигитална имплементација ширинске модулације на ДСП платформи подразимева да су параметри A, f_S и φ бројеви чији бинарни запис постоји у RAM меморији и може се подесити тако да одговара потребама машине.

У сваком периоду жељене учестаности фазног напона постоји коначан број импулса чија је ширина модулисана (промењена) тако да се добије простопериодична промена средње вредности $u_a^{sr}(t)$. Поступак добијања фазног напона из поворке ширински модулисаних импулса има сличности са поступком формирања намотаја са квази-синусоидалном расподелом проводника смештањем проводника у коначан број жлебова.

4.71 Импулсна природа напона

Простопериодично модулисан фазни напон је представљен поворком импулса променљиве ширине. Када се ширина импулса простопериодично

мења према изразу $t_{ON}(n) = (T/2)\ [1+ A\sin(2\pi f_S nT-\varphi)]$, поворка импулса $u_a(t)$ има средњу вредност која се мења према изразу
$u_a^{sr}(t)\approx(E/2)+(E/2)\ A\sin(2\pi f_S t-\varphi)$.

Фреквенција комутација f_{PWM} мора бити знатно већа од жељене фреквенције фазног напона, $f_S << f_{PWM}$, да би се постепеном променом ширине импулса у сукцесивним периодима $T = 1/f_{PWM}$ у машини постигли ефекти блиски напајању из идеалног извора. Фреквенција f_S се назива *основном* или *фундаменталном*, и она узима вредности од неколико десетина или стотина циклуса у секунди, док се фреквенција f_{PWM} назива комутационом и узима вредности од 5 kHz до 20 kHz. Пошто је $f_S << f_{PWM}$, промене ширине импулса и средње вредности напона се називају споропроменљивим.

Спектар ширински модулисане поворке импулса садржи

- једносмерну компоненту $E/2$,
- споро променљиву наизменичну компоненту фреквенције f_S, то јест *основну* односно *фундаменталну* компоненту, створену варијацијом ширине импулса,
- компоненту фреквенције f_{PWM} (комутациона фреквенција је једнака $1/T$), створену периодичном изменом импулса, као и
- низ хармонијских компоненти мањег значаја, међу којима компоненте на фреквенцијама које су целобројни умношци f_{PWM}, као и интермодулационе компоненте, са фреквенцијама $mf_{PWM} \pm f_S$.

Једносмерна компонента фазних напона је једнака у свим фазама, тако да није од утицаја на линијске напоне. Споропроменљива наизменична компонента на основној фреквенцији f_S представља жељени фазни напон подесиве амплитуде и учестаности који је потребно довести на прикључке статорског намотаја.

Хармонијска компонента на фреквенцији комутација $f_{PWM} = 1/T \approx$ 10 kHz је последица импулсне природе фазног напона. Компонента напона на комутационој учестаности има амплитуду одређену напоном једносмерног међукола E, па се њени ефекти не могу занемарити. Потребно је анализирати ефекте импулсног напајања асинхроне машине и утврдити да ли је описани начин напајања прихватљив. За случај да импулсно напајање нема значајнијег ефекта на промену струје, момента и брзине обртања, рад асинхроне машине напајане из прекидачког извора се може сматрати еквивалентним раду са идеалним простопериодичним облицима напона, какав је $u_a(t) = (E/2) + (E/2)\ A\sin(2\pi f_S t-\varphi)$.

4.72 Валовитост струје код импулсног начина напајања

Равнотежа напона у фазном намотају a дата је једначином $u_a(t) = R_S\, i_a(t) + \mathrm{d}\Psi_a(t)/\mathrm{d}t$. Флукс Ψ_a се може представити као збир међусобног флукса Ψ_{ma}, који је последица садејства статорских и роторских струја и флуксева оба намотаја, и расипног флукса статора, пропорционалног индуктивности расипања L_γ. Једначина равнотеже напона добија облик $u_a(t) = R_S\, i_a(t) + L_\gamma\, \mathrm{d}i_a(t)/\mathrm{d}t + \mathrm{d}\Psi_{ma}(t)/\mathrm{d}t$. Обртно магнетско поље мења свој релативни положај у односу на фазни намотај, тако да се флукс Ψ_{ma} простопериодично мења са учестаношћу одређеном брзином обртања поља. Стога је електромоторна сила $\mathrm{d}\Psi_{ma}(t)/\mathrm{d}t$ простопериодична, учестаности $\omega_S \approx \omega_m$ и амплитуде једнаке производу учестаности и међусобног флукса Ψ_m. Посматрана електромоторна сила је споро променљива. Код анализе ефеката напајања импулсима фреквенције f_{PWM}, споре промене електромоторне силе се могу занемарити, чиме се једначина равнотеже напона своди на $u_a(t) = R_S\, i_a(t) + L_\gamma\, \mathrm{d}i_a(t)/\mathrm{d}t$.

Применом Лапласове трансформације добија се комплексни лик струје статора, $I_a(s) = U_a(s) / (R_S + sL_\gamma)$. Функција $W(s)= 1/ (R_S + sL_\gamma)$ представља *функцију преноса* статорског намотаја, која је једнака количнику комплексног лика струје и комплексног лика напона. Функција преноса $W(s)$ омогућује да се одреди одзив статорске струје на побуду напоном задате амплитуде и учестаности која је блиска комутационој. Функција је добијена занемарењем споро променљиве електромоторне силе, тако да је примењива за утврђивање одзива на фреквенције реда величине f_{PWM}, али се не може користити у анализи појава на основној (фундаменталној) фреквенцији f_S.

Количник струје и напона учестаности $\omega = 2\pi/T = 2\pi f_{PWM}$ добија се увођењем смене $s = j\omega$ у функцију $W(s)$ која тако добија облик $W(j\omega)= 1/(R_S + \mathrm{j}\omega L_\gamma)$. Када се ради о комутационим фреквенцијама од неколико килохерца, оправдано је увести претпоставку да је $R_S << \omega\, L_\gamma$, и тако да се добија релација $|I(j\omega)/ U(\mathrm{j}\omega)| \approx 1/(L_\gamma\, \omega)$. Дакле, што је већа учестаност наизменичне компоненте напона, то је мањи ефекат који она има на фазну струју. Код фреквенција реда величине 10 kHz, реактанса $L_\gamma\omega$ је тако велика да импулсни карактер напона има мали утицај на струју. Струја статора осцилује око средње вредности са фреквенцијом комутација прекидачког моста $f_{PWM} = 1/T = \omega/(2\pi)$. Када је комутациона учестаност довољно велика, осцилације струје имају малу амплитуду па се њихов ефекат на рад асинхроне машине може занемарити. Процена амплитуде осцилација струје може се добити коришћењем израза $|I(j\omega)/ U(j\omega)| \approx 1/(L_\gamma\omega)$, који вреди за случај побуде простопериодичним напоном. Осцилације струје око

средње вредности зову се *валовитост*, *ripple*, и најчешће имају амплитуду од неколико процената радне струје.

Слика 4.50: Облик фазне струје код импулсног напајања.

<u>Питање (4.29):</u>

Асинхрона машина номиналне фреквенције f_{Sn} = 50Hz има еквивалентну реактансу расипања $x_{\gamma e}$ = 20%. Машина се напаја из трофазног транзисторског инвертора прекидачке фреквенције f_{PWM} = 10 kHz. Проценити валовитост статорске струје која се јавља услед импулсног напајања.

Одговор (4.29):

Амплитуда импулса које прекидачки извор доводи на крајеве статорског намотаја једнака је напону једносмерног међукола. Напон E мора бити довољно велики да омогући достизање номиналног напона мотора, па се његова релативна вредност може проценити као $E^{rel} \approx 1$. Реактанса расипања при номиналној фреквенцији f_{Sn} има вредност $x_{\gamma e} = 0{,}2$. Комутациона учестаност је 200 пута већа, тако да је релативна вредност реактансе тада једнака $x^{PWM}_{\gamma e} = x_{\gamma e}\,(f_{PWM} / f_S) = 40$, односно 4000 %. Релативна вредност валовитости струје услед импулсног напајања се може проценити на $\Delta I \approx 1/\,x^{PWM}_{\gamma e} = 2{,}5\%$.

<u>Питање (4.30):</u>

Асинхрони мотор се напаја из трофазног транзисторског инвертора са напоном E у једносмерном међуколу и фреквенцијом комутација од $f_S = 1/T$. Брзина обртања је једнака нули, тако да се електромоторна сила индукована у фазама статора може занемарити. Отпорност статорског намотаја је занемарива. Позната је индуктивност расипања мотора L_γ. Може се претпоставити да је потенцијал звездишта мотора једнак средњој вредно-

сти потенцијала позитивног и негативног пола једносмерног међукола. Одредити облик и амплитуду осцилација статорске струје у случају када је $t_{ON} = T/2$.

Одговор (4.30):

После занемарења електромоторне силе и пада напона на отпорности статора, једначина равнотеже напона се своди на $u_a = L_\gamma \mathrm{d}i_a/\mathrm{d}t$. У првој половини периода T, током интервала t_{ON}, укључен је горњи прекидач фазе a инвертора, тако да је $L_\gamma \mathrm{d}i_a/\mathrm{d}t = +E/2$. Дакле, промена струје је линеарна. Слично важи и за другу половину периода, у којој је напон $u_a = -E/2$. Струја осцилује око средње вредности I_{sr} са амплитудом ΔI. Током прве половине периода, она се увећава са $I_{sr}-\Delta I$ на $I_{sr}+\Delta I$. Њена промена је линеарна, па је $\mathrm{d}i_a/\mathrm{d}t = 2\,\Delta I\,/\,(T/2) = (E/2)/L_\gamma$, одакле се добија $\Delta I = ET(8L_\gamma)$.

4.73 Фреквенцијски регулисане машине

Променом учестаности напајања асинхроне машине мења се и синхрона брзина Ω_S. У раду са $M_{em} = 0$ и $s = 0$, ротор се обрће синхроном брзином, па је $\Omega_m = \Omega_S$. Дакле, променом фреквенције се мења и брзина празног хода, односно пресек механичке карактеристике са апсцисом на $M_{em}(\Omega_m)$ дијаграму.

Поред брзине празног хода, механичку карактеристику асинхроне машине одређују и превални моменат, превално клизање и стрмина $S = |\Delta M_{em}/\Delta\Omega_m|$. Превално клизање $\Omega_{pr} = p\omega_{pr} = pR_R/L_{\gamma e}$ је одређено параметрима машине и не зависи од учестаности напајања. Превални моменат $M_{pr} = (3p/4)\,\Psi_S^2/L_{\gamma e}$ и стрмина механичке карактеристике $S = k\,\Psi_S^2/R_R$ су величине пропорционалне квадрату статорског флукса Ψ_S^2. Амплитуда статорског флукса зависи од напона и учестаности напајања, па је потребно проучити на који начин се при примени учестаности напајања мења статорски напон. На слици 4.51 је приказана фамилија механичких карактеристика које се добијају променом учестаности статорског напона.

Једначина равнотеже напона у намотају статора асинхроне машине која ради у устаљеном стању је

$$\underline{U}_s = R_s \underline{I}_s + j\omega_s (L_{\gamma s} \underline{I}_s + \underline{\psi}_m)\,. \qquad (4.123)$$

Слика 4.51: Фамилија механичких карактеристика асинхроне машине напајане из извора променљиве учестаности. (А) Природна карактеристика.

Занемарењем пада напона на статорској отпорности, једначина равнотеже напона у статорском намотају и устаљеном стању добија облик $\underline{U}_S \approx j\omega_S \Psi_S = j\omega_S L_{\gamma S} \underline{I}_S + j\omega_S \underline{\Psi}_m = j\omega_S L_{\gamma S} \underline{i}_S + j\omega_S L_m \underline{I}_m$. Амплитуда статорског напона је одређена количником вршне вредности напона и учестаности напајања, $\Psi_S \approx U_S/\omega_S$. Код напајања из трофазног транзисторског инвертора са ширинском модулацијом, учестаност ω_S основне компоненте напона (фундаментала) одређује синхрону брзину, док количник амплитуде статорског напона и учестаности напајања одређује флукс машине. За разлику од машина за једносмерну струју, код којих је побудни флукс одређен струјама засебног, побудног намотаја, док се електрична снага потребна за електромеханичко претварање доводи на прикључке арматурног намотаја, код асинхроних машина флукс, моменат и снага зависе од наизменичних напона и струја на прикључцима статорског намотаја.

Моменат створен у електричној машини се може израчунати као производ флукса и струје. Када је потребно остварити задати моменат M_{em}, потребна струја је пропорционална количнику M_{em}/Ψ_S, односно обрнуто пропорционална флуксу. Мања струја доводи до мањих губитака у намотајима, па је од користи узети веће вредности флукса.

Код напајања из извора варијабилне учестаности, флукс је одређен односом напона и учестаности, $\Psi_S \approx U_S/\omega_S$. Могуће га је увећати до вредности $\Psi_{max} \approx \Psi_{nom}$, која се налази на колену карактеристике магнетисања, дате на слици 4.52. Веће вредности доводе до засићења магнетског кола. Будући да је $\Psi_m \approx \Psi_S$, флукс је одређен струјом магнетисања i_m, која постоји у индуктивности L_m заменске шеме, и која стоји на апсциси карактеристике магнетисања $\Psi_m(i_m)$. При раду у зони магнетског засићења, у десном делу карактеристике $\Psi_m(i_m)$, флукс се веома мало увећава код увећања струје

магнетисања i_m. Другим речима, мала увећања флукса изнад колена карактеристике траже значајно повећање струје магнетисања. Дакле, при увећању односа U_S/ω_S изнад Ψ_{nom}, струја магнетисања i_m се значајно увећава, што доводи до веће ефективне вредности струје статора и већих губитака у намотајима, а не доприноси у већој мери флуксу. Стога се тежи да однос U_S/ω_S буде једнак Ψ_{nom}.

Слика 4.52: Карактеристика магнетисања асинхроног мотора.

$$\underline{\psi}_m \approx \frac{\underline{U}_s}{j\omega_s} \tag{4.124}$$

4.74 Слабљење поља

Рад у режиму $U_S/\omega_S = \Psi_{nom}$ није увек могућ. При већим вредностима брзине обртања, потребно је имати и већу учестаност напајања. Настојање да се при томе флукс одржи на номиналној вредности захтева увећање напона $U_S \approx \omega_S \Psi_{nom}$. У трајном раду, статорски напон не сме прећи номиналну вредност, како не би дошло до оштећења машине. Стога се и прекидачки извор за напајање асинхроне машине израђује тако даје напоне у опсегу $0 < U_S < U_{nom}$. Будући да увећање напона изнад номиналног напреже и оштећује изолацију, трофазни инвертори слични ономе на слици 4.48 дају излазни напон који не прелази номинални напон мотора. Ако је напон константан и једнак номиналном, а учестаност напајање се прогресивно увећава, флукс машине опада пропорционално порасту брзине.

Пошто се у номинално побуђеној машини има електромоторна сила $\omega_S \Psi_{nom}$ која при номиналној брзини $\Omega_m \approx \Omega_{Snom}$ достиже вредност номиналног напона $U_{nom} \approx \omega_{Snom} \Psi_{nom}$, у раду при брзинама већим од номиналне није могуће одржати номинални флукс. Будући да је највећи напон који се мо-

же довести на крајеве статорског намотаја једнак U_{nom}, у раду са брзинама $\Omega_m \approx \Omega_S > \Omega_{nom}$ флукс не може бити већи од $\Psi_S(\omega_S) = \Psi_{nom}(\omega_{nom}/\omega_S)$. Дакле, флукс ће при већим брзинама бити обрнуто пропорционалан брзини обртања и учестаности напајања, $\Psi \sim 1/\omega$. Одређивање амплитуде статорског напона асинхроне машине напајане из извора са променљивом учестаношћу врши се на следећи начин.

У раду са брзинама и учестаностима $\omega < \omega_{nom}$, напон је пропорционалан учестаности, $U_S \approx \omega_S \Psi_{nom}$, тако да се у машини има константан, номинални флукс.

$$\psi_m = \frac{U_s}{\omega_s} = \frac{U_s}{\omega} = const. \quad \Rightarrow \quad \frac{U}{f} = const. \tag{4.125}$$

У раду са брзинама које су веће од номиналне, напон статора се одржава на највећој, номиналној вредности, учестаност и брзине се увећавају, тако да флукс опада по закону $\Psi \sim 1/\omega$. Машина тада ради у зони слабљења поља и флукс опада са порастом брзине, односно учестаности напајања.

$$\psi(\omega)\Big|_{|\omega|>\omega_{nom}} = \frac{\omega_{nom}}{\omega} \cdot \psi_{nom} \tag{4.126}$$

Коначно, промена флукса је одређена једначином

$$\psi(\omega) = \begin{cases} \psi_{nom}, & \omega \le \omega_{nom} \\ \dfrac{\omega_{nom}}{\omega} \cdot \psi_{nom}, & \omega > \omega_{nom} \end{cases} \tag{4.127}$$

У раду са брзинама мањим од номиналне, однос U_S/ω_S и флукс у машини се не мењају. Стога све механичке карактеристике које се добијају при различитим учестаностима напајања $\omega_S < \omega_{Snom}$ имају исту вредност превалног момента и исти нагиб. Дакле, варијацијом учестаности напајања у опсегу $0 < \omega_S < \omega_{Snom}$, добија се фамилија карактеристика једнаког нагиба и превалног момента. Карактеристике се могу добити транслацијом природне карактеристике, која се добија при номиналном напајању. При брзинама већим од номиналне, машина ради у зони слабљења поља. Статорски напон се одржава на номиналној вредности, док флукс опада по закону $\Psi_S(\omega_S) = \Psi_{nom}(\omega_{nom}/\omega_S)$. Брзина празног хода резултујућих механичких карактеристика је одређена учестаношћу напајања, $\Omega_S = \omega_S/p$. Будући да су превални моменат M_{pr} и стрмина S пропорционални квадрату флукса, они се умањују сразмерно квадрату брзине, $M_{pr} \sim 1/\omega^2$. Обележавајући ознаком $M_{pr(nom)}$ превални моменат који се добија у раду са номиналним флуксом,

могуће је изразити превални моменат $M_{pr}(\omega_S)$ у режиму слабљења поља, при брзини обртања $\Omega_m \approx \Omega_S = p\omega_S$, као $M_{pr}(\omega_S) = M_{pr(nom)}\,(\omega_{nom}/\omega_S)^2$. Дакле, обвојница механичких карактеристика добијених при напајању из извора промењљиве учестаности и раду у зони слабљења поља опада у сразмери са квадратом брзине и учестаности напајања $\sim 1/\omega^2$.

Слика 4.53: Обвојница механичких карактеристика асинхроне машине напајане из извора промењљиве учестаности.

Учестаност извора ω_S може узети и негативну вредност. Примена негативне учестаности напајања не тражи измену фазног редоследа проводника којима се напаја статорски намотај. Довољно је унети негативну вредност ω_S у израз за одређивање ширине импулса $t_{ON}(n) = (T/2)\,[1+A\sin(\omega_S nT-\varphi)]$ које ствара прекидачки извор. При раду са $\omega_S < 0$, механичке карактеристике прелазе у други и трећи квадрант M_{em} - Ω_m равни.

4.75 Експлоатационе и транзијентне карактеристике

Варијацијом учестаности напајања и амплитуде статорског напона могуће је остварити рад у сва четири квадранта M_{em} - Ω_m равни. Од интереса је утврдити експлоатациону карактеристику, то јест геометријско место тачака у којима машина може трајно радити без оштећења, као и транзијентну карактеристику, то јест геометријско место тачака које се могу достићи у краћим временским интервалима.

Трајан рад асинхроне машине у одређеном режиму захтева да напон и струја буду у границама номиналних вредности, као и да укупни губици буду у границама номиналних, како не би дошло до прегревања и оштећења машине.

У раду са брзинама мањим од номиналне, флукс се одржава на номиналној вредности. У садејству са номиналном струјом, флукс даје номинални моменат M_{nom} на вратилу машине. Номинални моменат је расположив у трајном раду при свим брзинама обртања код којих је статорска учестаност у границама номиналне $|\omega_S| \leq \omega_{Snom}$.

У зони слабљења поља, статорска учестаност прелази номиналну вредност, $|\omega_S| > \omega_{Snom}$. Флукс се мења по хиперболичком закону $\Psi_S(\omega_S) = \Psi_{nom}(\omega_{nom}/\omega_S)$. Стога је и моменат који је расположив у трајном раду обрнуто пропорционалан брзини обртања и учестаности напајања. Моменат расположив у зони слабљења поља се може представити изразом

$$M_{nom}\frac{\Omega_{nom}}{\Omega} \tag{4.128}$$

који дефинише границе експлоатационе карактеристике у зони већих брзина.

Слика 4.54: Границе експлоатационе карактеристике у првом квадранту.

4.76 Граничне вредности величина у трајном раду

На слици 4.55 дате су највеће вредности релевантних величина које се могу одржати у устаљеном стању. Дата је промена граничних вредности напона, струје, кружне учестаности напајања, момента, флукса и снаге за асинхрону машину која се напаја из извора променљиве учестаности и напона. Зона $\Omega_m<\Omega_{nom}$ је област у којој је флукс константан и моменат константан. Зона $\Omega_m>\Omega_{nom}$ је област слабљења поља. Премда је приказан само први квадрант M_{em} - Ω_m равни, треба сагледати и могућност измене смера

обртања, као и рада у генераторском режиму, што је разлог да се коришћењем симетрије експлоатациона карактеристика пренесе у сва четири квадранта. На основу слике, статорска учестаност ω_S се увећава пропорционално брзини обртања. Занемарујући клизање, веза брзине обртања и учестаности је $\omega_S \approx p\Omega_m$. У зони константног флукса, при брзинама мањим од номиналне, однос U_S/ω_S се одржава константним. По достизању номиналне брзине, напон се задржава на номиналној вредности, док се кружна учестаност напајања увећава, што доводи до повећања синхроне брзине, док флукс машине хиперболички опада по закону $\Psi_S(\Omega) = \Psi_{nom}(\omega_{nom}/\omega_S)$.

Слика 4.55: Промена граничних вредности напона, струје, кружне учестаности напајања, момента, флукса и снаге у устаљеном стању. Асинхрона машина се напаја из извора променљиве учестаности и напона. Зона $\Omega_m<\Omega_{nom}$ је област константног флукса и момента, док је зона $\Omega_m>\Omega_{nom}$ област слабљења поља.

У зони константног флукса, расположиви моменат је константан, док се у зони слабљења поља (то јест константне снаге) може добити моменат $M(\Omega) \approx M_{nom}\ (\omega_{nom}/\omega_S)$. Расположива снага у зони константног флукса ($|\omega_S| \leq \omega_{Snom}$) линеарно расте са брзином. У зони слабљења поља, расположиви моменат опада $M \sim 1/\Omega$. Снага која је расположива у трајном раду у зони слабљења поља има константну вредност, $P(\Omega) \approx \Omega M_{nom}\ (\omega_{nom}/\omega) = P_{nom}$, што је разлог да се зона слабљења поља зове и зона константне снаге. Сагледавањем секундарних ефеката, који су у првој апроксимацији занема-

рени, може се показати да је при брзинама $\Omega_{nom} < \Omega < 2\,\Omega_{nom}$ расположива снага која је нешто већа од номиналне.

RI компензација

При одређивању промене статорског напона, занемарен је пад напона на отпорности статора. Начињена је апроксимација $\underline{U}_S = R_S\underline{I}_S + j\omega_S\underline{\Psi}_S \approx j\omega_S\underline{\Psi}_S$. Будући да је релативна вредност статорске отпорности врло мала, начињеном апроксимацијом се не ствара значајна грешка под условом да се мотор обрће брзином при којој је индукована електромоторна сила $\omega_S\Psi_S$ значајно већа од пада напона R_SI_S. У раду са веома малим брзинама, начињена апроксимација није оправдана.

Ако машина ради са врло малом брзином обртања, кружна учестаност је врло мала. Довођењем статорског напона U_S који је пропорционалан учестаности напајања флукс у машини ће бити мањи од номиналног. Ако је $U_S = \omega_S\Psi_{nom}$, тада у празном ходу, при раду са клизањем $s = 0$ постоји статорска струја $\underline{I}_S = \underline{U}_S/(R_S + j\omega_S L_S)$, тако да је статорски флукс једнак $\underline{\Psi}_S = L_S\underline{I}_S = L_S\omega_S\Psi_{nom}/(R_S + j\omega_S L_S)$. Амплитуда статорског флукса $|\underline{\Psi}_S|$ је мања од номиналне, што се неповољно одражава на рад асинхроне машине у области малих брзина обртања.

Поменути негативни ефекти се могу умањити ако се, у области малих брзина, одступи од закона управљања $U_S = \omega_S\Psi_{nom}$ и увећа напон напајања на начин приказан на слици 4.56.

Слика 4.56: ***RI* компензација - увећање напона при врло малим брзинама.**

Критична брзина

Асинхроне машине које раде у зони слабљења поља у трајном раду могу дати константну, номиналну снагу. Постоји међутим гранична брзина Ω_{kr} изнад које машина не може развити номиналну снагу. Гранична брзина Ω_{kr} се назива и *критичном*. Приближна вредност критичне брзине биће одређена из анализе у којој се, ради прегледности, сматра да је p=1, то јест узима се да електричне учестаности ω имају једнаку вредност као и релевантне брзине обртања Ω, док се клизање занемарује ($\omega_k << \omega_S$, $\Omega_k << \Omega_S$).

Рад са константном, номиналном снагом у зони слабљења поља захтева развијање момента $M(\Omega) \approx M_{nom}$ (ω_{nom}/ω). С друге стране, обвојница превалних момената мења се по закону $M_{pr}(\Omega) = M_{pr(nom)}$ $(\omega_{nom}/\omega)^2$, где је $M_{pr(nom)}$ превални моменат који се јавља при номиналним условима напајања. Функција $M(\Omega)$ се изједначава са $M_{pr}(\Omega)$ при брзини $\Omega_{kr} = \Omega_{nom}(M_{pr(nom)}/M_{nom})$. За брзине веће од критичне, расположиви превални моменат је мањи од момента $M_{nom}(\omega_{nom}/\omega)$ потребног за развијање номиналне снаге $P_{nom} = M_{nom}\omega_{nom}$. Машина може радити у режиму $\Omega > \Omega_{kr}$, али при томе не може развијати номиналну снагу. Расположиви моменат ће опадати са квадратом брзине, док ће расположива снага опадати сразмерно порасту брзине, $P \sim 1/\Omega$.

Уз наведена занемарења, критична брзина је једнака

$$\Omega_{kr} = \Omega_{nom} \frac{1}{2x_{\gamma e}}, \tag{4.129}$$

где је

$$x_{\gamma e} = \frac{X_{\gamma e}}{Z_{nom}} = \frac{L_{\gamma e}\omega_{nom}}{Z_{nom}} = \frac{L_{\gamma e}\omega_{nom} I_{nom}}{U_{nom}}.$$

<u>Питање (4.31):</u>

Један асинхрони мотор ради са номиналним напајањем при брзини Ω_m = 0 и има струју у статорским намотајима која је једнака I_{POL} = 5 I_{nom}. Дати процену релативних вредности превалног момента и највеће брзине обртања Ω_{kr} при којој је још увек могуће развијати номиналну снагу на вратилу.

Слика 4.57: Транзијентна и експлоатациона карактеристика асинхроног мотора.

Одговор (4.31):

Превални моменат који се добија при номиналном напајању одређен је изразом

$$M_{pr(nom)} = \frac{3p}{\Omega_S}\frac{U_{Sn}^2}{2X_{\gamma en}},$$

где је U_{Sn} номинална ефективна вредност фазног напона док је $X_{\gamma en}$ реактанса расипања при номиналној учестаности напајања. Усвајањем занемарења $R_S \approx 0$, $L_m >> L_{\gamma e}$ и $(R_R/s_{nom}) \approx U_{nom}/I_{nom} >> X_{\gamma en}$, номинални моменат се може представити следећим изразом,

$$M_{nom} = \frac{3p}{\Omega_S}\frac{R_R}{s_{nom}}\frac{U_{Sn}^2}{\left(\frac{R_R}{s_{nom}}\right)^2 + X_{\gamma en}^2} \approx \frac{3p}{\Omega_S}\frac{R_R}{s_{nom}}\frac{U_{Sn}^2}{\left(\frac{R_R}{s_{nom}}\right)^2} \approx \frac{3p}{\Omega_S}\frac{U_{Sn}^2}{\left(\frac{R_R}{s_{nom}}\right)} \approx \frac{3p}{\Omega_S}U_{Sn}I_{Sn},$$

у коме s_{nom} представља номиналну вредност релативног клизања. Релативна вредност превалног момента једнака је количнику претходна два израза,

$$m_{pr(nom)} = \frac{M_{pr(nom)}}{M_{nom}} = \frac{\frac{U_{Sn}^2}{2X_{\gamma en}}}{U_{Sn}I_{Sn}} = \frac{1}{2x_{\gamma en}},$$

где је $x_{\gamma en}$ релативна вредност реактансе расипања. Приближна вредност реактансе расипања се може одредити из полазне струје, $x_{\gamma en} \approx 1/I_{POL} = 0{,}2$.

Релативна вредност полазног момента једнака је $m_{pr(nom)}$ = 2,5. Критична брзина $\Omega_{kr} = \Omega_{nom}(M_{pr(nom)}/M_{nom})$ је највећа при којој се може добити номинална снага на вратилу. Релативна вредност критичне брзине (Ω_{kr} /Ω_{nom}) је једнака релативној вредности превалног момента, тако да је ω_{kr} = 2,5 ω_{nom}.

4.77 Конструкција асинхроних машина

Асинхроне машине се користе од деведесетих година 19. века. Током првог столећа њихове примене, није било прекидачких транзистора снаге нити других компоненти или направа које би дале практично, примењиво решење за варијацију учестаности напајања и континуалну промену брзине. Стога су машине пројектоване за рад са константном учестаношћу напајања. Покретање асинхроних мотора обављало се прикључењем статора на трофазну мрежу индустријске фреквенције од 50 Hz, односно 60 Hz.

4.77.1 Мрежно напајане машине

При поласку номинално напајаног асинхроног мотора, у статорским намотајима се јавља полазна струја $I_P \approx U_{Sn}/X_{\gamma e}$, где је $X_{\gamma e} \approx X_{\gamma S} + X_{\gamma R}$ еквивалентна реактанса расипања. Мале вредности реактансе расипања резултују веома великим вредностима полазне струје. Реактанса од $x_{\gamma e} \approx 10\%$ даје полазну струју која десетоструко превазилази номиналну струју машине. Режим поласка асинхроног мотора траје све док се брзина обртања не увећа до вредности блиске синхроној, када елемент R_R/s заменске шеме узима вредности $R_R/s > X_{\gamma e}$ и тако ограничава статорску струју. Време залетања зависи од момента инерције J, и може узети вредност од неколико стотина милисекунди до неколико секунди. Губици који се током залетања имају у намотајима су пропорционални квадрату полазне струје, тако да мотор са реактансом $x_{\gamma e} \approx 10\%$ током залетања може имати губитке у намотајима сто пута веће него у номиналном режиму рада. Десетострука полазна струја може представљати проблем у пројектовању инсталација и напојних водова.

Ради смањења полазне струје асинхроних машина које раде са константном учестаношћу у току пројектовања су предузимане мере које дају већу реактансу расипања и мање полазне струје. Индуктивност расипања је пропорционална односу N^2/R_μ, где је N број навојака док је R_μ магнетска отпорност на путу расипног флукса. Смањењем магнетске отпорности R_μ могуће је увећати индуктивност расипања и реактансу расипања. Један од

начина да се речено постигне је коришћење полузатворених и затворених жлебова у магнетском колу ротора.

Слика 4.58: (A) Полузатворени жлеб. (B) Отворени жлеб.

Сужавањем отвора роторског жлеба смањује се магнетска отпорност на путу расипног флукса чиме се увећава расипна индуктивност и реактанса расипања а смањује полазна струја. Увећање реактансе се повољно одражава на полазну струју, али зато умањује превални моменат, који је обрнуто пропорционалан реактанси расипања. Током пројектовања асинхроне машине за рад са константном учестаношћу напајања, избор реактансе расипања је резултат компромиса. Бира се вредност која даје прихватљиве полазне струје, не доводећи при томе до неприхватљивог смањења превалног момента.

При покретању асинхроног мотора напајаног из градске мреже потребно је да полазни моменат M_{POL} буде већи од отпора кретању M_m. Полазак се одвија са убрзањем које је једнако $J\,\mathrm{d}\Omega_m/\mathrm{d}t = M_{POL} - M_m$ и које зависи од полазног момента. Веће вредности полазног момента резултују већим убрзањем и краћим временом залетања. Скраћење времена залетања умањује загревање мотора и повољно се одражава на његов животни век. Полазни моменат $M_{POL} = (3p/\Omega_{Sn})R_R I^2_{POL}$ зависи од квадрата полазне струје и отпорности у ротору R_R. Ради увећања полазног момента, потребно је начинити ротор чији штапови имају мању површину попречног пресека или су начињени од материјала веће специфичне отпорности какав је месинг. Међутим, увећањем роторске отпорности добијају се већи губици у намотајима ротора, чиме се умањује и степен корисног дејства машине. Ефикасан трајан рад захтева што мање вредности R_R, док стварање адекватног полазног момента захтева што веће вредности истог параметра.

Проблем се може решити пројектовањем роторског намотаја са еквивалентном отпорношћу R_R која зависи од учестаности роторских струја. У режиму поласка је потребно имати велике вредности R_R да би се добио што већи полазни моменат. Тада је фреквенција роторских струја једнака статорској, $f_k = f_S = 50$ Hz. У трајном раду при брзинама блиским номинал-

ној, када треба имати мале вредности R_R, фреквенција роторских струја је вишеструко мања, $f_k \sim$ 1 Hz. Градњом двоструког кавеза, какав је приказан на слици 4.59, остварује се фреквенцијска зависност отпорности роторског намотаја. У дубини магнетског кола ротора постављени су алуминијумски или бакарни штапови који имају већу површину попречног пресека. Ближе површини и ваздушном зазору уграђени су месингани штапови. Слика приказује линије магнетског поља расипног флукса. Бакарни штапови су обухваћени великим бројем линија поља. Стога су расипни флукс, индуктивност расипања и реактанса расипања за доњи, бакарни кавез релативно велики. Уграђен ближе зазору, месингани кавез је обухваћен мањим бројем линија поља расипног флукса, па је реактанса овога кавеза значајно мања. При поласку, фреквенција роторских струја је $f_k = f_S =$ 50 Hz, што увећава реактансе $X_{\gamma e} = L_{\gamma e}\omega_k$. Услед релативно велике учестаности, импеданса сваког од кавеза је тада претежно реактивна, то јест $X_{\gamma e} >> R_R$. Будући да је реактанса месинганог кавеза значајно мања, струја ротора ће при поласку постојати претежно у горњем кавезу, веће отпорности. Када се залетање оконча и мотор уђе у устаљени режим, фреквенција роторских струја се значајно смањи и блиска је $f_k \sim$ 1 Hz, тако да је импеданса сваког од кавеза претежно отпорна, то јест $X_{\gamma e} << R_R$. Пошто је отпорност бакарног кавеза значајно мања, струја ротора ће већим делом постојати у његовим штаповима.

Слика 4.59: Облик роторских жлебова код ротора са двоструким кавезом. (A) Месингани кавез положен ближе зазору. (B) Бакарни или алуминијумски кавез у дубини магнетског кола.

Може се закључити да струје ротора са двоструким кавезом постоје у горњем, месинганом кавезу током поласка, док се при раду у устаљеном режиму, са брзинама блиским синхроној, струје ротора успостављају у доњем, бакарном кавезу. Тиме је постигнута фреквенцијска зависност екви-

валентне отпорности ротора која даје мале вредности параметра R_R у устаљеном режиму и велике вредности R_R у режиму поласка. Израда двоструког кавеза увећава сложеност израде и цену машине, тако да се користи углавном код машина већих снага.

Ефекти слични онима које ствара двоструки кавез могу се добити градњом роторских жлебова смањене ширине и повећане дубине. Пример дубоког роторског жлеба дат је на слици 4.60. У жлебу је смештен роторски штап правоугаоног облика. Струја која постоји у дну жлеба је обухваћена линијама расипног поља. Када у проводнику постоји струја релативно велике учестаности, променљиви расипни флукс ствара електромоторну силу која се противи успостављању струје. Струју која постоји при врху жлеба обухвата веома мали расипни флукс, тако да нема реактивне електромоторне силе која би се супротстављала успостављању струје. Стога се при релативно великим учестаностима струја у дубоком жлебу потискује према ваздушном зазору. Пример неравномерне расподеле струје је дат у десном делу доње слике. Будући да струја постоји у мањем делу попречног пресека правоугаоног роторског штапа, то је еквивалентна отпорност увећана. У случају да је учестаност мала, електромоторне силе које се јављају услед расипног флукса нису од значаја, па је тада густина струје једнака на целом попречном пресеку штапа.

Слика 4.60: Дубоки жлебови.

4.77.2 Машине за рад са променљивом учестаношћу

Претходни примери указују на мере којима треба прибећи током пројектовања асинхроних машина за рад са константном учестаношћу напајања, како би се ограничила полазна струја, добио довољан полазни моменат, и постигао прихватљив степен корисног дејства у номиналном режиму рада.

Савремене асинхроне машине се напајају из транзисторских инвертора који дају трофазни систем напона променљиве учестаности и амплитуде. Параметри напајања машине се прилагођавају радном режиму, тако да је полазак могуће остварити уз учестаност напајања која је блиска номиналном клизању, и уз амплитуду напона одређену тако да се постигне номинални флукс. Фреквенцијски регулисане машине никада не долазе у режиме какав је полазак уз примену номиналног мрежног напона. Стога их је могуће пројектовати тако да жлебови статорског и роторског магнетског кола буду отворени, што даје мање расипање и већи превални моменат. Пример отвореног жлеба дат је на слици 4.58 B.

Поред веће вредности превалног момента, предност која се добија смањењем индуктивности расипања је и могућност брже промене струје и момента мотора. Будући да електромагнетски моменат машине зависи од струје у намотајима, остварива брзина промене момента зависи од првог извода струје, то јест од $\mathrm{d}i_s(t)/\mathrm{d}t$. Једначина равнотеже напона у намотају статора се може представити релацијом $u_s = R_s i_s + L_{\gamma e}\mathrm{d}i_s/\mathrm{d}t + e$. Стога је остварива вредност извода струје статора $\mathrm{d}i_s/\mathrm{d}t = (u_s - R_s i_s - e)/L_{\gamma e}$ већа у случају да је индуктивност расипања смањена.

Смањење индуктивности расипања може имати и негативних последица. Због коначног броја жлебова и несинусоидалне расподеле проводника, у намотајима машине могу постојати електромоторне силе које садрже више хармонике. Јачина струје виших хармоника у роторским штаповима је директно пропорционална амплитуди виших хармоника електромоторне силе и обрнуто пропорционална импеданси намотаја. Импеданса намотаја на учестаности виших хармоника је превасходно одређена реактансом расипања. Стога умањење реактансе расипања може довести до увећања губитака услед струја виших хармоника. Нежељени ефекти се могу избећи правилним обликовањем роторских жлебова и одговарајућим начином формирања магнетског кола и намотаја машине.

5 Синхроне машине

Машине наизменичне струје се деле на асинхроне и синхроне машине. Код обе врсте, у проводницима статора постоје наизменичне струје које стварају обртно магнетско поље.

Магнетско коло статора као и намотаји статора асинхроних и синхроних машина су у свему једнаки. У оба случаја, трофазни систем наизменичних струја статора ствара обртно поље чија је брзина одређена кружном учестаношћу напајања. Синхроне и асинхроне машине се разликују у конструкцији ротора. Намотај ротора асинхроне машине је најчешће кавез који се састоји од алуминијумских штапова постављених у жлебовима ротора. Ротор синхроне машине има побудни намотај, чија једносмерна струја ствара роторски флукс. Уместо побудног намотаја, ротор синхроне машине може имати сталне магнете који су уграђени у магнетско коло ротора.

Намотај ротора асинхроне машине је кратко спојен. Када ротор асинхроне машине заостаје за обртним пољем за износ клизања, у штаповима кратко спојеног кавеза се индукују електромоторне силе и јавља се струја. Садејством индукованих струја и магнетског поља добија се електромагнетски моменат, који је пропорционалан клизању. Развијање момента захтева да се ротор обрће нешто спорије него поље, како би клизање поља у односу на ротор створило промену флукса, електромоторну силу, струје у роторским штаповима и кретни моменат. Створени моменат зависи од кружне учестаности роторских струја $\omega_k = \omega_S - \omega_m$, која је одређена заостајањем ротора у односу на поље. При номиналном раду, ротор се не обрће синхроно са пољем, што је и разлог за назив *асинхрона машина*.

Ротор синхроне машине је електромагнет или стални магнет. Положај роторског флукса је стога једнозначно одређен положајем ротора. Ротор се врти синхроно са обртним пољем и ствара моменат пропорционалан векторском производу статорског и роторког флукса. Синхроно обртање ротора и поља је разлог за назив *синхрона машина*.

5.1 Елементи конструкције и принципи рада

Синхроне машине имају наизменичне струје у проводницима статора, исто као и асинхроне. Статорске струје стварају магнетопобудну силу статора F_S која се обрће брзином $\Omega_S = \omega_S / p$ која је одређена учестаношћу статорских струја ω_S и бројем пари полова p. Магнетопобудна сила статора ствара флукс $\Phi_S = F_S/R_\mu$, који зависи од магнетске отпорности R_μ. Флукс Φ_S се врти једнаком брзином као и магнетопобудна сила. Ротор синхроне машине може имати сталне магнете уграђене у магнетско коло, или побудни роторски намотај у који се доводи једносмерна струја. У оба случаја, ствара се флукс Φ_R чији је правац и смер одређен положајем ротора. Флукс Φ_R се обрће једнаком брзином Ω_m као и сам ротор. Када постоји једнакост $\Omega_m = \Omega_S$, флукс статора Φ_S и флукс ротора Φ_R не мењају релативни положај па је угао који образују два флукса константан. Моменат и снага претварања зависе од векторског производа два флукса, односно од угла који постоји међу њима. Стога се у условима $\Omega_m = \Omega_S$ може развити кретни моменат који зависи од амплитуда два флукса и њиховог релативног положаја. Рад синхроне машине је заснован на синхроном обртању ($\Omega_m = \Omega_S$) статорског обртног поља и ротора.

5.2 Намотаји статора

Статор синхроне машине је у свему једнак статору асинхроне машине. Струјно коло статора састоји се од три дела, три фазе. Свака од фаза се добија редним везивањем већег броја навојака. Проводници сваке фазе се распоређују у жлебове, при чему се тежи да подужна густина проводника има простопериодичну промену. Идеална расподела се не може постићи стога што проводнике није могуће смештати у произвољне положаје, већ искључиво у жлебове магнетског кола, чији је број коначан. Сваки од три фазна намотаја има по два прикључка. Улазни прикључци сваке фазе синхроног мотора се прикључују на трофазни извор наизменичног напона, док се излазни крајеви најчешће спајају међу собом. Крајеви статора синхроног генератора се повезују са трофазним потрошачем. Ако је збир фазних струја једнак нули, $i_a(t) + i_b(t) + i_c(t) = 0$, тада не постоји потреба да се чвор у који су повезани излазни крајеви фазних намотаја повезује са изворoм, тако да није потребан повратни вод. Поменути чвор се зове *звездиште*, док се описана шема зове *веза у звезду*. У неким случајевима, фазе трофазног статорског намотаја се везују у *троугао*. Сваки од фазних намотаја ствара магнетопобудну силу одређену бројем навојака у фазном намотају и струјом која постоји у проводницима. Наизменичне струје стварају

променљиве магнетопобудне силе. Струје i_a, i_b и i_c у појединим фазама статорског намотаја стварају магнетопобудне силе F_a, F_b и F_c. Релевантни вектори магнетопобудних сила леже у оси фазних намотаја. Осе фазних намотаја *двополног намотаја* су просторно померене за $2\pi/3$. Резултантна магнетопобудна сила статора F_S се добија векторским збрајањем магнетопобудних сила F_a, F_b и F_c које стварају фазни намотаји.

Слика 5.1: Трофазни статорски намотај синхроне машине.

5.3 Обртно поље

Осе фазних намотаја статора, као и и релевантне магнетопобудне силе F_a, F_b и F_c су просторно померене за $2\pi/(3p)$, где је p број пари магнетских полова. Начин формирања статорског намотаја који даје магнетко поље са више од 2 магнетска пола објашњен је у поглављу о асинхроним машинама. Успостављањем наизменичних струја исте амплитуде и учестаности ω_S, међу собом фазно померених за $2\pi/3$, у двополној машини се добија *двополно* поље статора које ротира брзином $\Omega_S = \omega_S$. Када је статорски намотај начињен тако да ствара поље са већим бројем пари магнетских полова ($p > 1$), поље статора се обрће брзином $\Omega_S = \omega_S/p$. Када се у намотајима

успоставе наизменичне струје једнаке амплитуде, учестаности ω_s и фазног помераја од 2π/3, добијају се фазне магнетопобудне силе

$$F_a = N_s I_m \cos\omega_s t\,,$$
$$F_b = N_s I_m \cos(\omega_s t - \frac{2\pi}{3})\,, \qquad (5.1)$$
$$F_c = N_s I_m \cos(\omega_s t - \frac{4\pi}{3})\,,$$

где је N_s број фазних навојака. Збрајањем магнетопобудних сила појединих фаза добија се резултантна магнетопобудна сила статора F_S. Дакле, у магнетском колу машине се ствара обртно поље, чија се амплитуда не мења, и које се обрће брзином $\Omega_S = \omega_s/p$. Одређивање амплитуде и просторне оријентације магнетопобудне силе коју ствара трофазни статорски намотај изложено је у поглављу *Асинхроне машине*.

Фазни став статорских струја одређује положај магнетопобудне силе статора F_S. У устаљеном режиму, вектор F_S се обрће у синхронизму са ротором. Створени моменат зависи од синуса угла између роторског флукса и магнетопобудне силе статора. У случају када постоји синхронизам у обртању поља и ротора, синхрона машина развија константан моменат и снагу.

Слика 5.2: Просторна оријентација вектора магнетопобудне силе статора одређена је тренутним вредностима фазних струја.

Магнетопобудна сила сваке од фаза статора је оријентисана у правцу осе фазног намотаја. Трофазни намотај двополне машине (p=1) се формира тако да су осе фазних намотаја просторно померене за 2π/3. Амплитуде

магнетопобудних сила F_a, F_b и F_c су одређене струјама $i_a(t)$, $i_b(t)$ и $i_c(t)$, као и бројем фазних навојака. Резултантна магнетопобудна сила F_S је векторски збир магнетопобудних сила појединих фаза. Количник вектора F_S и магнетске отпорности R_μ даје вектор статорског флукса Φ_S. Укупни флукс статора Ψ_S зависи од броја навојака статора N_S. У случају да је статорски намотај концентрисан, сви проводници једног фазног намотаја смештени су у два дијаметрално супротно постављена жлеба. Тада се у свим навојцима има једнак флукс Φ_S, па је однос флукса у намотају Ψ_S и флукса у једном навојку одређен бројем навојака N_S, према једначини $\Psi_S = N_S \Phi_S$.

Проводници статорског намотаја су најчешће простопериодично расподељени по обиму машине, тако да у појединим навојцима постоје различите вредности флукса $\Phi_S(\theta)$, које зависе од положаја навојка. Укупни флукс намотаја се одређује интеграцијом, на начин објашњен у уводном поглављу. Однос вршне вредности флукса у намотају и вршне вредности флукса у једном навојку је тада одређен изразом $\Psi_S = (\pi/4)\, N_S \Phi_S$.

Слика 5.3: Вектор магнетопобудне силе и флукса статора трофазне синхроне машине.

Статорски флукс се обрће брзином Ω_S, и она је одређеном кружном учестаношћу струја у проводницима статора. Део флукса статора обухвата

статорске проводнике али не пролази ваздушним зазором нити магнетским колом ротора. Таква компонента се зове *флукс расипања*, исто као и код асинхроних машина. Преостали део статорског флукса се успоставља кроз ваздушни зазор и магнетско коло ротора. Таква компонента је *међусобни флукс* и доприноси укупном међусобном флуксу машине.

Електромагнетски моменат се ствара садејством статорског и роторског флукса. Ротор синхроне машине може имати сталне магнете, или нарочит *побудни* намотај чија струја ствара магнетопобудну силу ротора и роторски флукс.

Флукс статорског намотаја је једнак

$$\vec{\psi}_s = N\frac{\vec{F}_s}{R_\mu}, \tag{5.2}$$

где је R_μ магнетска отпорност а N број навојака по фази.

5.4 Флукс побуде

Ротор синхроне машине најчешће има побудни намотај са једносмерном (сталном) струјом која ствара роторски флукс. Уместо побудног намотаја, ротор синхроне машине може имати и сталне магнете који су уграђени у магнетско коло ротора. Дејство побудног намотаја или сталних магнета на ротору доводи до успостављања роторског флукса. Струје статорског намотаја стварају магнетопобудну силу F_S и флукс статора. Електромагнетске силе теже да доведу један наспрам другог супротне магнетске полове статора и ротора. Када статорско поље ротира тако да његов северни пол непрекидно предњачи испред јужног роторског пола, постојаће константан електромагнетски моменат који тежи да покрене ротор и доведе до стања у коме ротор прати поља статора.

Слика 5.4: Електромагнетски моменат настоји да доведе ротор у положај у коме је роторски флукс колинеаран са вектором магнетопобудне силе статора.

$$\vec{M} \approx \vec{\psi}_R \times \vec{\psi}_S$$

Развијање константног момента и добијање континуалног електромеханичког претварања тражи да релативни положај статорског и роторског флукса остане непромењен, што је могуће у случају да се ротор обрће синхроном брзином, дакле истом брзином којим се обрће и поље F_S статора.

Електромагнетски моменат је пропорционалан векторском производу статорског и роторског флукса. Алтернативно, моменат се може приказати као векторски производ роторског флукса и магнетопобудне силе статора.Моменат се може добити и као векторски производ роторског флукса и вектора струје статора, $M_{em} \sim \Phi_R \times i_S \sim |\Phi_R|\ |i_S| \sin(\xi)$, где ознака ξ означава угао који образују вектор роторског флукса и вектор струје статора.

Амплитуда статорске струје потребне за добијање траженог момента, најмања је у случају када су вектори ортогонални, $\xi = \pm\pi/2$. Тада се имају и најмањи губици у намотају статора.

У случају да треба постићи тражени моменат уз помоћ синхроне машине са сталним магнетима на ротору, неопходно је у фазним намотајима статора успоставити струје i_a, i_b и i_c на начин који даје вектор магнетопобудне силе у правцу нормалном на флукс ротора. Амплитуду струје треба одредити тако да одговара траженом моменту.

Питање (5.1):

Посматрати две асинхроне машине са кратко спојеним кавезним ротором које имају једнаке димензије ротора и статора. Једна од машина је двополна а друга четворополна. Хоће ли електрична машина која се добија као комбинација статора прве и ротора друге машине моћи да развија момент?

Одговор (5.1):

Развијање момента се заснива на интеракцији статорског и роторског магнетког поља. Да би се добио електромагнетски моменат, потребно је да поље статора и ротора имају једнак број магнетских полова. Магнетско поље статора асинхроне машине створено је дејством магнетопобудне силе проузроковане електричним струјама у проводницима статора. Статорски намотај прве машине је формиран тако да ствара магнетско поље са два магнетка пола, док статорски намотај друге машине ствара поље са четири магнетска пола, два северна и два јужна пола. У оба случаја, магнетско поље ротора зависи од струја које постоје у проводницима ротора, то јест роторким штаповима. Струје у ротору се јављају као последица индуковане електромоторне силе. Електромоторна сила у једном од роторских штапова зависи од јачине магнетске индукције у близини штапа и брзине клизања. Будући да промена амплитуде и смера електромоторне силе и струје ротора дуж обима машине прати промену магнетског поља, број магнетских полова роторског флукса биће одређен бројем полова магнетског поља статора. Дакле, један те исти ротор ће стварати двополно поље када ради унутар двополног статора, односно четворполно поље у случају да ради унутар статора са намотајем који ствара магнетско поље са четири пола. Стога ће и комбинација статора и ротора, наведена у питању, исправно функционисати и стварати моменат.

Питање (5.2):

Посматрати две синхроне машине са сталним магнетима на ротору, које имају једнаке димензије ротора и статора. Једна од машина је двополна а друга четворополна. Хоће ли електрична машина која се добија као комбинација статора прве и ротора друге машине моћи да развија момент?

Одговор (5.2):

За разлику од асинхроних машина, роторски флукс синхроне машине се ствара уградњом побудног намотаја или сталних магнета на ротор. Струја

побудног намотаја није индукована од стране статора, већ се обезбеђује из засебног извора једносмерне струје. Стога број магнетских полова поља које ствара ротор синхроне машине зависи од начина на који је ротор конструисан, то јест од начина извођења роторског електромагнета (побудног намотаја), односно од начина на који су стални магнети уграђени у магнетско коло ротора. Дакле, број магнетских полова роторског поља синхроне машине није одређен бројем полова статорског обртног поља, као што је случај код асинхроних машина. Према томе, синхрона машина ће исправно функционисати и развијати моменат једино у случају када статор и ротор имају једнак број магнетских полова. Комбинација двополног статора са четворополним ротором не може развити електромагнетски моменат.

5.5 Конструкција синхроних машина

Синхроне машине имају статор на коме је трофазни намотај и ротор на коме постоји електромагнетска побуда (побудни намотај) или стални магнети. На прикључке статорског намотаја се доводи симетричан трофазни систем струја и напона, који ствара обртно магнетско поље у ваздушном зазору машине. Поље статора се обрће једнаком брзином као и ротор. Садејством два поља ствара се електромагнетски моменат. Производе се и користе синхроне машине у облику диска, цилиндричне машине, машине са шупљим ротором као и линеарне синхроне машине, које на место обртног стварају праволинијско кретање (транслацију). Најчешће су у употреби цилиндричне машине.

5.6 Магнетско коло статора

Статор синхроне машине је најчешће шупљи цилиндар унутар кога се смешта ротор. Главни делови статора су његово магнетско и струјно коло. Магнетско коло је начињено од феромагнетског материјала, најчешће легуре гвожђа, док се струјно коло састоји од изолованих бакарних проводника.

Слика 5.5: Магнетско коло статора се добија слагањем лимова.

Статор синхроне машине је у свему једнак статору асинхроне машине. У магнетском колу статора постоји промена магнетске индукције услед обртања магнетског поља у односу на статор. Индукција се мења са учестаношћу ω_S, једнако као и струје у проводницима статора. Промена магнетске индукције доводи до губитака у магнетском пољу. Снага губитака се дели на губитке услед вихорних струја, који су пропорционални квадрату учестаности и губитке услед хистерезиса, који су пропорционални учестаности. Код синхроних машина напајаних из мреже индустријске учестаности, индукција у магнетском колу статора пулсира са фреквенцијом од f_S = 50 Hz. Да би се умањили губици у гвожђу, магнетско коло се формира слагањем лимова међу којима постоји танак слој електричне изолације.

Лимови су начињени од феромагнетског материјала и то најчешће од гвожђа са примесама мангана или других елемената који побољшавају магнетске особине легуре. Ламинација магнетског кола отежава успостављање вихорних струја и умањује губитке који постоје у магнетском колу услед пулсација магнетске индукције. Будући да магнетско поље ротира, магнетска индукција унутар феромагнетика мења свој правац. Стога је битно да феромагнетски лимови имају једнаке магнетске особине у уздужном и попречном правцу. Овакви лимови се добијају поступком *топлог ваљања* и називају се *динамо лимови*. С друге стране, лимови од којих се формира магнетско коло трансформатора се добијају процесом *хладног ваљања*. Они имају боље магнетске особине у правцу у коме се простире поље, које код трансформатора не мења правац.

Слагањем лимова се добија шупљи цилиндар који са унутрашње стране има жлебове, предвиђене за смештај проводника статорског намотаја. Делови магнетског кола између жлебова називају се зупцима. Магнетска ин-

дукција унутар зубаца је већа од индукције у остатку магнетског кола статора, што доводи до већих губитака у гвожђу у зони зубаца.

5.7 Конструкција ротора

У левом делу горње слике приказан је ротор синхроне машине у чије су магнетско коло уграђени стални магнети. Карактеристика магнетисања $B(H)$ сталних магнета има релативно велику вредност реманентне индукције B_r. У одсуству роторског намотаја, не постоји магнетопобудна сила ротора $F = Ni$, тако да нема могућности да спољашњи фактори, то јест фактори изван сталног магнета створе поље H у унутрашњости магнета. Ако је реманентна индукција у сталним магнетима довољно велика, могуће је имати значајне вредности роторског флукса. Уградњом сталних магнета у магнетско коло ротора губи се потреба за коришћењем роторског намотаја, чиме се поједностављује конструкција машине, умањују укупни губици и увећава степен корисног дејства. Недостатак описаног решења је изостанак могућности да се флукс мења у току рада, што отежава рад у области слабљења поља.

Слика 5.6: (A) Ротор са сталним магнетима. (B) Намотани ротор.

У десном делу слике приказан је ротор са електромагнетском побудом. На ротор се уграђује побудни намотај са N_P навојака, у коме се успоставља једносмерна струја i_P. Магнетопобудна сила побуде $F_R = N_P i_P$ одређује побудни флукс $\Phi_P = N_P i_P / R_m$, као и флукс побудног намотаја $\Psi_P = N_P \Phi_P = (N_P^2/R_m) i_P = L_P i_P$. Флукс расипања побуде обухвата проводнике побуде, али

не пролази ваздушним зазором нити магнетским колом статора. Већи део побудног флукса Ψ_{mR} обухвата и статорски намотај и доприноси процесу електромеханичког претварања енергије и стварању кретног момента.

Предност електромагнетске побуде је у могућности да се флукс побуде мења деловањем на побудну струју i_P. Недостатак решења су увећани губици, као и сложенија конструкција машине, услед потребе да се побудном намотају који се налази на ротору пренесе једносмерна струја i_P. Побудни напон, који се доводи на крајеве побудног намотаја треба спровести од извора до крајева намотаја. Извор се налази на статорској, непомичној страни, док су крајеви намотаја на ротору, који се обрће у односу на статор.

5.8 Напајање побудног намотаја са стране статора

Напајање побудног намотаја се може решити применом колутова, уграђених на вратило машине и непомичних дирки које належу на обртне колутове, остварујући електрични контакт. Крајеве побудног намотаја је потребно довести у електричну везу са колутовима. Међу колутовима постоји електрична изолација, као и између сваког од колута и челичног вратила машине. Проводне и еластичне дирке су причвршћене за статор тако да свака належе на спољашњу површ једног од колутова. Довођењем једносмерне струје на дирке, иста струја ће се успоставити у побудном намотају. Напајање побудног намотаја са стране статора се обавља једнако у случају када ротор стоји, као и у случају када се обрће. Деловањем на извор побуде, побудни напон и струја се могу подесити тако да одговарају режиму у коме ради машина.

Велики хидрогенератори, који раде у хидроелектранама, као и турбогенератори, који се користе у термоелектранама, поседују електромагнетску побуду. Струја у побудном намотају генератора се подешава тако да напон на крајевима статорског намотаја одговара потребама потрошача. Код увећања потрошње, већа струја доводи до већих падова напона при преносу електричне енергије. Тада је у циљу одржавања напона на крајевима потрошача потребно увећати побудну струју генератора.

Недостатак решења са колутовима и диркама је могућност појаве лука у тренуцима када, услед обртања, дирке на кратко изгубе контакт са колутом, као и хабање колутова и дирки услед непрекидног трења. Поред осталог, присуство колутова увећава осну дужину машине.

Слика 5.7: (A) Попречни пресек намотаног ротора. (B) Бочни изглед.

5.9 Напајање побуде помоћу обртног трансформатора

Пренос побудне снаге на ротор без механичких контаката може се остварити применом обртног трансформатора, какав је приказан на слици 5.8. Непокретни примар се налази на статорској страни, заједно са непомичним делом магнетског кола обртног трансформатора, које има облик прстена, на чијој је унутрашњој површи урезан жлеб. У тај жлеб је смештан намотај примара. Други, покретни део магнетског кола је прстенастог облика и мањег је пречника, тако да може стати у унутрашњост првог, непокретног дела магнетског кола. Покретни део магнетског кола је причвршћен на вратило. На спољашњој страни прстена урезан је жлеб у коме стоје проводници секундара. Дакле, проводници примарног и секундарног намотаја обртног трансформатора су положени у тангенцијалном правцу, око вратила. Околност да се један део магнетског кола обрће у односу на други није препрека постојању међусобног флукса који спреже примар и секундар. Линије поља су приказане на слици 5.8.

Примар обртног поља се напаја наизменичном струјом чија је фреквенција од неколико стотина Hz до неколико kHz. Дејством обртног трансформатора, наизменичне струје се преносе са примара на секундар, који се налази на ротору. Ротор мора имати диодни мост који исправља наизменичну струју и даје једносмерну, потребну за напајање намотаја побуде. Струја побуде се може мењати деловањем на амплитуду наизменичне при-

марне струје. Описани начин побуђивања представља безконтактни пренос побудне снаге на ротор. Услед велике поузданости и одсуства потребе за периодичним одржавањем и поправкама, безконтактна побуда се све више користи. Код примене обртног трансформатора са диодним исправљачем на ротору, температура ротора се мора ограничити на 100÷120 ^{o}C да не би дошло до оштећења полупроводничких диода.

Слика 5.8: Безконтактно напајање побуде помоћу обртног трансформатора. (A) Диодни исправљач на страни ротора. (B) Секундар обртног трансформатора. (C) Примар обртног трансформатора. (D) Прикључци примара су напајани са стране статора. (P) Примарни, непокретни део магнетско кола обртног трансформатора. (S) Секундарни део магнетског кола који се обрће.

5.10 Ротор са сталним магнетима

На место побудног намотаја синхроне машине може се уградити стални магнет, који даје могућност да се добије флукс ротора без присуства намотаја и струја на ротору. Током рада машине, ротор се обрће у синхронизму са пољем статора, тако да у устаљеном стању нема промене магнетске индукције у магнетском колу ротора. У одсуству губитака у намотају ротора

и губитака у магнетском колу ротора, нема ни ослобађања топлоте током рада. Као последица, хлађење ротора не представља проблем, па се може конструисати ротор мањих димензија. Проблем синхроних машина са сталним магнетима је у отежаној промени флукса, што ствара потешкоће при раду у режиму слабљења поља. Магнети могу бити уграђени на површи магнетског кола (*surface mount*) или у унутрашњости (*interior magnet, buried magnet*). Начин уградње магнета има велики утицај на параметре машине и њене експлоатационе карактеристике. Индуктивност статора је одређена магнетском отпорношћу која се значајно мења у завосности од начина уградње магнета. Код синхроних машина са унутрашњом монтажом сталних магнета, релативни износ индуктивности је од 0,1 до 0,5 док је код машина са површинском монтажом магнета овај износ од 0,01 до 0,1.

Слика 5.9: (A) Ротор синхроне машине са унутрашњом монтажом сталних магнета. (B) Ротор синхроне машине са сталним магнетима на површи ротора.

Синхроне машине са сталном побудом имају већи степен корисног дејства од свих других машина. Биланс снаге стално побуђених синхроних машина је упоредив са билансом снаге асинхроних машина, с тим што код синхроних машина не постоје губици у ротору sP_{ob}, што значајно увећава степен корисног дејства.

<u>Питање (5.3):</u>

Степен корисног дејства двополног асинхроног мотора номиналне брзине n_n = 2850 o/min износи 90%. Проценити степен корисног дејства стално

побуђеног синхроног мотора једнаке брзине, снаге, једнаког напона, струје и димензија.

Одговор(5.3):

На основу наведених сличности, може се оценити да ће губици у намотајима статора, губици у магнетском пољу статора и губици услед обртања две машине бити упоредиви. За разлику од синхроне, асинхрона машина има и губитке у ротору, $sP_{ob} = P_{Fe2} + P_{Cu2}$. Због релативно мале учестаности клизања, износ sP_{ob} се углавном односи на губитке у намотајима ротора. Губици у ротору износе приближно $s_{nom}P_{nom}$, односно (3000-2850)/3000 = 5% номиналне снаге. Дакле, остатак губитака у асинхроној машини износи 10% - 5% = 5% номиналне снаге. Стога се степен корисног дејства еквивалентне синхроне машине може проценити на 95%.

5.11 Основне карактеристике сталних магнета

Карактеристика магнетисања сталног магнета дата је на горњој слици. На апсциси је дато споља доведено поље H, то јест поље које постоји у посматраном материјалу услед деловања фактора изван магнета, међу којима су и струје у блиским намотајима. Реманентна индукција B_R, која постоји при $H = 0$, може значајно превазићи вредност од 1T. У мањем износу, реманентна индукција постоји код већине феромагнетика. Јавља се услед настојања оријентисаних магнетских дипола да задрже правац који су претходно заузели. Реманентна индукција у гвозденим лимовима, од којих се формира магнетско коло електричних машина, има релативно мале вредности и лако се своди на нулу деловањем супротно оријентисаног, спољашњег поља H, као и излагањем магнетског материјала повишеним температурама.

Код сталног магнета, реманентна индукција је значајно већа. У случају да се магнет изложи деловању супротно оријентисаног спољашњег поља умерене јачине ($H > -H_c/2$), радна тачка ће се померити из места (0, B_R) улево, што доводи до извесног смањења индукције. После уклањања демагнетишућег спољашњег поља, радна тачка се враћа у почетни положај, у тачку (0, B_R) на горњој слици. Међутим, када споља доведено поље H достигне вредност коерцитивног поља H_c, највећи број постојећих сталних магнета ће бити трајно оштећен. Оштећење магнета се може сагледати по уклањању демагнетишућег поља. Радна тачка се неће вратити у полазну (0, B_R). Реманентна индукција ће се умањити два до три пута. Код већине магнета, карактеристика $B(H)$ има уочљиви превој, то јест колено у другом кваданту. Јачина поља H која се има у области колена је, оријентацио-

но, $H = -H_c/2$. Трајна оштећења магнета се имају у ситуацијама када радна тачка пређе у зону која се налази лево од колена.

Слика 5.10: Карактеристика магнетисања сталног магнета.

Слика 5.11: Феромагнетски материјал виђен као скуп дипола.

Квалитет сталног магнета се оцењује на основу производа $B_R H_c$, који има димензије густине енергије. Магнети са *већим енергијама* имају веће вредности реманентне индукције. Поред тога, робуснији су у односу на демагнетишуће спољашње поље, односно, могу радити са већим вредностима демагнетишућег поља H а да при томе не доживе трајна оштећења. Када се магнет угради у магнетско коло синхроне машине, која може имати релативно велике струје и магнетопобудне силе статора, постоји могућност да се, дејством статора, достигну релативно велике вредности поља H унутар магнета, и то у смеру који умањује магнетску индукцију. Стога је од значаја да одабрани материјал има адекватан $B_R H_c$ производ, то јест одговарајућу *енергију*.

У првом квадранту $B(H)$ карактеристике, сви диполи унутар магнета су већ оријентисани у правцу поља и доприносе магнетској индукцији. Прогресивно увећање поља H не може утицати на даље усмеравање дипола, па се магнетски материјал налази у стању засићења, у коме је диференцијална пермеабилност једнака оној која би се имала у вакууму, то јест $\Delta B = \mu_0 \Delta H$. Дакле, када у магнетском колу постоји стални магнет поларисан тако да ради у првом квадранту, промена индукције ΔB под дејством промене поља ΔH биће једнака оној која би се имала да је магнет уклоњен и замењен ваздухом или вакуумом. Другим речима, стални магнет пружа магнетску отпорност R_μ спољашњој магнетопобудној сили једнаку оној коју би пружао ваздух или вакуум.

5.12 Магнетска кола са сталним магнетима

Од интереса је проучити вредности поља H и индукције B у деловима магнетског кола које садржи стални магнет дужине δ_{PM}, ваздушни зазор δ_0 и гвоздено магнетско коло чија се пермеабилност μ_{Fe} може сматрати бесконачно великом.

Слика 5.12: Магнетско коло са сталним магнетом и ваздушним зазором.

Посматрано магнетско коло нема придружених намотаја, тако да је $Ni = H_{PM}\delta_{PM} + H_0\delta_0 = 0$. Сви делови кола имају исту површину попречног пресека S, па се из услова $\Phi_{PM} = \Phi_0 = \Phi_{Fe}$ добија да је $B_{PM} = B_0 = B_{Fe}$. Будући да

је $H_0 = B_0/\mu_0 = B_{PM}/\mu_0$, веза магнетске индукције B_{PM} и поља H_{PM} је дата изразом $B_{PM} = -\mu_0(\delta_{PM}/\delta_0)H_{PM}$. У пресеку нелинеарне карактеристике магнетисања $B(H)$ материјала од кога је магнет начињен и праве $B_{PM} = -\mu_0(\delta_{PM}/\delta_0)H_{PM}$, добија се радна тачка чије координате дају вредности магнетске индукције и поља H унутар магнета. На претходно приказаном B-H дијаграму, пресек се има у другом квадранту, у коме је магнетска индукција позитивна а поље H негативно.

За случај када у магнетском пољу нема зазора, поље $H_{PM} = -B_{PM}(\delta_0/\delta_{PM})/\mu_0$ унутар магнета је једнако нули, док је магнетска индукција једнака реманентној индукцији B_R. Увећањем зазора, нагиб праве $B_{PM} = -\mu_0(\delta_{PM}/\delta_0)H_{PM}$ опада, тако да се пресек са карактеристиком магнетисања $B(H)$ добија за мање вредности индукције, док поље H_{PM} узима негативне вредности све веће амплитуде. Магнетска индукција B_{PM} и поље H_{PM} унутар магнета уграђеног у магнетско коло са зазором су супротног смера.

5.13 Утицај начина уградње магнета на параметре машине

Стални магнети се могу монтирати на површи ротора. Тада линије магнетског поља из статорских зубаца прелазе у ваздушни зазор δ_0, улазећи потом у сталне магнете дебљине δ_{PM}, и завршавајући у магнетском колу ротора.

Слика 5.13: Магнетска отпорност синхроне машине са површински уграђеним сталним магнетима. (A) Ваздушни зазор. (B) Стални магнети.

Резултантни флукс статорског намотаја садржи компоненту Ψ_{mR} створену деловањем магнета, као и компоненту $L_S i_S$ створену статорским струјама, пропорционалну статорској индуктивности. Индуктивност статора $L_S = N^2/R_\mu$ зависи од магнетске отпорности R_μ, који се, у условима када је $\mu_{Fe} \sim\infty$ своди на магнетску отпорност зазора,

$$R_\mu = \frac{2\delta}{\mu_0 S}. \tag{5.3}$$

Диференцијална пермеабилност магнета је једнака μ_0, што значи да магнетски материјал пружа отпор промени статорског флукса на једнак начин као и ваздух. Стога је еквивалентни магнетски зазор једнак збиру

$$\delta = \delta_0 + \delta_{PM} \tag{5.4}$$

растојања δ_0 између статора и ротора (то јест механичког зазора) и дебљине магнета δ_{PM}. Дебљина магнета је вишеструко већа од механичког зазора. Стога је индуктивност статора синхроних машина са површинском монтажом магнета веома мала, реда величине 1%, за разлику од индуктивности машина са сталним магнетима уграђеним у унутрашњост магнетског кола ротора, која узима вредности од 10% до 70%.

Мала индуктивност статорског намотаја смањује реактансу машине $X_S = \omega_S L_S$. Будући да се синхроне машине са сталним магнетима најчешће напајају из трофазних транзисторских инвертора са ширинском модулацијом, умањена индуктивност статорског намотаја резултује увећањем валовитости струје ΔI. Ширински модулисани импулси амплитуде E се понављају са фреквенцијом комутација $f_{PWM} = 1/T \approx$ 10-20 kHz, стварајући мање осцилације статорске струје око жељене вредности, назване *валовитост*. Амплитуда осцилација струје на комутационој учестаности је приближно једнака $\Delta I \approx ET/(4L_S)$. Будући да површинска монтажа магнета даје мање вредности индуктивности L_S, то се комутациона фреквенција транзисторских инвертора, који напајају синхроне машине са површинском монтажом магнета, увећава и узима вредности $f_{PWM} >$ 10 kHz.

Магнети се могу уградити и унутар нарочито начињених отвора у деловима магнетског кола ротора ближе вратилу. Тада се испод статорских зубаца не налази тело магнета, већ гвоздени лимови од којих је начињено магнетско коло ротора. Поље створено статорским струјама пролази кроз ваздушни зазор и прелази у феромагнетик ротора чија је пермеабилност веома велика. Стога је еквивалентни магнетски зазор $\delta = \delta_0 + \delta_{PM}$ једнак ваздушном зазору δ_0. Магнетска отпорност на путу статорског флукса је тада значајно мања, па се имају значајно веће вредности индуктивности статора. Код унутрашње уградње магнета, релативне вредности статорске индуктивности и реактансе се крећу између 10% и 70%.

Слика 5.14: Магнетска отпорност синхроне машине са сталним магнетима уграђеним унутар магнетског кола ротора.

5.14 Утицај начина уградње магнета на карактеристике

Површинска уградња магнета даје веома малу индуктивност статора. Остварива брзина промене статорске струје $di_a/dt = (u_a - e_a)/L_S$ је веома велика и достиже вредности $di_a/dt \approx 7000\ I_{nom}/s$, што даје врло велику брзину промене момента $M_{em} = k\,|\Psi_{Rm} \times i_S|$. Увећање момента од нулте до номиналне вредности се може остварити у времену од 100-200 μs. Стога се синхрони мотори са површинском монтажом магнета користе у индустријској аутоматизацији, роботици и контроли кретања, где је потребно управљати брзином и позицијом, те је од велике користи имати могућност брзе промене момента.

Недостатак машина са површинском монтажом магнета је ограничена могућност рада у зони слабљења поља. Увећање брзине обртања изнад номиналне захтева смањење статорског флукса, тако да индукована електромоторна сила $j\omega_S \Psi_S$ не превазиђе номинални напон. Флукс $\Psi_S = \Psi_{Rm} + L_S i_S$ треба смањити по хиперболичком закону $\Psi_S(\omega_S) = \Psi_{nom}(\omega_{nom}/\omega_S)$. Код машина са врло малом индуктивношћу $L_S \sim 1\%$, неопходне су врло велике вредности статорске струје да би се умањио флукс, тако да рад оваквих машина у зони слабљења поља није остварив.

У применама где није потребно имати брзе промене момента, али је потребан рад у зони слабљења поља, користе се синхроне машине са сталним магнетима уграђеним у унутрашњост магнетског кола ротора. Услед одсуства губитака у ротору, синхроне машине са унутрашњом уградњом магнета се примењују у свим случајевима где је степен корисног дејства од великог значаја. Неки од примера су мали алтернативни извори електричне енергије и електрична возила.

5.15 Моделирање синхроних машина

Рад са синхроним генераторима и синхроним моторима тражи познавање њиховог понашања са стране електричног прикључка, као и познавање везе између момента и брзине обртања на механичком прикључку - вратилу. Пројектовање напајања и управљања тражи познавање једначина и израза који повезују напоне и струје машине. Анализа устаљених стања захтева познавање заменских електричних шема из којих се могу одредити фазори који представљају релевантне струје, напоне и флуксеве.

Синхроне машине велике снаге се користе у улози генератора, и тада су прикључене на трофазну мрежу константне фреквенције f = 50 Hz, којој предају електричну снагу добијену путем вратила од парне турбине или воденог кола. Синхрони генератори углавном имају намотани ротор, што даје могућност деловања на побудни флукс путем промене побудне струје. Синхроне машине мањих снага се користе у применама управљања кретањем, покретања возила, у индустријским роботима и производним машинама. У поменутим применама, синхрона машина има улогу мотора чији је задатак да савлада отпоре при покретању радне машине. Машине средњих и малих снага се све чешће пројектују и израђују тако да имају сталну побуду.

Током прелазних процеса у синхроним генераторима и моторима, напони и струје су повезани диференцијалним једначинама које исказују равнотежу напона у намотајима. Једначине равнотеже напона описују *електрични подсистем* машине. *Механички* подсистем је описан Њутновом диференцијалном једначином. Скуп диференцијалних једначина и израза који описују понашање синхроне машине зовемо *математички модел* или *динамички модел*. У даљем тексту, одређен је математички модел синхроне машине, са циљем да се утврди механичка карактеристика и заменска шема за устаљена стања.

- **Механичка карактеристика синхроне машине** је зависност момента од брзине обртање која се има у устаљеном стању, при датој учестаности и амплитуди статорског напона.

- **Заменска шема за устаљена стања** је мрежа која садржи отпорности и реактансе, из које је могуће израчунати фазоре струје у синхроној машини за дате услове напајања и дату брзину обртања.

У моделирању, биће занемарени губици у гвожђу, нелинеарност феромагнетика, ефекти паразитних капацитивности и ефекти расподељених параметара. Модел синхроне машине ће имати

- N диференцијалних једначина напонске равнотеже,
- Матрицу индуктивности,
- Израз за моменат и
- Њутнову једначину.

5.16 Магнетопобудна сила статора

Слика 5.15: Обртни вектор магнетопобудне силе статора.

Синхроне машине најчешће имају трофазни статорски намотај. У пракси се ређе срећу машине са 5, 9, 17 или више фаза, али се и тада рад машине може представити еквивалентном трофазном машином. Наизменичне струје

$$\begin{aligned} i_a &= I_m \cos\omega_S t, \\ i_b &= I_m \cos(\omega_S t - 2\pi/3), \\ i_c &= I_m \cos(\omega_S t - 4\pi/3). \end{aligned} \tag{5.5}$$

које постоје у фазама статора стварају вектор статорске магнетопобудне силе $F_S = F_a+F_b+F_c$. Промена фазних струја, дата изразима на горњој слици, даје магнетопобудну силу која се обрће брзином $\Omega_S = \omega_S/p$, не мењајући при томе амплитуду, која током обртања задржава вредност $F_S = 3/2\ NI_m$. Ради представљања вектора F_S који лежи у равни цртежа, он се разлаже на две компоненте, једнаке пројекцијама вектора на осе правоуглог α-β координатног система, постављеног тако да оса α лежи на оси фазног намотаја a. Правац оса α и β се дефинише јединичним векторима α_0 и β_0. Правци оса фазних намотаја могу се дефинисати ортовима $a_0 = \alpha_0$, $b_0 = -½\ \alpha_0 + \beta_0 (3)^{0,5}/2$ и $c_0 = -½\ \alpha_0 - \beta_0 (3)^{0,5}/2$. Магнетопобудне силе појединих фаза су

$$\begin{aligned} \vec{F}_a &= Ni_a\vec{\alpha}_0, \\ \vec{F}_b &= Ni_b(-\frac{1}{2}\vec{\alpha}_0 + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\beta}_0), \\ \vec{F}_c &= Ni_c(-\frac{1}{2}\vec{\alpha}_0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\beta}_0). \end{aligned} \tag{5.6}$$

док је резултантна магнетопобудна сила једнака

$$\vec{F}_s = \vec{F}_a + \vec{F}_b + \vec{F}_c = \frac{3}{2} NI_m \left[\vec{\alpha}_0 \cos\omega_S t + \vec{\beta}_0 \sin\omega_S t\right] \tag{5.7}$$

Моделирање трофазног намотаја скопчано је са потешкоћама. Фазне струје нису независне променљиве. Међу њима постоји релација $i_a + i_b + i_c = 0$, која произилази из околности да су намотаји везани у звезду (код везе у троугао постоје проблеми једнаке природе). Стога у једначини напонске равнотеже за фазу c треба користити израз ($-i_a - i_b$). Поред тога, угао међу осама фазних намотаја је 2π/3 а не π/2, тако да су међусобне индуктивности различите од нуле, што повећава број сабирака и фактора у једначинама равнотеже напона. Наведени недостаци су разлог да се трофазна машина представи еквивалентном двофазном. Модел машине која би имала два фазна намотаја, један у правцу орта α_0 и други у правцу β_0, био би пре-

гледнији. Постојале би две независне променљиве, i_α и i_β, при чему би међусобна индуктивност међу овим ортогоналним намотајима била једнака нули.

5.17 Двофазни еквивалент

Вектор статорске струје је пропорционалан вектору F_S, са коефицијентом пропорционалности који је одређен бројем навојака статора. После замене трофазног намотаја двофазним еквивалентом, математички модел је прегледнији стога што струје у намотајима представљају пројекције вектора струје на правце α_0 и β_0. Магнетопобудна сила двофазног намотаја у правцу осе α биће једнака $F_\alpha = Ni_\alpha$, што је пројекција вектора F_S на осу α. Такође, флукс $\Psi_{S\alpha}$ у намотају α биће пројекција вектора флукса Ψ_S на осу α. Поменуте околности олакшавају разумевање и коришћење модела.

Замена трофазног намотаја двофазним даје исти флукс, моменат и снагу под условом да се очува амплитуда и просторна оријентација вектора магнетопобудне силе F_S. Уклањањем три фазна намотаја и замена еквивалентним двофазним α-β системом намотаја могуће је начинити тако да број навојака остане непромењен, $N_{abc} = N_{\alpha\beta}$. Тада ће вектор магнетопобудне силе F_S остати неизмењен под условом да се у двофазном систему имају струје $i_\alpha(t) = i_a(t) - i_b(t)/2 - i_c(t)/2 = 3/2\, I_m \cos\omega_s t$, односно $i_\beta(t) = (3^{0,5}/2) \cdot (i_b(t) - i_c(t)) = 3/2\, I_m \sin\omega_s t$. Уочити да су у посматраном случају вршне и ефективне вредности струја двофазног еквивалента за 50% веће од истих величина у трофазном намотају.

Слика 5.16: Двофазна представа статорског намотаја.

Полазећи од претходно датих релација за струје, трансформација трофазног намотаја у двофазни се може записати у следећем матричном облику

$$\begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} = K_I \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

5.18 Кларкина 3Ф/2Ф трансформација

Трофазно двофазна трансформација је позната под именом *Кларкина*, по научници која ју је прва формулисала. Трансформација је детаљније излагана у поглављу *Асинхроне машине*, а овде се укратко дају најважније релације.

Матрица дата у једначини (5.8) се назива *матрицом трансформације*. Присуство подесивог коефицијента K_I указује на степен слободе који постоји код еквивалентирања трофазне машине двофазном. Наиме, услов инваријантности магнетопобудне силе F_S се може остварити тако што се одабере двофазни еквивалент са $N_{\alpha\beta} = mN_{abc}$ навојака. Тада је потребно да струје фазних намотаја $i_\alpha(t)$ и $i_\beta(t)$ буду одређене на основу претходно дате једначине у којој је $K_I = 1/m$. Однос вршних вредности струје двофазног еквивалента и трофазног оригинала једнак је $(3/2)/m$.

Ради добијања модела двофазне машине, у α–β координатни систем је потребно трансформисати и напоне, као и флуксне обухвате. Кларкина трансформација за напоне и флуксне обухвате дата је следећим изразима.

$$\begin{bmatrix} u_\alpha \\ u_\beta \end{bmatrix} = K_U \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

$$\begin{bmatrix} \psi_\alpha \\ \psi_\beta \end{bmatrix} = K_\psi \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{bmatrix} \tag{5.10}$$

Премда у избору коефицијената K_U, K_I и K_Ψ постоји слобода, у пракси се примењује 3Ф/2Ф трансформација у којој су три коефицијента међу собом једнака, како би међусобни однос струја, напона и флуксних обухвата двофазног еквивалента био једнак односу који се има код трофазне машине. На такав начин, 3Ф/2Ф трансформација је инваријантна по импедансама и индуктивностима.

Питање (5.4):

Може ли се начинити синхрона двофазна машина са $N_{\alpha\beta} = mN_{abc}$ навојака која ће дати једнаку магнетопобудну силу статора F_s као и оригинална трофазна синхрона машина, а да при томе њени напони, струје и флуксеви буду једнаки вредностима које се добијају Кларкином трансформацијом *abc* величина, при чему су матрице трансформације флукса, напона и струје једнаке ($K_U = K_I = K_\Psi$) ?

Одговор (5.4):

Инваријантност магнетопобудне силе F_S и флукса је разлог да електромоторна сила индукована у једном навојку буде једнака у оба посматрана случаја. Стога ће фазни напони двофазног еквивалента бити $u_{\alpha\beta} = m\ u_{abc}$. Очување амплитуде F_S налаже да се у намотајима двофазног еквивалента имају струје $i_{\alpha\beta} = (3/2)\cdot\ (i_{abc}/m)$. Очување односа напона и струје тражи да $u_{abc}/\ i_{abc}$ буде једнако $u_{\alpha\beta}/i_{\alpha\beta}$ тако да је

$$\frac{u_{\alpha\beta}}{i_{\alpha\beta}} = \frac{m\,u_{abc}}{(3/2)(i_{abc}/m)} = \frac{2m^2}{3}\frac{u_{abc}}{i_{abc}} = \frac{u_{abc}}{i_{abc}}$$

$$\Rightarrow \quad m = \sqrt{\frac{3}{2}} \ \Rightarrow \ K_U = K_I = K_\psi = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Двофазни еквивалент трофазног намотаја могуће је одредити тако да он има $(3/2)^{0,5}$ пута више навојака. Напони, струје и флуксеви двофазног еквивалента могу се добити Кларкином трансформацијом оригиналних величина, то јест напона, струја и флуксних обухвата трофазног намотаја, коришћењем 3Ф/2Ф трансформације са коефицијентима $K_U = K_I = K_\Psi = (2/3)^{0,5}$. Ако се уклони трофазни намотај оригиналне машине и замени двофазним, који има $(3/2)^{0,5}$ пута више навојака, добиће се синхрона машина која замењује трофазну. Величине добијене трансформацијом биће једнаке величинама које се мере у двофазном намотају. Овде је описан пример у коме 3Ф/2Ф трансформација престаје да буде само мисаони експеримент и узима облик реалне машине.

Кларкина трансформација са $K = (2/3)^{0,5}$ је инваријантна по магнетопобудној сили, снази, импеданси и индуктивности. Поред тога, она се може

и практично применити израдом машине која има напоне и струје једнаке онима које се добијају трансформацијом. И поред тога, трансформација са коефицијентом $K = (2/3)^{0,5}$ се ретко користи. Њени недостаци су у томе што су амплитуде и ефективне вредности струја и напона $(3/2)^{0,5}$ пута веће од оригиналних *abc* величина. Присуство ирационалног броја $(3/2)^{0,5}$ у прорачунима је разлог да значајан број аутора избегава ову форму Кларкине 3Ф/2Ф трансформације.

При избору трансформације координата постоји слобода коју треба користити тако да добијени резултат, нови математички модел, буде прегледнији. У пракси се често користи варијанта 3Ф/2Ф трансформације код које је $K_U = K_I = K_\psi = 2/3$. Код 3Ф/2Ф трансформације струја са коефицијентом $K_I = 1$, добијају се αβ величине чија је вршна вредност 50% већа од оригиналних. Дакле, да би се добили αβ струје и напони једнаке вршне вредности као и напони у оригиналном *abc* домену, неопходно је усвојити коефицијент трансформације $K = 2/3$. Овакав избор има два недостатка.

- Трансформација која користи коефицијент $K = 2/3$ није инваријантна по снази. Ефективне вредности струја и напона ће бити једнаке за αβ и *abc* домен, тако да ће снаге које се имају у свакој фази бити исте. Околност да у оригиналном домену стоје три фазна намотаја, док их код двофазног еквивалента има два, доводи до разлике у вредностима израза P_{abc} и $P_{\alpha\beta}$. Као последица, при коришћењу модела снагу машине је потребно израчунавати на основу израза $P_{abc} = (3/2)\, P_{\alpha\beta}$.
- Није могуће начинити реалну двофазну машину која би одговарала спроведеној трансформацији. Дакле, није могуће преправити постојећу трофазну машину и од ње начинити двофазну која би имала напоне и струје чије вредности одговарају вредностима добијеним 3Ф/2Ф трансформацијом. Избор $K = 2/3$ даје трансформисане напоне и струје у αβ домену чије су амплитуде једнаке амплитудама оригиналних величина. Замишљени двофазни еквивалент мора имати већи број навојака, $N_{\alpha\beta} = (3/2)N_{abc}$, како би се очувала амплитуда вектора F_S. Инваријантност $\Phi_S = F_S/R_\mu$ је разлог да електромоторна сила у једном навојку буде једнака у оба посматрана случаја. Стога ће фазни напони двофазног еквивалента бити $u_{\alpha\beta} = (3/2)\, u_{abc}$, што не одговара вредностима добијеним трансформацијом.

Предности 3Ф/2Ф трансформације са коефицијентом $K = 2/3$ су инваријантност по импеданси, по вредностима индуктивности, као и околност да су вршне и ефективне вредности релевантних величина оригинала и екви-

валента међу собом једнаке. Изостанак инваријантности по снази се коригује применом обрасца $P_{abc} = (3/2)\, P_{\alpha\beta}$.

У даљој анализи, сматраће се да је трофазни статорски намотај еквивалентиран двофазним применом Кларкине 3Ф/2Ф трансформације, при чему је за коефицијент трансформације узето $K = 2/3$. Анализа полази од претпоставке да се ради о двополној машини, где је $p = 1$, што чини да електричне учестаности ω буду једнаке механичким брзинама обртања Ω.

5.19 Матрица индуктивности и равнотежа напона

Синхрона машина са двофазним статорским намотајем и намотаним ротором приказана је на слици 5.17. Једначине равнотеже напона посматраних намотаја су

$$u_{\alpha s} = R_s i_{\alpha s} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi_{\alpha s}, \quad u_{\beta s} = R_s i_{\beta s} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi_{\beta s}, \quad u_p = R_p i_p + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi_p. \tag{5.11}$$

Слика 5.17: Двофазна представа статорског намотаја.

Величине $u_{\alpha s}$ и $u_{\beta s}$ представљају напоне доведене на двофазни статорски намотај, док је u_p напон доведен на побудни намотај. Ознаке $\Psi_{\alpha s}$, $\Psi_{\beta s}$ и Ψ_p представљају укупне флуксеве намотаја αs, βs и намотаја побуде. Веза

струја $i_{\alpha s}$, $i_{\beta s}$ и i_p и флуксева дата је матрицом индуктивности. Будући да се ротор обрће, померај осе побудног намотаја у односу на αs осу статора је $\theta_m = \Omega_m t$, што међусобне индуктивности чини променљивим а матрицу индуктивности нестационарном.

$$\begin{bmatrix} \psi_{\alpha s} \\ \psi_{\beta s} \\ \psi_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & 0 & L_m \cos\theta_m \\ 0 & L_s & L_m \sin\theta_m \\ L_m \cos\theta_m & L_m \sin\theta_m & L_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{\alpha s} \\ i_{\beta s} \\ i_{pR} \end{bmatrix} \tag{5.12}$$

На пример, флукс фазе α статора једнак је $\Psi_{\alpha s} = L_S\, i_{\alpha s} + L_m \cos(\theta_m) i_p$. Променљиве међусобне индуктивности посматраног модела дају једначине напонске равнотеже у којима постоје тригонометријске функције променљивих стања, што отежава формирање заменске шеме за устаљена стања.

$$\begin{aligned} u_{\alpha s} &= R_s i_{\alpha s} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L_S i_{\alpha s} + L_m \cos(\theta_m) i_p\right) = \\ &= R_s i_{\alpha s} + L_S \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_{\alpha s} + L_m \cos(\theta_m) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_p - \omega_m L_m i_p \sin(\theta_m) \end{aligned}$$

Поред тога, у посматраном моделу постоје променљиве стања међу којима су $i_{\alpha s}$ и $i_{\beta s}$ које у устаљеном стању имају изводе различите од нуле, што представља потешкоћу у анализи устаљених стања и отежава формулисање управљања машином. Поменута два недостатка се отклањају применом Паркове обртне трансформације, на начин у свему једнак обртној трансформацији примењеној на асинхроне машине.

5.20 Обртна трансформација

Модел синхроне машине у стационарном α_S-β_S координатом систему има два недостатка који умањују прегледност, отежавају анализу, доношење закључака и формулисање закона управљања.

- Диференцијалне једначине равнотеже напона укључују тригонометријске функције променљивих стања, што значајно отежава рад и смањује употребну вредност модела. Варијабилни коефицијенти се јављају услед промене у матрици индуктивности, која се мења услед промене релативног положаја ротора, на коме стоји побудни намотај, и статора, на коме је статорски намотај.
- Променљиве стања модела који је формулисан у стационарном α_S-β_S координатом систему су пројекције релевантних вектора (стру-

је, напона, флукса) на осе α_S и β_S. У устаљеном стању, при константној брзини обртања, при непромењивом флуксу, моменту и снази, ове променљиве су простопериодичне функције времена, тако да њихов извод није једнак нули. Ова околност знатно отежава анализу рада машине у устаљеном стању.

Трансформацијом у синхроно ротирајући координатни систем, на начин који је детаљније изложен у поглављу *Асинхроне машине* отклањају се поменути недостаци модела.

Обртна трансформација се може сагледати као замена постојећих намотаја статора (α_S и β_S) замишљеним, *виртуалним* намотајима који леже у dq координатном систему постављеном тако да је оса d колинеарна са осом побудног намотаја. Овако постављен, нови координантни систем се обрће истом брзином као и ротор, то јест синхроно. Намотај побуде није потребно трансформисати, јер се он већ налази у циљаном dq координатном систему.

Поступак трансформације и коришћена нотација је једнака као и у поглављу о асинхроним машинама, тако да је опис овде значајно скраћен.

Слика 5.18: Трансформација статорских величина у синхроно ротирајући координанти систем.

Избором новог координатног система, који се обрће једнаком брзином као и вектор магнетског поља F_S, пројекције овог вектора на осе новог координатног система ће бити константне у устаљеним стањима. Исти закључак се може извести за векторе напона и флукса. Дакле, нова тран-

сформација координата стања треба да формулише модел синхроне машине у координатном систему који ротора синхроно са обртним пољем F_S. У устаљеном стању, обртно поље статора синхроне машине обрће се синхроно са ротором. Стога нови dq координатни систем треба поставити тако да његова оса d коинцидира са осом побудног намотаја. Ако се ради о синхроној машини са сталним магнетима, каква нема побудни намотај, тада осу d ротирајућег координантног система треба поставити тако да лежи на правцу у коме је вектор роторског флукса, створен деловањем сталних магнета.

Усвајањем синхроно ротирајућег координатног система са осама d и q, пројекције i_d и i_q вектора статорске струје $i_S = F_S/N_S$ на осе имају вредност која се у устаљеном стању не мења. Дакле, трансформацијом статорских величина из стационарног α_S-β_S координатног система у синхроно ротирајући d-q координатни систем, добија се модел статора у коме ће релевантне променљиве у устаљеном стању имати константну вредност.

Намотаје у осама d и q није могуће реализовати, али је могуће сагледати трансформацију као мисаони експеримент *уклањања* намотаја статора α_S-β_S и *уградње* нових намотаја који леже у осама d-q координатног система, како је и приказано на слици. Будући да намотаје d-q није могуће начинити, они се називају и *виртуелни намотаји*.

5.21 Матрица индуктивности

Виртуелни dq намотаји статора не мењају релативни положај у односу на намотај побуде. Намотај d стоји у истој оси као и побудни, тако да је њихова међусобна индуктивност $L_{d\text{-}p}$ једнака L_m, док је међусобна индуктивност $L_{q\text{-}p}$ између q намотаја статора и побуде једнака нули. Поред тога, међусобна индуктивност намотаја d и q једнака је нули, тако да матрица индуктивности, димензија 3×3, има свега 5 елемената различитих од нуле. Вредности L_S, L_p и L_m имају константне вредности.

$$\begin{bmatrix} \psi_d \\ \psi_q \\ \psi_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & 0 & L_m \\ 0 & L_s & 0 \\ L_m & 0 & L_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_{pR} \end{bmatrix} \tag{5.13}$$

Струје i_d и i_q ових нових, виртуелних намотаја морају бити такве да дају једнак вектор F_S који се имао и раније. Да би се овакав услов испунио, струје виртуелних намотаја морају имати вредности $i_d = i_{\alpha s}\cos(\theta_m) + i_{\beta s}\sin(\theta_m)$ и $i_q = -i_{\alpha s}\sin(\theta_m) + i_{\beta s}\cos(\theta_m)$. Матрични запис наведених релација

је дат у једначини 5.15. Као и струје, на исти начин треба трансформисати и преостале променљиве модела. После спроведене Паркове обртне трансформације, потребно је утврдити једначине равнотеже напона у којима фигуришу величине *dq* координатног система.

Слика 5.19: Трансформација статорских величина у синхроно ротирајући координанти систем.

Угао између осе *d* и осе α_S је

$$\theta_{dq} = \theta_{dq}(0) + \int_0^t \omega_m \mathrm{d}\tau \,, \tag{5.14}$$

док је трансформација дата изразом

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_m & \sin\theta_m \\ -\sin\theta_m & \cos\theta_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{\alpha s} \\ i_{\beta s} \end{bmatrix} \tag{5.15}$$

Код двополне машине, електрична представа брзине обртања ω_m једнака је угаоној брзини обртања ротора Ω_m. У случају када се анализира машина са $p = 2$ или више пари полова, слике 5.18 и 5.19 више нису одговарајућа представа оса у простору. Померај од 2π на овим сликама одговара просторном померају од $2\pi/p$. Представа дата на сликама 5.18 и 5.19 се користи за анализу двополних и вишеполних машина, при чему угао θ_m треба одређивати на основу једначине (5.14) у којој је $\omega_m = p\Omega_m$.

5.22 Приказивање вектора комплексним бројем

Вектори струје, напона и флукса се могу представити коришћењем комплексне нотације, према којој се пројекције вектора на ортогоналне осе представљају реалним и имагинарним делом комплексног броја, на пример, $\underline{i}_{dq} = i_d + \mathrm{j}i_q$, $\underline{i}_{\alpha\beta s} = i_{\alpha s} + \mathrm{j}i_{\beta s}$. Имајући у виду да је $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{j}\sin(\theta)$, обртна трансформација статорских струја из $\alpha\beta$ у dq координатни систем се може представити изразом $\underline{i}_{dq} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}\,\underline{i}_{\alpha\beta s}$. Комплексна нотација чини једноставнијим поступак одређивања једначина равнотеже напона у dq систему. Користећи комплексну нотацију у представљању статорског напона $\underline{u}_{\alpha\beta s} = u_{\alpha s} + \mathrm{j}u_{\beta s}$, две скаларне једначине равнотеже напона се могу записати као једна комплексна.

$$u_{\alpha s} = R_s i_{\alpha s} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi_{\alpha s}, \quad u_{\beta s} = R_s i_{\beta s} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi_{\beta s} \tag{5.16}$$

$$\Rightarrow \underline{u}_{\alpha\beta s} = R_s \underline{i}_{\alpha\beta s} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underline{\psi}_{\alpha\beta s}$$

Величине dq координатног система се могу представити комплексним бројевима чији реални и имагинарни део представљају пројекције вектора струје, напона и флукса на осе координатног система.

$$\underline{i}_{dq} = i_d + \mathrm{j}i_q = e^{-\mathrm{j}\theta_m}(i_{\alpha s} + \mathrm{j}i_{\beta s}) \tag{5.17}$$

Веза комплексних записа струје, напона и флукса у dq и $\alpha\beta$ координатном систему је дата изразима

$$\underline{u}_{dq} = e^{-\mathrm{j}\theta_m} \cdot \underline{u}_{\alpha\beta s}, \tag{5.18}$$

$$\underline{\psi}_{dq} = e^{-\mathrm{j}\theta_m} \cdot \underline{\psi}_{\alpha\beta s}.$$

5.23 Једначине равнотеже напона

Напони на крајевима замишљених статорских намотаја у dq координатном систему се могу добити применом обртне трансформације на $\alpha\beta$ напоне,

$$\underline{u}_{dq} = u_d + \mathrm{j}u_q = \underline{u}_{\alpha\beta S} e^{-\mathrm{j}\theta_m} = \left(R_S \underline{i}_{\alpha\beta S} + \mathrm{d}\underline{\psi}_{\alpha\beta S}/\mathrm{d}t\right)e^{-\mathrm{j}\theta_m}. \tag{5.19}$$

Величине $\underline{i}_{\alpha\beta S}$ и $\underline{\Psi}_{\alpha\beta S}$ стационарног координатног система могу се изразити у функцији dq величина уз помоћ инверзне Паркове трансформације, $\underline{i}_{\alpha\beta S} = \underline{i}_{dq}\exp(-\mathrm{j}\theta_m)$ тако да се добија

$$\begin{aligned}\underline{u}_{dq} &= \left(R_S\,\underline{i}_{dq}e^{+\mathrm{j}\theta_m} + \mathrm{d}\left(\underline{\psi}_{dq}e^{+\mathrm{j}\theta_m}\right)/\mathrm{d}t\right)e^{-\mathrm{j}\theta_m} = \\ &= R_S\,\underline{i}_{dq} + \mathrm{d}\,\underline{\psi}_{dq}/\mathrm{d}t + \mathrm{j}\omega_m\underline{\psi}_{dq}\end{aligned} \tag{5.20}$$

где је $\omega_m = p\Omega_m$. Дакле, једначине напонске равнотеже у dq виртуелним статорским намотајима немају облик $u = Ri + \mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t$, већ се у њима јавља додатни члан који је последица извршене обртне трансформације. Угао θ_m означава положај осе побудног намотаја, односно померај ротора. Учестаност $\Omega_m = \omega_m$ представља брзину обртања ротора. У случају да синхрона машина има већи број пари полова (p>1), неопходно је уважити околност да је $p\Omega_m = \omega_m$. У случају да је p>1, угао θ_m, који фигурише у изразима за Паркову обртну трансформацију, био би p пута већи од механичког померaја ротора. Дакле, полазећи од једначине равнотеже напона у стационарном координатном систему

$$\underline{u}_{\alpha\beta s} = R_s\,\underline{i}_{\alpha\beta s} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underline{\psi}_{\alpha\beta s}$$

добија се да је

$$\underline{u}_{dq} = e^{-\mathrm{j}\theta_m}\left(R_s\,\underline{i}_{\alpha\beta s} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underline{\psi}_{\alpha\beta s}\right) = e^{-\mathrm{j}\theta_m}\left(R_s e^{\mathrm{j}\theta_m}\underline{i}_{dq} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{\mathrm{j}\theta_m}\underline{\psi}_{dq}\right)\right),$$

што даје комплексни запис једначина равнотеже напона у dq координатном систему,

$$\underline{u}_{dq} = R_s\,\underline{i}_{dq} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underline{\psi}_{dq} + \mathrm{j}\omega_m\underline{\psi}_{dq}\,. \tag{5.21}$$

Једначина (5.21) се може раздвојити на реални и имагинарни део. Сваки од њих представља једну скаларну једначину.

$$\mathrm{Re}\{\underline{u}_{dq}\} \;\rightarrow\; u_d = R_s i_d + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi_d - \omega_m\psi_q$$

$$\mathrm{Im}\{\underline{u}_{dq}\} \;\rightarrow\; u_q = R_s i_q + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi_q + \omega_m\psi_d$$

Дакле, једначина равнотеже напона са комплексним варијаблама се може раставити на две скаларне једначине,

$$u_d = R_s i_d + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi_d - \omega_m \psi_q, \qquad (5.22)$$
$$u_q = R_s i_q + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi_q + \omega_m \psi_d$$

Једначина равнотеже напона у побудном намотају је неизмењена, стога што побудне величине нису измењене Парковом трансформацијом. Наиме, побудни намотај се налази на ротору, са осом која лежи на d оси синхроно ротирајућег координантног система. Стога је појаве у побудном намотају моделују следећом једначином.

$$u_p = R_p i_p + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi_p \qquad (5.23)$$

5.24 Модел електричног подсистема изотропне машине

Модел синхроне машине садржи једначине које описују прелазне појаве у намотајима, као и једначине које описују промену брзине обртања. Први и други део модела зову се *електрични* и *механички* подсистем. Електрични подсистем садржи једначине равнотеже напона, док је механички подсистем описан Њутновом једначином кретања. У посматраној машини, постоје три намотаја, тако да електрични подсистем садржи три диференцијалне једначине. Поред њих, потребно је имати и матрицу индуктивности, која даје везу флукса и струје, као и израз за електромагнетски моменат.

Магнетско коло ротора синхроне машине може имати цилиндричан облик, и тада је магнетска отпорност R_μ једнака у свим правцима. Овакав ротор зовемо *изотропним*. Будући да је индуктивност сваког од намотаја одређена количником N^2/R_μ, једнакост магнетске отпорности у осама d и q даје исте вредности индуктивности $L_d = L_q = L_S$. Ако постоје разлике у магнетским отпорима у правцима d и q, ротор зовемо *анизотропним*. У том случају, постоји разлика у индуктивностима, $L_d \neq L_q$.

Једначине равнотеже напона, дате у наредној слици, вреде једнако за изотропне и анизотропне синхроне машине. Разлике се јављају у матрици индуктивности.

Слика 5.20: Модел синхроне машине у *dq* координатном систему.

Једначине равнотеже напона у намотајима *dq* система одређене су изразом

$$u_d = R_s i_d + \frac{\mathrm{d}\psi_d}{dt} - \omega_m \psi_q \ , \tag{5.24}$$

$$u_q = R_s i_q + \frac{\mathrm{d}\psi_q}{dt} + \omega_m \psi_d \ ,$$

$$u_p = R_p i_p + \frac{\mathrm{d}\psi_p}{dt},$$

док је веза флуксева и струја одређена матрицом индуктивности, односно једначинама

$$\psi_d = L_s^* i_d + L_m i_p \tag{5.25}$$

$$\psi_q = L_s^* i_q \tag{5.26}$$

$$\psi_p = L_p i_p + L_m i_d \tag{5.27}$$

где ознаку L_S^* у једначини (5.25) треба заменити ознаком L_d а ознаку L_S^* у једначини (5.26) ознаком L_q у случају да се ради о анизотропној машини где је $L_d \neq L_q$. Флукс побудног намотаја једнак је $\Psi_p = L_p i_p + L_m i_d$. Коефицијент L_p представља сопствену индуктивност побудног намотаја, док је L_m међусобна индуктивност побудног намотаја и виртуелног намотаја статора у оси d. Међусобна индуктивност L_m се може одредити на основу мерења највеће вредности међусобне индуктивности између побудног намотаја и једног од фазних намотаја статора трофазне машине. Поменута међусобна индуктивност ће имати највећу вредност у положају ротора при коме се осе побудног и фазног намотаја поклапају. Код синхроних машина са изотропним, цилиндричним ротором, који даје једнаку магнетску отпорност флуксу у свим правцима, флукс виртуелног намотаја статора у d оси једнак је $\Psi_d = L_s i_d + L_m i_p$, док је флукс намотаја у q оси једнак $\Psi_q = L_s i_q$.

5.25 Моменат изотропне синхроне машине

Моменат изотропне синхроне машине се може одредити из анализе биланса снаге која се синхроној машини предаје из трофазног извора. Полазећи од израза за снагу извора $P_e = (3/2)\,(u_d i_d + u_q i_q)$, и користећи једначине напонске равнотеже за статорске намотаје, добија се следећа расподела улазне снаге,

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{3}{2}\left(u_d i_d + u_q i_q\right) = \\ &= \frac{3}{2} R_s\left(i_d^2 + i_q^2\right) + \frac{3}{2}\left(i_d \frac{\mathrm{d}\Psi_d}{\mathrm{d}t} + i_q \frac{\mathrm{d}\Psi_q}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{3}{2}\omega_m\left(\Psi_d i_q - \Psi_q i_d\right) = \\ &= P_{Cu1} + \frac{\mathrm{d}W_m}{\mathrm{d}t} + P_{em}. \end{aligned} \tag{5.28}$$

Први сабирак на десној страни једначине представља губитке у намотајима статора. У статору постоје и губици у гвожђу, али они не постоје у горњем билансу, стога што је модел изведен уз занемарење свих губитака у феромагнетику. Сабирак $\mathrm{d}W_m/\mathrm{d}t$ дефинише брзину са којом се увећава енергија магнетског спрежног поља. Ако машина ради са константним флуксом, енергија спрежног поља је константна, тако да је сабирак $\mathrm{d}W_m/\mathrm{d}t$ једнак нули. По одбитку губитака, снага $P_{em} = (3/2)\omega_S\,(\Psi_d\, i_q - \Psi_q\, i_d)$ се преноси ротору захваљујући електромагнетској интеракцији поља у ваздушном зазору. У устаљеном стању је кружна учестаност напајања ω_S једнака угаоној брзини обртања $p\Omega_m = \omega_m$, али то у прелазним процесима не мо-

ра бити случај. Ако је dq координатни систем одређен тако да су осе d и q везане за ротор, тада у једначинама (5.24) и (5.28) стоји ω_m без обзира ради ли се о устаљеним стањима или прелазним процесима.

Потребно је показати да се снага P_{em} из електричне претвара у механичку. У случају да ротор има сталну побуду, у њему нема губитака, те се примљена снага P_{em} претвара у механичку, и постаје унутрашња механичка снага машине $P_{mR} = P_{em}$. Када на ротору постоји побудни намотај, у њему постоје губици $R_p i_p^2$. Они се, међутим, надокнађују снагом коју саопштава извор за напајање побуде, $u_p i_p = R_p i_p^2$. Стога се и у том случају има једнакост $P_{mR} = P_{em}$.

Унутрашња механичка снага је једнака производу електромагнетског момента M_{em} којим статор путем спрежног поља делује на ротор и брзине обртања ротора $\Omega_m = \omega_m/p$. Зато се електромагнетски моменат израчунава на основу израза

$$M_{em} = \frac{P_{mR}}{\Omega_m} = p\frac{P_{em}}{\omega_m} = \frac{3p}{2}\left(\psi_d i_q - \psi_q i_d\right) \tag{5.29}$$

Компоненте флукса статора су једнаке $\Psi_d = L_d i_d + L_m i_p$, односно $\Psi_q = L_q i_q$. Изотропна машина има једнаку магнетску отпорност у свим правцима, тако да важи једнакост $L_d = L_q = L_s$. Увођењем једнакости у израз за моменат, добија се

$$M_{em} = \frac{3p}{2}\left(\psi_d i_q - \psi_q i_d\right) = \frac{3p}{2}L_m i_p i_q = \frac{3p}{2}\left(L_m i_p\right) i_q = \frac{3p}{2}\psi_{Rm} i_q \tag{5.30}$$

Флукс $\Psi_{Rm} = L_m i_p$ представља део побудног флукса који обухвата статорски намотај. У случају када на ротору не стоји побудни намотај већ стални магнети, флукс Ψ_{Rm} представља онај део флукса сталних магнета који пролази кроз ваздушни зазор и обухвата статорски намотај. Укупни флукс побудног намотаја, односно укупни флукс сталних магнета је већи зато што постоји магнетско расипање.

5.26 Синхроне машине са анизотропним ротором

Магнетско коло ротора може имати облик који је разлог различитих магнетских отпорности у d и q оси, што даје разлику између индуктивности L_d и L_q. Цилиндричне структуре, у којима магнетска отпорност не зависи од правца у коме се простире поље, називају се *изотропним*, то јест *онима које у свим правцима имају исте особине*, и код њих постоји једнакост у индуктивностима L_d и L_q. Ако магнетска отпорност зависи од прав-

ца у коме постоји поље, тада се ради о *анизотропним* структурама где индуктивности L_d и L_q нису исте. У наредном одељку биће приказани елементи конструкције анизотропних машина и изведен израз за моменат.

Флукс виртуелног намотаја статора у d оси једнак је $\Psi_d = L_d i_d + L_m i_p$, док је флукс намотаја у q оси једнак $\Psi_q = L_q i_q$. Флукс побуде не доприноси флуксу статора у q оси. У случају када је ротор цилиндричног облика, индуктивности виртуелних намотаја L_d и L_q су једнаке, то јест $L_d = L_q = L_s$. На слици 5.21 дати су примери конструкције ротора који имају различите магнетске отпорности у d и q осама. У првом примеру, при врху доње слике, дато је магнетско коло ротора са електромагнетском побудом. Коло је обликовано тако да олакшава успостављање побудног флукса. Бокови магнетског кола, окренути ка q оси, остављају простор за смештај побудног намотаја. Стога је магнетска отпорност у магнетском колу флукса у попречној q оси релативно велика, стога што линије поља у дужим деловима свог пута пролазе кроз ваздух. Већа магнетска отпорност резултује мањом индуктивношћу $L \sim N^2/R_\mu$, тако да околност $R_{\mu d} < R_{\mu q}$ даје $L_d > L_q$.

У другом примеру на слици 5.21 дато је магнетско коло ротора са сталним магнетима који су уграђени у унутрашњост ротора. Магнети су уграђени тако да стоје на путу флукса d осе, повећавајући магнетску отпорност на путу d компоненте флукса. магнетска отпорност у магнетском колу флукса у попречној q оси је мањи, тако да околност $R_{\mu d} > R_{\mu q}$ даје $L_d < L_q$.

Слика 5.21: (A) Намотани ротор са различитим магнетским отпорностима у *d и q* оси. (B) Анизотропни ротор са сталним магнетима.

Флуксеви анизотропне машине су једнаки

$$\begin{aligned}\psi_d &= L_d i_d + L_m i_p \\ \psi_q &= L_q i_q \\ \psi_p &= L_p i_p + L_m i_d\end{aligned} \tag{5.31}$$

5.27 Релуктантни момент

Разлика између индуктивности у d- и q-оси даје измењен израз за момент

$$\begin{aligned}M_{em} &= \frac{3p}{2}\left(\psi_d i_q - \psi_q i_d\right) = \\ &= \frac{3p}{2}\psi_{Rm} i_q + \frac{3p}{2}\left(L_d - L_q\right) i_d i_q .\end{aligned} \tag{5.32}$$

Израз за моменат има додатну компоненту, пропорционалну разлици индуктивности у двема осама. Ова компонента момента се назива *релуктантни* моменат, јер се јавља као последица разлике у магнетским отпорностима, то јест *релуктанси*. Релуктантни моменат постоји и у случају када ротор нема побудни намотај нити сталне магнете. Он настоји да доведе у исти правац вектор обртног поља статора и роторску осу у којој је магнетска отпорност најмања. Постоје нарочите синхроне машине које немају сталне магнете ни побудни намотај, већ им је ротор такав да постоје велике разлике у магнетским отпорностима између директне d-осе и попречне q-осе, како би се добио што већи релуктантни моменат.

<u>Питање (5.5):</u>

Синхрона машина има анизотропан ротор на коме нема сталних магнета нити побудног намотаја. Амплитуда статорске струје је ограничена на I_m. Одредити највећу вредност релуктантног момента која се може постићи. Сви параметру који постоје у изразу за моменат су познати.

Одговор (5.5):

Релуктантни моменат је пропорционалан производу струја i_d и i_q. Када је амплитуда статорске струје ограничена, њене компоненте се могу изразити као $i_d = I_m\cos(\xi)$ и $i_q = I_m\sin(\xi)$, где је ξ угао који постоји између вектора статорске струје и осе d. Релуктантни моменат је тада једнак

$$M_{em} = \frac{3p}{2}\left(L_d - L_q\right) I_m^2 \cos\xi \sin\xi = \frac{3p}{4}\left(L_d - L_q\right) I_m^2 \sin 2\xi .$$

Највећи релуктантни моменат се добија за $\xi = \pi/4$, односно за $i_d = i_q = I_m/2^{0,5}$, и једнак је $(3p/4)(L_d - L_q)I_m^2$.

5.28 Релуктантни мотор

Релуктантне синхроне машине малих снага се користе у применама где габарит и маса нису од пресудног значаја, већ се тежи да конструкција машине буде робусна, једноставна и мале цене. Релуктантна машина нема активних делова на ротору. Од значаја је једино начинити ротор тако да магнетска отпорност у директној и попречној оси буду различити. Магнетско коло ротора се може добити слагањем лимова на начин какав је приказан на слици 5.22. Аксијално слагање лимова даје малу магнетску отпорност у правцу дуж лимова. Флукс који постоји у попречном правцу мора већи број пута прелазити простором између лимова, чиме се повећава магнетска отпорност. На описани начин, добија се ротор који је анизотропан, то јест има различиту магнетску отпорност у ортогоналним правцима, при чему је његов облик цилиндричан, без истакнутих полова, што омогућава достизање већих брзина обртања без значајнијег отпора ваздуха и без нарушавања механичког интегритета.

Предност релуктантних синхроних машина у односу на машине са намотаним ротором је у томе што су знатно једноставније конструкције. Предност у односу на машине са сталном побудом огледа се у томе што је флукс у релуктантној машини једнак нули у случају да машина није напајана, док је флукс машине са сталним магнетима присутан и онда када машине није прикључена на извор. Између отворених крајева релуктантног мотора чији се ротор обрће не постоји напон. Ако синхрона машина има сталне магнете, напон који постоји између отворених крајева намотаја статора једнак је електромоторној сили празног хода $E_0 = \omega_m \Psi_{Rm}$. Када се прикључци статорског намотаја доведу у кратак спој, успоставља се се релативно велика струја кратког споја $I_{KS} \approx E_0/X_S = \Psi_{Rm}/L_S$. У случају да кратак спој постоји у релуктантној машини, устаљена вредност струје кратког споја је једнака нули.

Недостаци релуктантних машина су у томе што је њихова специфична снага мања. Наиме, изостанком побудног флукса, израз за моменат нема компоненту која је пропорционална флуксу и струји $\Psi_{Rm} i_q$, већ садржи само релуктантни моменат, пропорционалан производу струја i_d и i_q.

Слика 5.22: Изглед ротора релуктантне синхроне машине.

$$M_{em} = \frac{3p}{2}\left(L_d - L_q\right) i_d i_q \tag{5.33}$$

Може се закључити да ће однос M_{em}/I_S између развијеног момента и статорске струје релуктантног мотора бити знатно неповољнији од односа M_{em}/I_S синхроне машине са сталном побудом или намотаним ротором. За стварање једнаког момента, струја релуктантног мотора биће значајно већа од струје коју би морао имати мотор који има побуду. Стога су специфична снага и степен корисног дејства релуктантних машина значајно мањи.

Ради ублажавања неповољног односа M_{em}/I_S, управљање релуктантним машинама треба засновати тако да се тражени моменат постигне са што мањом вредношћу статорске струје. На доњој слици, у левом углу је приказан координатни систем са струјама i_d и i_q на апсциси и ординати. Геометријско место тачака са константним моментом $M_{em} \sim i_d i_q$ је представљено хиперболом. Једнак производ $i_d i_q$ се може постићи са различитим паровима вредности i_d и i_q, тако да код управљања машином постоји један степен слободе. Треба га искористити тако да се тражени моменат постигне са што мањом струјом. Амплитуда статорске струје је пропорционална потегу који полази из координатног почетка и завршава у одабраној радној тачки. Најмања амплитуда се има у случају да је угао између потега и оса једнак $\pi/4$, то јест да постоји једнакост $i_d = i_q$.

Слика 5.23: (A) Хипербола константног момента у i_d - i_q дијаграму. (B) Положај ротора, *dq* координатног система и комплексне равни.

5.29 Анализа рада синхроне машине у устаљеном стању

Математички модел електричне машине садржи диференцијалне и алгебарске једначине које описују рад машине у датим условима напајања и оптерећења, као и промену брзине обртања, момента, флукса и струја током прелазних процеса. На основу математичког модела, може се пројектовати напајање и управљање и дати процена о примерености коришћења посматране електричне машине у датој примени.

Усвајање знања о синхроним машинама започиње анализом устаљених (*стационарних*) стања, у којима машина ради без промена у брзини, моменту и флуксу. У наредном одељку, биће одређена заменска шема за устаљена стања и изведени изрази за моменат и снагу у устаљеном стању. Рад у устаљеном стању ће се анализирати и приказати уз помоћ фазорских дијаграма који приказују амплитуде и фазни став релевантних величина. Одредиће се механичка карактеристика као и промена момента у функцији угла снаге.

5.30 Једначине равнотеже напона у устаљеном стању

Обртна трансформација променљивих стања спроведена је са циљем да се добије модел синхроне машине у коме су променљиве стања непроменљиве при раду у устаљеном стању. Пројекције вектора струје, напона и флук-

са на осе синхроно ротирајућег *dq* система се у устаљеном стању не мењају, па су њихови изводи једнаки нули, што олакшава извођење заменске шеме за устаљена стања. У устаљеном режиму рада, комплексни записи вектора $\underline{u}_{dq}$, $\underline{i}_{dq}$ и $\underline{\Psi}_{dq}$ постају константе, па их стога можемо обележавати са $\underline{u}_s$, $\underline{i}_s$ и $\underline{\Psi}_s$. Наведене константе се могу третирати као фазори. Оне се од фазора разликују по томе што представљају величине трофазног система. Њихова амплитуда не мора одговарати ефективној вредности представљених величина. Веза ефективне вредности статорског напона и модула $u_s = (u_d^2 + u_q^2)^{0,5}$ комплексне константе $\underline{u}_s$ одређена је коефицијентом *K* Кларкине 3Ф/2Ф трансформације. За *K*=2/3, модул u_s једнак је вршној вредности фазног напона. Ради лакше анализе рада синхроних машина, пожељно је представити једначине равнотеже напона заменском шемом за устаљена стања. У устаљеном стању нема промена побудне струје и побудног флукса, па је

$$i_p = \text{const.} = I_p$$
$$L_m I_p = \psi_{Rm}.$$

Ако се ради о синхроној машини са сталним магнетима, тада је Ψ_{Rm} константа. Рад у устаљеном стању подразумева да се ротор обрће синхроном брзином, тако да је $\Omega_m = \Omega_S$. За учестаност статорских струја ω_S, синхрона брзина Ω_S, којом се врти статорско поље, једнака је $\Omega_S = \omega_S/p$, тако да је $\Omega_m = \Omega_S = \omega_S/p = \omega_m/p$. Синхроно ротирајући координатни систем је одабран тако да му оса *d* лежи на правцу у коме постоји побудни флукс, односно флукс сталних магнета. Дакле, брзина обртања *dq* система је одређена брзином ротора Ω_m. Будући да је веза електричних учестаности и механичке брзине обртања код машина са више пари полова $\omega = p\Omega$, учестаност која се јавља у једначини равнотеже напона једнака је $\omega_m = p\Omega_m$. При раду у устаљеном стању важи једнакост $\omega_S = \omega_m$.

Једначине равнотеже напона у намотајима статора изотропне машине су

$$u_d = R_s i_d + L_s \frac{\mathrm{d}i_d}{\mathrm{d}t} - \omega_S L_s i_q = R_s i_d - \omega_S L_s i_q$$
$$u_q = R_s i_q + L_s \frac{\mathrm{d}i_q}{\mathrm{d}t} + \omega_S L_s i_d + \omega_S \psi_{Rm} = R_s i_q + \omega_S L_s i_d + \omega_S \psi_{Rm}.$$

На основу претходне две једначине може записати да је

$$u_d = R_s i_d - \omega_S L_s i_q$$
$$j u_q = \mathrm{j} R_s i_q + \mathrm{j}\omega_S L_s i_d + \mathrm{j}\omega_S \psi_{Rm},$$

односно

$$\underline{u}_s = R_S \underline{i}_s + \mathrm{j}\omega_S \underline{\psi}_s = R_S \underline{i}_s + \mathrm{j}\omega_S L_s \underline{i}_s + \mathrm{j}\omega_S \psi_{Rm}, \qquad (5.34)$$

где је

$$\underline{u}_s = u_d + \mathrm{j}u_q, \quad \underline{i}_s = i_d + \mathrm{j}i_q .$$

Флукс $\Psi_{Rm} = L_m i_p$ је део побудног флукса који обухвата и статорске намотаје. Када побуде нема, већ на ротору стоје стални магнети, флукс Ψ_{Rm} представља део флукса створеног магнетима који обухвата и статорске намотаје. Будући да је оса d постављена колинеарно са роторким флуксом, флукс Ψ_{Rm} лежи у директној оси, тако да је његова пројекција на попречну осу једнака нули. Стога је, у комплексној нотацији, флукс Ψ_{Rm} реалан број, то јест $\underline{\Psi}_{Rm} = \Psi_{Rm} + \mathrm{j}0$.

5.31 Заменска шема

У устаљеном стању, једначина (5.34) узима облик

$$\underline{U}_s = R_S \underline{I}_s + \mathrm{j}\omega_S \underline{\psi}_s = R_S \underline{I}_s + \mathrm{j}\omega_S L_s \underline{I}_s + \mathrm{j}\omega_S \psi_{Rm}. \qquad (5.35)$$

Она се може представити заменском шемом за устаљена стања, датом на слици 5.24, у којој постоји отпорник R_S, индуктивност L_S и електромоторна сила E_0.

Слика 5.24: Заменска шема за устаљена стања.

Производ $\underline{E}_0 = \mathrm{j}\omega_m \Psi_{Rm}$ представља електромоторну силу празног хода. Напон $\underline{E}_0$ се јавља на крајевима статорског намотаја у случају да је статор-

ска струја једнака нули. На основу претходне једначине, заменска шема за устаљена стања се може представити као редна веза електромоторне силе празног хода, реактансе $X_S = \omega_S L_S$ и отпорности статорског намотаја R_S. Потребно је уочити да заменска шема дата на слици одговара изотропној синхроној машини код које важи једнакост $L_d = L_q = L_S$.

Величина $\underline{U}_S$ на левој страни шеме представља статорски напон, $\underline{U}_S = U_d + \mathrm{j}U_q$. Приликом коришћења заменске шеме, може се сматрати да су амплитуде фазора једнаке вршним или ефективним вредностима фазних величина.

У моторном режиму рада, активна (реална) компонента фазора $\underline{I}_S$ струје статора је усмерена у складу са ознакама датим на слици. У случају када синхрона машина ради као генератор, напон $\underline{U}_S$ представља напон пријемника коме се саопштава произведена електрична енергија. Струја пријемника је $-\underline{I}_S$, и тада активна компонента струје статора има смер супротан од референтног смера који је означен на слици 5.24.

5.32 Вршне и ефективне вредности струја и напона

Приликом употребе заменске шеме може се сматрати да амплитуда релевантних фазора одговара вршним вредностима фазних величина. Полазећи од Кларкине трансформације фазних напона $u_a(t)$, $u_b(t)$ и $u_c(t)$, која је спроведена са коефицијентом $K = 2/3$, трансформацијом у синхроно ротирајући координатни систем се добија напон $U_d + \mathrm{j}U_q$ чија је амплитуда $|\underline{U}_S|$ једнака вршној вредности фазног напона, $U_{eff} \cdot 2^{0,5}$. Узимајући да сви фазори заменске шеме имају амплитуде једнаке вршним вредностима фазних величина, електромоторна сила $|\underline{E}_0|$ одговара вршној вредности фазног напона у празном ходу. Вредност флукса Ψ_{Rm} која фигурише у колу, треба да буде амплитуда вектора роторског флукса који обухвата статорске намотаје. Величина $\underline{\Psi}_S = L_S\underline{I}_S + \Psi_{Rm}$ има модуо $|\underline{\Psi}_S|$ који одговара амплитуди вектора статорског флукса. У посматраном случају, улазна снага машине се израчунава на основу израза $P_e = (3/2)\underline{U}_S\,\underline{I}_S^*$, док се снага губитака у намотају статора одређују на основу $P_{Cu1} = (3/2)R_S I_S^2$. Снага електромеханичког претварања је једнака $P_{em} = P_e - P_{Cu1} = (3/2)\,\underline{E}_0\,\underline{I}_S^*$. Будући да флукс Ψ_{Rm} лежи на d оси, која у комплексној нотацији има атрибуте реалне осе, то је електромоторна сила $\underline{E}_0 = \mathrm{j}\omega_m\Psi_{Rm}$ колинеарна са попречном осом q, имагинарном осом комплексне $d + \mathrm{j}q$ равни. Зато производ $\underline{E}_0\,\underline{I}_S^*$ узима вредност $\omega_m\Psi_{Rm}I_q$, тако да је $P_{em} = (3/2)\,\omega_m\Psi_{Rm}I_q$. Електромагнетски моменат је једнак количнику снаге P_{em} и синхроне брзине $\Omega_S = \omega_S/p$.

$$M_{em} = \frac{P_{em}}{\Omega_S} = \frac{3p}{2\omega_S}\omega_m \psi_{Rm} I_q = \frac{3p}{2}\psi_{Rm} I_q \tag{5.36}$$

Могућа је и употребе заменске шеме при којој се сматра да амплитуда релевантних фазора одговара ефективним вредностима фазних величина. Заменска шема се може користити и у контексту ефективних вредности напона. Тада је са леве стране заменске шеме потребно довести фазор $\underline{U}_S$ чија амплитуда $|\underline{U}_S|$ одговара ефективној вредности фазног напонаU_{eff}. Електромоторна сила $|\underline{E}_0|$ сада одговара ефективној вредности фазног напона у празном ходу. Ознака Ψ_{Rm} у заменском колу треба да узме вредност $2^{0,5}$ пута мању од амплитуде флукса који стални магнети стварају у статору. Величина $|\underline{\Psi}_S| = |L_S\underline{I}_S + \Psi_{Rm}|$ тада представља амплитуду вектора статорског флукса подељену са $2^{0,5}$. Улазну снагу машине треба рачунати на основу израза $P_e = 3\underline{U}_S\ \underline{I}_S^*$, губитке у намотају статора на основу израза $P_{Cu1} = 3R_S I_S^2$, док је снага електромеханичког претварања једнака $P_{em} = P_e - P_{Cu1} = 3\ \underline{E}_0\ \underline{I}_S^* = 3\omega_m \Psi_{Rm} I_q$. Електромагнетски моменат се одређује на основу следећег израза

$$M_{em} = \frac{P_{em}}{\Omega_S} = \frac{3p}{\omega_S}\omega_m \psi_{Rm} I_q = 3p\ \psi_{Rm} I_q \tag{5.37}$$

<u>Питање (5.6):</u>

Двополна синхрона машина чија је индуктивност статора L_S позната, док је параметар R_S близак нули, има сталне магнете на ротору, који у статорским намотајима стварају флукс Ψ_{Rm}. Машина ради у устаљеном стању, прикључена на трофазну мрежу фреквенције f_S = 50 Hz, фазних напона ефективне вредности U_{Sn}. Статорски напони предњаче за угао δ у односу на електромоторну силу празног хода. Одредити снагу коју мрежа предаје синхроној машини.

Одговор (5.6):

Заменска шема се анализира узимајући да величине у њему представљају ефективне вредности. Струја машине је једнака $\underline{I}_S = (\underline{U}_S - \underline{E}_0)/\mathrm{j}X_S$, где је $\underline{E}_0 = \mathrm{j}\omega_S \Psi_{Rm}$. Будући да напон статора предњачи у односу на електромоторну силу за угао δ, његово предњачење у односу на реалну осу d, износи $\delta + \pi/2$. Стога се може писати

$$\underline{U}_S = -U_{Sn}\sin\delta + \mathrm{j}U_{Sn}\cos\delta,$$

$$\underline{I}_S = \frac{\underline{U}_S - \underline{E}_0}{\mathrm{j}X_S} = \frac{-U_{Sn}\sin\delta + \mathrm{j}U_{Sn}\cos\delta - \mathrm{j}\omega_S\psi_{Rm}}{\mathrm{j}X_S} =$$

$$= \frac{U_{Sn}\cos\delta - \omega_S \psi_{Rm}}{X_S} + \mathrm{j}\frac{U_{Sn}\sin\delta}{X_S}.$$

Снага машине се може израчунати користећи следећи израз

$$\underline{S} = 3\underline{U}_S \underline{I}_S^* = 3\frac{U_{Sn}(\omega_S \psi_{Rm})}{X_S}\sin(\delta) + \mathrm{j}3\frac{U_{Sn}(U_{Sn} - \omega_S \psi_{Rm}\cos(\delta))}{X_S} = P_e + \mathrm{j}Q_e$$

Снага коју мрежа предаје машини једнака је $P_e = 3U_{Sn}E_0\sin(\delta)/X_S$.

5.33 Фазорски дијаграм изотропне синхроне машине

Анализа заменске шеме се ослања на комплексну нотацију у приказу вектора напона, струје и флукса синхроне машине. Равнотежа напона у заменском колу за устаљена стања се може представити фазорским дијаграмом. На слици 5.25 је приказан фазорски дијаграм изотропне синхроне машине која ради у моторном режиму. Оса d синхроно ротирајућег координатног система се узима за реалну осу комплексне равни[1]. Оса q тако постаје имагинарна оса. Будући да је обртна трансформација опредељена тако да је оса d колинеарна са флуксом побуде, фазор $\underline{\Psi}_{Rm}$ лежи на реалној оси, тако да је исправно писати $\underline{\Psi}_{Rm} = \Psi_{Rm}$.

Флукс Ψ_{Rm} представља део побудног флукса који обухвата и статорски намотај. Електромоторна сила празног хода $\underline{E}_0 = \mathrm{j}\omega_m \Psi_{Rm}$ лежи на имагинарној оси. Фазор напона $\underline{U}_S$ се добија тако што се на електромоторну силу празног хода дода пад напона на импеданси статора $\underline{Z}_S = R_S + \mathrm{j}\omega_m L_S$. Пад напона на отпорности је у фази са струјом $\underline{I}_S$, док пад напона на реактанси предњачи за $\pi/2$. Угао δ који одређује фазно кашњење електромоторне силе $\underline{E}_0$ у односу на напон се назива *углом снаге*. Привидна снага машине је једнака

[1] Положај комплексне равни у којој се представљају фазори напона и струје у устаљеном стању може бити произвољан. У основи, он је одређен почетном фазом, али и тај податак зависи од одабраног почетног тренутка. У пракси, положај реалне осе комплексне равни се најчешће бира тако да се подудара са осом d синхроно ротирајућег координатног система. При решавању задатака могу се јавити случајеви где је погодније начинити другачији избор.

$$\begin{aligned}\underline{S} &= 3\underline{U}_S \underline{I}_S^* = \\ &= 3\frac{U_{Sn}(\omega_S \psi_{Rm})}{X_S}\sin(\delta) + \mathrm{j}3\frac{U_{Sn}(U_{Sn} - \omega_S \psi_{Rm}\cos(\delta))}{X_S} = \\ &= P_e + \mathrm{j}Q_e\end{aligned} \tag{5.38}$$

Активна снага P_e коју извор предаје машини одређена је углом снаге

$$P_e = 3\frac{U_{Sn}E_0}{X_S}\sin(\delta). \tag{5.39}$$

Позитивна вредност угла снаге даје позитивну снагу и моменат. Дакле, у случају када напон предњачи у односу на електромоторну силу, машина ради у моторном режиму рада и развија позитиван моменат. Када је $\delta < 0$, напон заостаје у односу на електромоторну силу, снага и моменат узимају негативне вредности, тако да машина ради у генераторском режиму.

Слика 5.25: Фазорски дијаграм изотропне машине.

При раду у устаљеним стањима, ротор синхроне машине се обрће синхроном брзином, коју одређује учестаност напајања, тако да је $\omega_S = \omega_m = p\Omega_m$. До промене у углу снаге δ долази у случају да се јави разлика између брзине обртања статорског поља $\Omega_S = \omega_S/p$ и брзине обртања ротора $\Omega_m =$

ω_m/p. Начин на који се тада мења угао снаге се може сагледати увидом у фазорски дијаграм. Промена статорског напона зависи од учестаности напајања, док је промена електромоторне силе празног хода одређена брзином обртања ротора. Дакле, у случају да ротор заостаје у односу на статорско поље и напон U_S, доћи ће до пораста угла снаге.

Питање (5.7):

Конструисати фазорски дијаграм синхроне машине по угледу на слику 5.25, узимајући да машина ради у генераторском режиму рада у коме струја статора фазно заостаје у односу на електромоторну силу за $3\pi/2$.

Одговор(5.7):

(* * *)

Питање (5.8):

Двополна синхрона машина ради у устаљеном стању у коме је угао снаге δ једнак нули. Амплитуда статорског напона је једнака електромоторној сили празног хода, тако да је, услед $\underline{U}_S = \underline{E}_0$, струја статора једнака нули. У тренутку $t = 0$, вратило мотора се оптерети моментом M_m који се противи обртању. Одредити начин на који ће се мењати брзина обртања. Услед $p = 1$, важе једнакости $\Omega_m = \omega_m$ и $\Omega_S = \omega_S$.

Одговор (5.8):

При раду у устаљеном стању, ротор се обртао синхроном брзином, тако да се релативни положај статорског поља и напона $\underline{U}_S$ у односу на положај ротора и електромоторне силе $\underline{E}_0$ није мењао. Услед $\delta = 0$ и $\underline{U}_S = \underline{E}_0$, није постојала статорска струја нити је генерисан моменат. После пораста момента оптерећења, промена брзине обртања је одређена једначином J $\mathrm{d}\Omega_m/\mathrm{d}t = M_{em} - M_m = 0 - M_m < 0$. Брзина ротора опада, тако да ротор почиње да заостаје у односу на напон $\underline{U}_S$ и обртно поље статора. Фазор напона $\underline{U}_S$ напредује у односу на $\underline{E}_0$, тако да угао снаге расте. Пораст угла снаге доводи до пораста снаге P_e и електромагнетског момента M_{em} који се противи терету M_m и зауставља пад брзине обртања. Током прелазног процеса, потребно је да моменат M_{em} накратко превазиђе отпор кретању M_m, што ће дати позитивну вредност убрзања $\mathrm{d}\Omega_m/\mathrm{d}t$. Краткотрајни интервал убрзања је неопходан стога што је брзина ротора после скока терета умањена, па је неопходно имати извесно убрзање како би њена вредност поново достигла синхрону брзину. Извод $\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}t = \omega_S - \omega_m$ угла снаге је одређен разликом између синхроне брзине и брзине обртања ротора. Ново равнотежно стање, у коме је угао снаге непромењлив ($\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}t = 0$), могуће је достићи једино у случају да важи једнакост $\omega_S = \omega_m$.

* * *

Снага синхроне машине зависи од електромоторне силе празног хода, статорског напона и угла снаге. Електромоторна сила E_0 зависи од побудне струје. Различити парови вредности (E_0, δ) ће дати исту снагу и моменат под условом да је производ $E_0\sin(\delta)$ неизмењен. Побудна струја се, дакле, може мењати а да при томе машине и даље развија исту снагу. Постојећи степен слободе се може искористити да промену реактивне снаге коју машина узима из извора, то јест из напојне трофазне мреже.

У погледу знака реактивне снаге, усвојена је конвенција по којој је реактивна снага коју из мреже узимају пријемници индуктивне природе (индуктивни калемови) позитивна. Реактивна снага коју из мреже узимају пријемници какви су кондензатори сматра се негативном. Кондензатори и сви други електрични пријемници капацитивне природе могу се сматрати "генераторима" реактивне снаге. Будући да је већина пријемника прикључених на мрежу индуктивне природе, у мрежи се често користе оточно везани кондензатори чија је улога компензација реактивне снаге.

На основу једначине (5.38), реактивна снага коју изотропна синхрона машина узима из мреже једнака је

$$Q_e = 3\frac{U_{Sn}\left(U_{Sn} - E_0\cos(\delta)\right)}{X_S}. \tag{5.40}$$

Смањењем побудне струје I_p, електромоторна сила празног хода $E_0 = \omega_m L_m I_p$ може узети вредност мању од напона мреже. Реактивна снага Q_e је тада позитивна, дакле, машина се може еквивалентирати импедансом која има индуктиван карактер. Ако се побудна струја довољно увећа, пораст електромоторне силе празног хода доводи до негативне вредности реактивне снаге, што значи да се машина може еквивалентирати импедансом капацитивне природе. Дакле, зависно од побудне струје, машина може да троши или производи реактивну снагу, односно енергију.

Синхрони генератори у хидроелектранама и термоелектранама могу дати реактивну снагу потребну пријемницима прикљученим на мрежу. Створена реактивна снага се може мењати деловањем на побудну струју. Будући да за симетричан трофазни систем простопериодичних напона и струја генератора важи релација $S^2 = P^2 + Q^2$, увећање реактивне снаге доводи до увећања привидне снаге генератора као и до увећања ефективне вредности струје статора. Ефективна вредност струје је ограничена услед губитака у намотајима, тако да увећање реактивне снаге ограничава активну снагу која се од генератора може добити. Смањење снаге генератора се може предупредити коришћењем оточно везаних кондензатора који су расподељени у преносној и дистрибутивној мрежи и који компензују реактивну снагу потрошача.

5.34 Фазорски дијаграм анизотропне синхроне машине

Фазорски дијаграм анизотропне машине је знатно сложенији због разлике која постоји у индуктивностима у d- и q-оси. Фазор статорског напона није могуће израчунати на основу $\underline{U}_S = \underline{E}_0 + \underline{Z}_S\underline{I}_S = \underline{E}_0 + (R_S + \mathrm{j}\omega_m L_S)\underline{I}_S$ стога што индуктивност статора у двема осама има различите вредности. Реалну и имагинарну компоненту статорског напона потребно је одредити тако што се падови напона дуж реалне и имагинарне осе израчунају засебно. Тако је $U_d = R_S I_d - \omega_m L_q I_q$, док је $U_q = E_0 + R_S I_q + \omega_m L_d I_d$. Реактансе $L_d I_d$ и $L_q I_q$ се означавају ознакама X_d и X_q, респективно.

Слика 5.26: Фазорски дијаграм анизотропне машине ($\omega_m = \omega_S$).

Пошто се посматра рад машине у устаљеном стању, електрична представа брзине обртања ротора $\omega_m = p\Omega_m$ једнака је кружној учестаности напајања ω_S. Једначине равнотеже напона у d и q оси су

$$U_d = -U_s \sin\delta = R_s i_d - \omega_S L_q i_q \ , \qquad (5.41)$$
$$U_q = +U_s \cos\delta = R_s i_q + \omega_S L_d i_d + \omega_S \psi_{Rm} \ .$$

У овим једначинама, величина $\Psi_{Rm} = L_m I_P$ представља део роторског флукса који обухвата и статорске намотаје. Овде дато разматрање се може

применити и на машине са сталним магнетима, при чему тада величина Ψ_{Rm} представља флукс сталних магнета. Решавањем једначина добијају се изрази за струје.

$$i_q = +\frac{U_s \sin\delta}{\omega_S L_q} = \frac{U_s \sin\delta}{X_q} \tag{5.42}$$

$$i_d = \frac{U_s \cos\delta - \omega_S \psi_{Rm}}{\omega_S L_d} = \frac{U_s \cos\delta - E_0}{X_d}$$

Однос фазора напона, струја, електромоторне силе и флукса анизотропне машине су дати на слици 5.26.

5.35 Моменат анизотропне синхроне машине

За положај реалне осе комплексне равни који је усвојен на слици 5.26, фазор статорског напона $\underline{U}_S = U_d + \mathrm{j}U_q$ је једнак $-U_S\sin(\delta)+\mathrm{j}U_S\cos(\delta)$, где је $U_S = |\underline{U}_S|$. На основу једначине (5.41) која даје равнотежу напона у намотајима моду се израчунати струје i_d и i_q. Пад напона на отпорности статора се може занемарити. На основу једначине (5.42),

$$i_q = \frac{U_s \sin\delta}{X_q},\ i_d = \frac{U_s \cos\delta - E_0}{X_d}.$$

Будући да се коришћене ознаке односе на ефективне вредности напона и струје, снага коју машина узима из напојне мреже једнака је $P_e = \mathrm{Re}(3\underline{U}_S\underline{I}_S^*) = 3(U_dI_d + U_qI_q)$. Пошто је $R_S \approx 0$, улазна снага је једнака снази електромеханичког претварања, тако да се моменат може одредити дељењем снаге P_e са синхроном брзином $\Omega_S = \omega_S/p$.

$$M_{em} = \frac{P_e}{\Omega_S} = \tag{5.43}$$

$$= \frac{3p}{\omega_S}\left[-U_S\sin(\delta)\left(\frac{U_S\cos(\delta)-E_0}{X_d}\right)+U_S\cos(\delta)\left(\frac{U_S\sin(\delta)}{X_q}\right)\right]=$$

$$= \frac{3p}{\omega_S}\frac{U_S E_0\sin(\delta)}{X_d}+\frac{3p}{\omega_S}\frac{U_S^2}{2}\left(\frac{1}{X_q}-\frac{1}{X_d}\right)\sin(2\delta) = M_P + M_R$$

Добијени израз за моменат има компоненту M_P која зависи од побудног флукса и напона статора. Она настаје садејством роторског флукса и статорских струја и једнака је

$$M_P = \frac{3p}{\omega_S}\frac{U_S E_0 \sin(\delta)}{X_d} \tag{5.44}$$

Компонента M_R се зове релуктантни моменат. Она не зависи од побудног флукса и јавља се чак и у случају када је побудни флукс једнак нули. Релуктантни моменат зависи од квадрата статорског напона и једнак је

$$M_R = \frac{3p}{\omega_S}\frac{U_S^2}{2}\left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d}\right)\sin(2\delta) \tag{5.45}$$

5.36 Промена момента у функцији угла снаге

Дијаграм који приказује зависност момента анизотропне машине од угла снаге је дат на слици 5.27. Максимална вредност момента се достиже за угао снаге који је нешто мањи од $\pi/2$. Максимална вредност момента је ограничена реактансама машине. Као што је то био случај и код асинхроних машина, мање вредности реактанси машине резултују већом вршном вредношћу момента.

У случају да је машина изотропна, има се $X_d = X_q = X_S$. Максимална вредност момента који машина може развити добија се при углу снаге $\delta = \pi/2$.

$$M_{em_\max} = \frac{3p}{\omega_S}\frac{U_S E_0}{X_d} \tag{5.46}$$

Слика 5.27: Промена момента анизотропне машине у функцији угла снаге.

5.37 Механичка карактеристика синхроне машине

Механичка карактеристика електричне машине је зависност $M_{em}(\Omega_m)$ електромагнетског момента од брзине обртања у устаљеном стању, при задатим и непромењивим условима напајања. Механичка карактеристика која се има при номиналним условима напајања се назива природном карактеристиком. Претходно приказани дијаграм није механичка карактеристика машине. Он приказује зависност момента од угла снаге $M_{em}(\delta)$, док механичка карактеристика $M_{em}(\Omega_m)$ даје зависност електромагнетског момента M_{em} од брзине обртања ротора у устаљеном стању. Синхроне машине могу радити у устаљеном стању једино у случајевима када постоји синхронизам, то јест када је брзина обртања ротора Ω_m једнака синхроној брзини Ω_S. Дакле, механичка карактеристика $M_{em}(\Omega_m)$ синхроне машине лежаће на правој $\Omega_m = \Omega_S$. Највећа вредност момента која се може развити ограничена је реактансом синхроне машине и једнака је $M_{em_max} = 3pU_SE_0/(\omega_S X_S)$. Механичка карактеристика синхроне машине дата је на слици 5.28.

Слика 5.28: Механичка карактеристика.

5.38 Рад синхроне машине напајане из круте мреже

Синхроне машине се могу напајати из трофазне мреже, у којој постоје наизменични напони индустријске фреквенције f_S = 50 Hz или 60 Hz, или из енергетског претварача снаге који машину напаја трофазним системом напона промењиве учестаности и амплитуде. У првом случају, статорска учестаност је задата спољашњим факторима и не може се мењати. Такав случај називамо *напајањем из круте мреже*. Рад машине се обавља са константном, синхроном брзином обртања коју није могуће мењати. У другом случају, машина се напаја из засебног извора, енергетског претварача који даје трофазни систем напона подесиве амплитуде и учестаности. Током рада, учестаност напона добијених од стране претварача се мења са циљем да се оствари жељена промена брзине обртања. Амплитуда напона се подешава и прилагођава потребама конкретне машине.

Синхроне машине велике снаге се користе у улози генератора, и тада су прикључене на трофазну мрежу константне учестаности, којој предају електричну снагу добијену путем вратила од парне турбине или воденог кола. Синхроне машине мањих снага се користе у применама управљања кретањем, покретања возила, у индустријским роботима и производним машинама. У поменутим применама, синхрона машина има улогу мотора

чији је задатак да савлада отпоре покретању радне машине. Синхрони мотор се тада користи као извршни орган, који треба да развије моменат потребан за савладавање отпора кретању и за добијање жељене промене брзине или положаја. Брзину обртања је потребно мењати, па се синхрони серво мотори најчешће напајају из трофазних инвертора са транзисторским прекидачима снаге и са модулацијом ширине импулса.

Од значаја је проучити рад синхроних машина у оба поменута случаја. Најпре ће бити анализиран рад синхроне машине напајане из круте мреже. Овде ће бити анализиран рад трофазне синхроне машине која је прикључена на трофазну мрежу симетричних наизменичних напона константне мрежне учестаности. Претпоставља се да погонска турбина покреће ротор и да машина ради у генераторском режиму рада. Биће дискутован рад у устаљеном стању, промене угла снаге при промени момента погонске турбине, као и промене реактивне снаге у функцији побудне струје.

5.39 Рад синхроног генератора у устаљеном стању

У електранама се користе трофазни синхрони генератори напона од 6 kV до 25 kV и снага од неколико десетина до неколико стотина MW. Генератор је путем вратила спрегнут са парном или воденом турбином која даје кретни моменат M_T. Моменат M_T поспешује кретање, тако да је Њутнова једначина кретања узима облик $J\,\mathrm{d}\Omega_m/\mathrm{d}t = M_{em}+M_T$. У равнотежном стању је $\mathrm{d}\Omega_m/\mathrm{d}t = 0$, тако да електромагнетски моменат генератора M_{em} узима негативну вредност $M_{em} = -M_T$, као и снага електромеханичког претварања $P_e = M_{em}\Omega_m$. Наиме, претварање снаге унутар машине има другачији смер, јер се механички рад претвара у електричну енергију. На фазном дијаграму генератора, електромоторна сила $\underline{E}_0$ предњачи у односу на напон, тако да је угао снаге δ негативан. Снага P_e коју мрежа предаје машини и која у случају генератора узима негативну вредност једнака је

$$P_e = 3\frac{U_{Sn}E_0}{X_S}\sin(\delta) = -P_G\,, \tag{5.47}$$

где је P_G активна снага генератора. Узимајући да је учестаност мреже непромењива, промене угла снаге $\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}t = \omega_S - p\Omega_m$ зависе од брзине обртања ротора, која је у равнотежном стању једнака ω_S/p.

Од интереса је проучити понашање синхроног генератора у случају да дође до мањих промена учестаности мреже, као и код промене снаге и момента турбине.

Увећање снаге турбине

Снага парне или водене турбине се може увећати или смањити у складу са потребама. Промена снаге турбине се остварује деловањем на систем вентила као и променом параметара котла у коме сагорева угљена прашина. Код увећања снаге турбине, развија се већи моменат M_T који поспешује обртање ротора. Полазећи од равнотежног стања у коме је $M_{em0} = -M_{T0}$, увећање момента турбине на вредност $M_{T1} = M_{T0} + \Delta M$ доводи до увећања брзине обртања на основу једначине $J\mathrm{d}\Omega_m/\mathrm{d}t = M_{em}+M_T = \Delta M$.

Пораст брзине обртања доводи до промене угла снаге δ. Будући да је кретање електромоторне силе $\underline{E}_0$ одређено кретањем ротора, док се напон $\underline{U}_S$ обрће брзином одређеном мрежном учестаношћу, то ће предњачење електромоторне силе у односу на напон бити увећано. Угао снаге, који у генераторском раду има негативну вредност, биће додатно умањен. Снага генератора $P_G = -P_e = -3(U_{Sn}E_0/X_S)\sin(\delta)$ се увећава, тако да долази до новог равнотежног стања у коме је $M_{em} = -M_{T1}$.

У случају да се у истом тренутку увећа снага већег броја генератора у електроенергетском систему, а да при томе нема увећања у потрошњи електричне енергије, није могуће пласирати збир увећања снаге ΔP_G свих генератора, тако да не долази ни до промене електромагнетског момента M_{em}. Једначина $J\,\mathrm{d}\Omega_m/\mathrm{d}t = M_{em}+M_T = \Delta M$ тада не може бити уравнотежена. Као резултат, брзине обртања свих генератора би се увећале, што би довело до увећања мрежне учестаности.

У случају када укупна механичка снага саопштена генераторима превазилази потрошњу електричне енергије, долази до увећања учестаности у мрежи.

<u>Питање (5.9):</u>

Имајући у виду горе описани мисаони експеримент, сагледати околност да су електроенергетски системи суседних земаља повезани и размотрити ефекте која оваква веза има на промену снага и учестаности.

<u>Одговор (5.9):</u>

(* * *)

Увећање мрежне учестаности

Мрежна учестаност одређује фазни став статорског напона $\underline{U}_S$. У случају да учестаност мреже порасте, доћи ће до промене угла снаге. Будући да је $\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}t=\omega_S-p\Omega_m$, негативна вредност угла снаге ће се увећати и постати ближа вредности δ=0. Као последица, снага генератора $P_G= -3(U_{Sn}E_0/X_S)\sin(\delta)$ се умањује, као и апсолутна вредност електромагнетског момента.

Увидом у горе наведене примере, може се закључити да постоји спрега фреквенције и снаге (*P-f*), која представља један од принципа на коме се заснива регулација у електроенергетском систему.

Промена реактивне снаге и напона

Синхрони генератор може развијати једнаку снагу P_G = -3($U_{Sn}E_0/X_S$)sin(δ) а да при томе има различите вредности електромоторне силе празног хода. Снага зависи од производа E_0sin(δ), док се електромоторна сила E_0 може променити деловањем на побудну струју генератора. Побудна струја се, дакле, може мењати а да при томе машине и даље развија исту снагу. Постојећи степен слободе се може искористити да промену реактивне снаге коју машина узима из извора (то јест напојне трофазне мреже). Реактивна снага изотропне синхроне машине је пропорционална разлици амплитуда статорског напона и електромоторне силе празног хода

$$Q_e = 3\frac{U_{Sn}\left(U_{Sn} - E_0\cos(\delta)\right)}{X_S}. \tag{5.48}$$

Увећањем побудне струје I_p, електромоторна сила празног хода E_0 = $\omega_m L_m I_p$ узима вредности веће од напона статора, тако да је реактивна снага Q_e тада негативна. Другим речима, генератор се може еквивалентирати импедансом капацитивне природе. Он *генерише* реактивну снагу и саопштава је мрежи. Будући да већина потрошача електричне енергије има индуктиван фактор снаге, електроенергетски систем мора поседовати довољно извора реактивне снаге. Имајући у виду да је серијска реактанса високонапонских далековода преносне мреже значајно већа од њихове отпорности, пренос реактивне снаге ствара значајне падове напона. У случају када постоји значајан пад напона у систему, неопходно је увећати побудне струје генератора и тиме довести до већих индукованих електромоторних сила, што за последицу има увећање реактивне снаге коју генератори саопштавају мрежи.

Увидом у дати пример, може се закључити да постоји спрега реактивне снаге и напона (*U-Q*), која представља један од принципа на коме се заснива регулација у електроенергетском систему.

Промена угла снаге

У случају када се учестаност статорског напона не мења, вектор статорског напона се обрће константном брзином, одређеном учестаношћу напајања. Вектор роторског флукса, створен дејством побудног намотаја, обрће се брзином једнаком као и ротор. Побудни флукс ствара у намотајима

статора електромоторну силу празног хода. Статорски напон и електромоторна сила празног хода се могу представити у комплексној нотацији, као фазори $\underline{U}_S$ и $\underline{E}_0$. Угао снаге[2] δ који образују фазори напона и електромоторне силе мења се по закону $\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}t = \omega_S - \omega_m = \omega_S - p\Omega_m$. Кретање вектора напона је одређено учестаношћу напајања, док је кретање електромоторне силе одређено брзином обртања, тако да је промена угла снаге дефинисана разликом између синхроне брзине и брзине обртања ротора. Електромагнетски моменат машине која ради у устаљеном стању зависи од напона U_S, електромоторне силе E_0 и синуса угла снаге.

Слика 5.29: Промена момента изотропне машине у функцији угла снаге.

Промена електромагнетског момента у функцији угла снаге је дата на слици 5.29. Ако машина ради у празном ходу, угао снаге је једнак нули, као и развијени електромагнетски моменат. Уколико се јави механички отпор кретању M_m, који тежи да умањи брзину обртања, долази до пораста угла снаге стога што је његов извод $\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}t = \omega_S - p\Omega_m$ позитиван. Растом угла снаге се увећава и електромагнетски моменат. Ново равнотежно стање се успоставља у моторном режиму рада, у коме је $M_{em} = M_m$. С друге стране, ако на ротор делује кретни моменат парне турбине, који тежи да убрза ротор, брзина обртања превазилази синхрону па се јавља негативан

[2] Угао δ на фазорском дијаграму одговара *електричном* померају између фазора напона и електромоторне силе. Ако би било потребно претворити електрични померај у механички у настојању да се фазори машине представе у простору, одговарајући механички померај би био δ/p, где је p број пари полова.

извод угла снаге $\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}t = \omega_S - p\Omega_m$. Негативна вредност угла снаге говори о томе да фазор електромоторне силе $\underline{E}_0$ сада предњачи напону. Развијени електромагнетски моменат је негативан, тако да машина ради као генератор, претварајући механички рад у електричну енергију.

У случају да је угао снаге релативно мали, оправдано је усвојити апроксимацију $\sin(\delta)\approx\delta$ и тада се моменат може приближно представити изразом $M_{em} \approx k\delta$. Током рада у устаљеном стању, електромагнетски моменат је у равнотежи са моментима који се опиру кретању. Брзина обртања ротора се тада не мења јер важи једнакост $J\,\mathrm{d}\Omega_m/\mathrm{d}t = M_{em}–M_m = 0$. У устаљеном стању, машина се обрће синхроном брзином $\Omega_m=\Omega_S$. Од интереса је одредити карактер прелазних процеса који се јављају после поремећаја у виду промене момента оптерећења или промене учестаности напона који се доводе на крајеве статорског намотаја. Током анализе прелазних процеса, сматраће се да је број пари полова машине једнак један, $p = 1$, тако да се учестаности електричних величина (ω_m, ω_S) могу сматрати једнаким брзинама обртања (Ω_m, Ω_S). Њутнова једначина ће тако имати запис $J\,\mathrm{d}\omega_m/\mathrm{d}t = M_{em}–M_m$. Дакле, промена угла снаге је одређена изразом

$$\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}t} = \omega_s - p\Omega_m = \omega_s - \omega_m, \tag{5.49}$$

Њутнова једначина код двополне машине узима облик

$$J\frac{\mathrm{d}\Omega_m}{\mathrm{d}t} = J\frac{\mathrm{d}\omega_m}{\mathrm{d}t} = M_{em} - M_m, \tag{5.50}$$

тако да је промена угла снаге одређена диференцијалном једначином

$$J\frac{\mathrm{d}^2\delta}{\mathrm{d}t^2} = -M_{em}(\delta) + M_m. \tag{5.51}$$

После поремећаја у моменту оптерећења, јавиће се одступање брзине обртања ротора од синхроне брзине. Имајући у виду да је положај dq координатног система одређен положајем ротора, док је вектор напона одређен учестаношћу напајања, пројекције вектора напона U_d и U_q на осе dq система ће мењати своју вредност. Дакле, електрични подсистем, представљен једначинама равнотеже напона у d- и q-оси, неће остати у равнотежном стању. У таквом случају, изводи флукса Ψ_d и флукса Ψ_q нису једнаки нули. Тада није оправдано представљати синхрону машину заменским колом за устаљена стања, нити се моменат може представити изразима какав је $M_{em} \approx k\delta$, изведеним из заменске шеме за устаљена стања.

5.40 Временске константе електричног и механичког система

Анализа прелазних процеса у синхроној машини која ради прикључена на круту мрежу је релативно сложена зато што треба пратити промену великог броја променљивих стања. Сложеност модела отежава сагледавање природе процеса и доношење закључака. Анализа се може олакшати, а резултати начинити прегледнијим уколико се усвоји претпоставка да се прелазне појаве у електричном систему смирују знатно брже од прелазних појава у механичком подсистему.

Прелазне појаве у електричном подсистему, то јест у намотајима машине и спрежном магнетском колу које постоји у зазору имају време смирења самерљиво временским константама намотаја $\tau = L/R$, где су L и R отпорност и индуктивност намотаја. Код мањих машина, временске константе намотаја имају вредности од неколико десетина милисекунди, док машине велике снаге имају временске константе $\tau = L/R$ блиске једној секунди. С друге стране, прелазни процеси у механичком подсистему су значајно спорији. Синхрони генератори имају масиван ротор велике инерције и спрегнути су са парним или воденим турбинама значајне инерције. Трајање прелазних појава у механичком подсистему је стога значајно дуже од временских константи електричног дела система. Стога се анализа прелазних појава у механичком систему може упростити. Усвајајући претпоставку да је трајање прелазних процеса у намотајима тако брзо да их је могуће занемарити, електрични део система се може представити једначинама које важе у устаљеном стању. Дакле, моменат који генерише синхрона машина током промена брзине обртања ротора може се апроксимирати изразом $M_{em} \approx k\delta$.

5.41 Њихање синхроне машине

Полазећи од израза $\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}t = \omega_S - \omega_m$ може се одредити други извод угла снаге као $\mathrm{d}^2\delta/\mathrm{d}t^2 = \mathrm{d}\omega_S/\mathrm{d}t - \mathrm{d}\omega_m/\mathrm{d}t$. Будући да је учестаност напојне мреже ω_S непромењива, добија се да је $\mathrm{d}\omega_m/\mathrm{d}t = -\mathrm{d}^2\delta/\mathrm{d}t^2$. За двополну машину, Њутнова једначина сада узима облик

$$J\frac{\mathrm{d}^2\delta}{\mathrm{d}t^2} = -k\delta + M_m\,. \tag{5.52}$$

Применом Лапласове трансформације, диференцијална једначина се може приказати као алгебарска, с тим што у алгебаркој једначини на месту

функција времена $f(t)$ стоје одговарајући комплексни ликови $F(s)$. Усвајајући претпоставку да моменат оптерећења $M_m(t)$ у тренутку $t = 0$ скоковито мења вредност са $M_m(0^-) = 0$ на $M_m(0^+) = M_m$, при чему су почетне вредности угла снаге и његовог извода једнаке нули ($\delta(0)=0$, $d\delta/dt(0)=0$), диференцијална једначина се применом Лапласове трансформације преводи у следећу алгебарску једначину, у којој ознака s представља Лапласов оператор

$$J\frac{d^2\delta(t)}{dt^2}+k\delta(t)=M_m$$

$$\Rightarrow\quad Js^2\delta(s)+k\delta(s)=\frac{M_m}{s}\quad\Rightarrow\quad\delta(s)=\frac{1}{Js^2+k}\frac{M_m}{s}=W(s)\frac{M_m}{s}$$

Комплексни лик M_m/s представља Хевисајдову функцију која описује скоковито увећање момента у почетном тренутку. Функција $W(s)$ се назива функцијом преноса, стога што утврђује везу између комплексног лика момента оптерећења, који побуђује прелазне појаве и сматра се улазом у систем, и комплексног лика $\delta(s)$ угла снаге, који се сматра одзивом, то јест излазом система. У имениоцу функције преноса налази се полином $f(s) = Js^2+k$, који се зове *карактеристични полином*.

Нуле карактеристичног полинома, то јест корени једначине $f(s) = 0$, називају се *половима функције преноса*. Коначни полови функције преноса одређују карактер одзива. У случају карактеристичног полинома $f(s)=(s-s_1)(s-s_2)$, који има коначне нуле s_1 и s_2, одзив на скоковиту промену улаза биће функција времена која садржи факторе $\exp(s_1t)$ и $\exp(s_1t)$. Карактеристични полином $f(s) = Js^2+k$ има коначне нуле $s_{1/2} = \pm\, j\,(k/J)^{0,5} = \pm\, j\,\omega_o$. Дакле, одзив на скоковиту промену улаза $\delta(t)$ имаће факторе $\exp(\pm\, j\omega_o t)$, односно, садржаће чланове $\sin\omega_o t$ и/или $\cos\omega_o t$. Другим речима, одзив посматране синхроне машине на скоковиту промену момента оптерећења ће бити осцилаторан.

Закључак о осцилаторном карактеру одзива се може извести и без претходне дискусије о вези карактеристичног полинома и карактера одзива. Уместо тога, може се сагледати аналогија која постоји између посматраног механичког подсистема синхроне машине и редно LC кола које је у тренутку $t = 0$ прикључено на извор напона E. Импедансе кондензатора и пригушнице једнаке су $Z_C = 1/(sC)$ и $Z_L = sL$, респективно. Напон на кондензатору је једнак $(E/s)\, Z_C/(Z_C+Z_L) = (E/s)\,/(1+LCs^2)$. Познато је да редно LC коло после скоковите промене улазног напона осцилује. Осцилације напона и струје у LC колу имају учестаност ω_o, одређену коренима једначине $1+LCs^2 = 0$, $s_{1/2} = \pm\, j(LC)^{-0,5}$. По аналогији са LC колом, синхрона машина чија функција преноса $W(s)$ у имениоцу има карактеристични полином $f(s) = Js^2+k$, осциловаће на учестаности $\omega_o = (k/J)^{0,5}$.

Дакле, комплексни лик $\delta(s)$ се добија као решење алгебарске једначине

$$Js^2\delta(s)+k\delta(s)=M_m(s),$$

док је карактер одзива одређен нулама карактеристичниог полинома

$$f(s)=s^2+\frac{k}{J},$$

док је одзив угла снаге на скок момента оптерећења дат на слици 5.30.

Слика 5.30: Промена електромагнетског момента при порасту оптерећења.

Осцилаторан одзив брзине, момента и угла снаге није прихватљив. На основу слике 5.30, скок момента оптерећења са $M = 0$ на $M = M_m$ доводи до непригушених осцилација електромагнетског момента M_{em} између вредности $M_{em} = 0$ и $M_{em} = 2M_m$. Осцилације које се јављају после промене оптерећења синхроне машине која се напаја из круте мреже се у литератури зову *њихање синхроне машине*. Промена момента и угла снаге се може описати следећим изразом

$$M_{em}(t)=M_m(1-\cos\omega_0 t),\quad \delta(t)=\frac{M_{em}(t)}{k}=\frac{M_m}{k}(1-\cos\omega_0 t).$$

Извод угла снаге $\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}t = \omega_S - \omega_m = (M_m/k)\,\omega_0 \sin\omega_0 t$ има средњу вредност која је једнака нули. Током њихања синхроне машине, брзина обртања ротора Ω_m осцилује око синхроне брзине Ω_S. Средња вредност брзине обртања је током пригушених осцилација једнака синхроној брзини. Синхронизам ће бити нарушен ако тренутна вредност угла снаге премаши $\delta = \pi/2$, Уколико двострука вредност момента оптерећења превазиђе највећи оствариви кретни моменат $M_{max}= M_{em}(\pi/2)$, доћи ће до испада из синхрони-

зма, ротор ће успорити у толикој мери да је повратак у синхронизам неостварив. Угао снаге $\delta = \omega_k t = (\omega_S - \omega_m)t$ ће тада прогресивно расти, при чему моменат $M_{em} \sim \sin(\omega_k t)$ има средњу вредност једнаку нули. Ротор успорава услед дејства момента оптерећења M_m.

У случају да се ради о њихању синхроног генератора, мења се смер у коме делују компоненте момента које фигуришу у Њутновој једначини кретања $J\,\mathrm{d}\Omega_m/\mathrm{d}t = M_{em} - M_m$. Кретни моменат $M_m < 0$ који даје водена или парна турбина тежи да убрза ротор, док се електромагнетски моменат $M_{em} < 0$ противи кретању. При раду у устаљеном стању, електромоторна сила $\underline{E}_0$ предњачи у односу на напон $\underline{U}_S$, угао снаге узима негативне вредности $0 > \delta > -\pi/2$, што резултује негативним електромагнетским моментом и снагом. До испада из синхронизма долази у случају да, током њихања машине, тренутна вредност угла снаге постане мања од $-\pi/2$. Тада се угао снаге прогресивно умањује, дајући електромагнетски моменат $M_{em}(t)$ средње вредности једнаке нули. Кретни моменат турбине ће дати позитивну вредност убрзања, па ће брзина обртања ротора бити у порасту и већа од синхоне. Да би се предупредио испад машине из синхронизма, неопходно је пригушити или сасвим елиминисати осцилације синхроне машине.

5.42 Пригушење осцилација *LC* кола

Начин на који се могу пригушити осцилације синхроне машине може се сагледати анализом историјских појава у *LC* колу. На наредној слици, приказано је *RLC* коло на које се, у тренутку $t = 0$, доводи напон E. Учестаност осцилација струја и напона у колу једнака је $\omega_0 = \omega_n(1-\xi^2)^{0,5}$, где је ξ коефицијент пригушења *RLC* кола.

Слика 5.31: Пригушене осцилације *LC* кола.

У случају да је отпорност R једнака нули, коефицијент пригушења ξ је једнак нули, учестаност осцилације је једнака $\omega_0 = \omega_n = (LC)^{-0,5}$, тако да се промена напона на кондензатору C може приказати следећим изразом

$$u_C(t) = E(1 - \cos(\omega_0 t)).$$

У случају када је $R > 0$, корени једначине $f(s) = 0$ су комплексни бројеви $s_{1/2} = -\xi\omega_n \pm \mathrm{j}\omega_0$ који имају негативан реални део $\xi\omega_n = 1/\tau = R/(2L)$. Будући да одзив $u_C(t)$ садржи факторе облика $\exp(s_1 t)$, амплитуда осцилација напона ће опадати по закону $\exp(-\xi\omega_n t) = \exp(-t/\tau)$.

Карактеристични полином који одређује одзив RLC кола је

$$f(s) = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2,$$

и његове нуле су

$$s_{1/2} = -\xi\omega_n \pm \mathrm{j}\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -\xi\omega_n \pm \mathrm{j}\omega_0.$$

Одзив струје и напона садржи факторе

$$e^{-s_1 t} = e^{-\xi\omega_n t}\, e^{+\mathrm{j}\omega_0 t}.$$

Промена напона на кондензатору може се одредити применом инверзне Лапласове трансформације на комплексни лик $U_C(s) = (E/s)/(1+RCs+LCs^2)$ и једнака је

$$u_C(t) \approx E - E\, e^{-\xi\omega_n t}\cos(\omega_0 t) - \xi\, E\, e^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_0 t).$$

Напон и струја имају пригушене осцилације на учестаности ω_0. Осцилације се експоненцијално умањују. Временска константа $\tau = 2L/R$ одређује време потребно да се амплитуда осцилација умањи $e = 2{,}71$ пута. У случају да временска константа τ вишеструко премашује период осцилација $T = 2\pi(LC)^{0,5}$, осцилације ће бити слабо пригушене. Веће вредности отпорности R умањују временску константу τ, дају веће вредности коефицијента пригушења ξ, и резултују бољим пригушењем осцилација. Коефицијент пригушења ξ је једнак односу реалног дела полова $s_{1/2}$ и природне учестаности ω_n, тако да се може израчунати као косинус угла који образују реална оса комплексне равни и потег који повезује координатни почетак и пол s_1. Одзив који се има са пригушењем $\xi < 1$ је приказан на наредној слици. Леви део слике, означен (A), приказује положај полова $s_{1/2}$ у комплексној s равни, док је промена напона на кондензатору у функцији времена дата у десном делу слике, означеном са (B).

Слика 5.32: Одзив у случају када су нуле карактеристичног полинома конјуговано комплексни бројеви.

У случају да је коефицијент пригушења већи или једнак 1, одзив не садржи осцилације, већ се мења по експоненцијалном закону

$$u_C(t) \approx K_1 + K_2\, e^{-t/\tau 1} + K_3\, e^{-t/\tau 2}\,,$$

где су временске константе τ_1 = -1/s_1 и τ_2 = -1/s_2 реципрочне вредности полова $s_{1/2}$, који у случају да је $\xi \geq 1$ губе имагинарни део и постају негативни реални бројеви.

Слика 5.33: Одзив у случају када су нуле карактеристичног полинома реални бројеви.

5.43 Пригушење осцилација синхроне машине

Пригушење осцилаторног одзива се постиже увећањем коефицијента у карактеристичном полиному $f(s) = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$ који множи оператор s. У случају непригушене синхроне машине, карактеристични полином $f(s) = Js^2+k$ је добијен из Њутнове диференцијалне једначине која описује промену угла снаге δ. Сабирци са леве стране једначине представљају инерциони моменат $J\,\mathrm{d}\Omega_m/\mathrm{d}t$ и електромагнетски моменат $M_{em} = k\delta$, док здесна стоји моменат оптерећења.

$$J\frac{d^2\delta(t)}{dt^2}+k\delta(t)=M_m \;\Rightarrow\; f(s)=Js^2+k$$

Да би се пригушиле осцилације синхроне машине, потребно је да диференцијална једначина садржи компоненту која је пропорционална првом изводу угла снаге.

$$J\frac{d^2\delta(t)}{dt^2}+k_P\frac{d\delta(t)}{dt}+k\delta(t)=M_m \;\Rightarrow\; f(s)=Js^2+k_P s+k$$

Уколико постоји начин да се остваре мале промене момента оптерећења M_m, стабилизацију и пригушење је тада могуће остварити променом момента оптерећења по закону $M_m(t) = M_{m0} - k_P\,\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}t$. У пракси се описани приступ не може реализовати стога што је моменат M_m дефинисан кретањем радне машине и њиме се не може управљати.

Пригушење одзива ће се добити ако кретни, електромагнетски моменат синхроне машине M_{em} има компоненту пропорционалну изводу угла снаге. Промена момента је тада одређена изразом $M_{em}=k\delta+ k_P\,\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}t$. Промена електромагнетског момента $\Delta M_{em} = k_P\,\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}t$ би се могла постићи одговарајућом варијацијом амплитуде и учестаности напона напајања. Промена статорског напона се одражава на промене струје, што би довело до варијације момента. Међутим, предмет анализе која се овде спроводи је синхрона машина прикључена на круту мрежу, па се њен напон и учестаност не могу мењати. Стога се стабилишуће дејство $\Delta M_{em} = k_P\,\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}t$ постиже изменом у конструкцији синхроне машине.

5.44 Пригушни намотај

Будући да је $\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}t = \omega_S - \omega_m$, тражено стабилишуће дејство $\Delta M_{em} = k_P\,\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}t$ је пропорционално клизању $\Omega_S - \Omega_m$. У устаљеном стању, синхрона брзина

Ω_S је једнака брзини обртања ротора Ω_m. Током прелазних процеса проузрокованих поремећајем момента оптерећења, брзина ротора осцилује око синхроне, тако да се јавља клизање $\omega_S - \omega_m$ различито од нуле. Уградњом кратко спојеног кавеза на ротор синхроне машине, могуће је добити компоненту електромагнетског момента пропорционалну изводу угла снаге $\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}t = \omega_S - \omega_m = \omega_k$.

Код синхроне машине са цилиндричним, ламинираним магнетским колом ротора, кратко спојени кавез се уграђује на истоветан начин као и код асинхроних машина. Проводни штапови који чине кавез се уграђују аксијално, тик уз површину роторског цилиндра. На крајевима, штапови се доводе у кратак спој проводним плочама или прстеновима. У случају да магнетско коло ротора има истакнуте полове, као што је приказано на слици, штапови се уграђују у чело роторских полова. Постоје синхрони генератори велике снаге, начињени за рад са великим брзинама обртања, код којих магнетско коло ротора није начињено слагањем лимова, већ је израђено од челика. Код таквих генератора није неопходно уграђивати кратко спојени кавез на ротору. Наиме, у случајевима када постоји разлика $\omega_S - \omega_m = \omega_k$ између брзине обртања ротора и синхроне брзине, долази до промене магнетске индукције у телу ротора, тако да се јављају вихорне струје у челику од кога је ротор начињен. Код ротора који нису начињени од лимова, уградња кавеза није потребна јер се у проводном магнетском колу јављају вихорне струје. Вихорне струје унутар хомогеног, челичног ротора стварају истоветне ефекте као и кратко спојени кавез.

Слика 5.34: Изглед пригушног намотаја који се уграђује у чело роторских полова и који има облик кратко спојеног кавеза.

Кратко спојени кавез на ротору синхроне машине нема никаквог утицаја на рад синхроне машине у устаљеном стањима. Статорско поље се тада обрће у синхронизму са ротором, тако да нема промене магнетске индук-

ције у магнетском колу ротора. У контурама кратко спојеног кавеза се не јавља промена флукса, тако да нема ни електромоторне силе нити струје. Током прелазних процеса, када постоји извод угла снаге $\omega_S - \omega_m = \omega_k \neq 0$, у кратко спојеном роторском кавезу се јавља промена флукса. Долази до индуковања електромоторне силе и стварања струја у роторским штаповима. Роторске струје имају учестаност $\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}t = \omega_k$. У интеракцији са магнетским пољем, струје штапова стварају електромагнетски моменат пропорционалан клизању, $\Delta M_{em} = k_P\,\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}t$. Створени моменат има стабилишуће дејство и доводи до пригушења осцилација синхроне машине.

5.45 Кратак спој синхроне машине

Синхрони генератори какви се користе у хидроцентралама и термоелектранама, имају снагу од неколико десетина до неколико стотина мегавата. Напон на крајевима статорског намотаја износи неколико хиљада волти. Прикључци статора се повезују са примаром трофазног енергетског трансформатора. Трансформатор је начињен тако да на секундару има напоне од 110 kV, 220 kV или 400 kV и повезује се са преносном мрежом високог напона. У случају да се догоди кратак спој дуж једне од траса далековода, синхроне машине напајају место квара струјом кратког споја. Присуство пригушног намотаја на ротору синхроне машине увећава струју кратког споја. Прецизно одређивање струје кратког споја тражи да се математички модел синхроне машине прошири, те да укључи и кратко спојени кавез. Познато је да се кратко спојени кавез може моделирати системом од два ортогонална, кратко спојена роторска намотаја. После проширења, модел синхроне машине ће садржати пет спрегнутих намотаја. То су намотај побуде, намотај статора у *d*-оси, намотај статора у *q*-оси, кратко спојени намотај ротора у *d*-оси и кратко спојени намотај ротора у *q*-оси. Коришћење таквог модела у анализи прелазних појава које се током кратког споја догађају у синхроној машини омогућује ближе одређивање струје кратког споја. Модел је релативно сложен и овде се не изводи нити користи. Уместо тога, биће дата оквирна процена струје кратког споја синхроне машине која на ротору има пригушни намотај.

У случају да се јави трофазни кратак спој на прикључцима синхроне машине, статорски напон узима вредност $\underline{U}_S = 0$. Код кратког споја који се јавља на далеководу, могуће је у анализи поћи од претпоставке да је $\underline{U}_S = 0$, али тада реактансу и отпорност статора треба увећати за износ који одговара серијској импеданси између прикључака машине и места кратког споја. У даљим разматрањима, сматраће се да су спољашње индуктивности и отпорности које раздвајају машину од места кратког споја укључене

у индуктивности и отпорности статорског намотаја. Захваљујући томе, даља анализа се може спровести уз претпоставку да је статорски намотај кратко спојен ($\underline{U}_S = 0$) чак и у случају да се кратак спој јавља на удаљеном далеководу.

Анализа кратког споја се спроводи уз претпоставку да је струја статора непосредно пре настанка квара једнака нули. Поред тога, отпорност статора R_S се код машина већих снага може занемарити, тако да једначина равнотеже напона у кратком споју узима следећи облик,

$$\underline{u}_{dq} = R_S \underline{i}_{dq} + \mathrm{d}\underline{\psi}_{dq}/\mathrm{d}t + \mathrm{j}\omega_m \underline{\psi}_{dq} \qquad (5.53)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{u}_s = 0 = \mathrm{d}\underline{\psi}_{dq}/\mathrm{d}t + \mathrm{j}\omega_m \underline{\psi}_{dq}$$

Прелазни процеси у кратко спојеној синхроној машини укључују и промену *d*- и *q*-компоненте флукса, тако да није оправдано сматрати да машина ради у устаљеном режиму, у коме је извод компоненти флукса у *dq* координатном систему једнак нули.

Једносмерна компонента

Овде се анализира струја трофазног кратког споја синхроне машине. Будући да машина има побудни, статорски и пригушни намотај, њен потпун модел је релативно сложен и није прегледан. Да би се дошло до приближне процене струје, потребно је начинити одређена занемарења.

Довођењем у кратак спој статорског намотаја, напон у свакој од фаза се изједначава са нулом. Дакле, у фази *a* постоји равнотежа напона $u_a = 0 = R_S i_a + \mathrm{d}\Psi_a/\mathrm{d}t$. Занемарењем пада напона $R_S i_a$, једначина се своди на $\mathrm{d}\Psi_a/\mathrm{d}t = 0$, што значи да флукс сваке од фаза тежи да задржи вредност $\Psi_a(0^-)$ која се затекла у тренутку када настаје кратак спој. Ако је $R_S = 0$, у сваком од кратко спојених намотаја не би било промене флукса. Дакле, после кратког споја, флукс кратко спојеног намотаја је константан. Будући да је отпорност статора великих синхроних машина врло мала, оваква представа ($R_S = 0$) се може успешно користити у анализи промене струја у кратком времену после настанка кратког споја.

Током рада у устаљеном стању које је претходило квару, флукс сваке од фаза се мењао по простопериодичном закону са учестаношћу $\omega_m = \omega_S$, па и флукс фазе *a*. Средња вредност флукса Ψ_a је била једнака нули. У тренутку када настаје кратак спој, затечена вредност флукса Ψ_a је једнака $\Psi_a(0^-)$. Ако нема пада напона $R_S i_a$, флукс фазе *a* задржава вредност $\Psi_a(0^-)$ и после квара. Дакле, флукс Ψ_a добија једносмерну компоненту. Услед присуства малог али коначног пада напона $R_S i_a$, једносмерна компонента флукса ће експоненцијално опадати. Временска константа $\tau = L_{\gamma eS}/R_S$, која одређује

динамику промене једносмерне компоненте флукса је мања за веће отпорности намотаја. Детаљна анализа ефеката које има једносмерна компонента фазног флукса на облике величина у $\alpha\beta$-координатном систему и dq-координатном систему захтева извођење комплетног математичког модела синхроне машине са свих пет релевантних намотаја. Овде се таква анализа не спроводи. Будући да су извођење и анализа наведеног модела релативно сложени, даља разматрање ће бити базирана на претпоставци да је временска константа $\tau = L_{\gamma eS}/R_S$ релативно мала, тако да се једносмерна компонента флукса у фазама статора сведе на занемариву вредност у времену краћем од трајања прелазних појава при кратком споју. На основу уведених претпоставки, може се сматрати да је флукс у фазама статорског намотаја непосредно по успостављању кратког споја одређен једнакошћу $\Psi_a(0^+)=\Psi_b(0^+)=\Psi_c(0^+)=0$, што даје $\Psi_d(0^+)=\Psi_q(0^+)=0$.

Сврха дискусије која се овде спроводи је добијање приближне процене струје кратког споја. Анализа је додатно упрошћена закључком да је $\Psi_d = \Psi_q = 0$. Закључак ће бити коришћен у одређивању струје кратког споја I_{SK}.

Струја кратког споја зависи од затечене вредности побудне струје у тренутку настанка квара као и од затечених вредности статорских струја. У анализи се полази од претпоставке да је кратак спој настао у стању у коме је статорска струја једнака нули, па се узима да су вредности $i_d(0^-)$ и $i_q(0^-)$ једнаке нули. Оваква претпоставка не умањује вредност добијених резултата. Она одговара ситуацији у којој кратак спој настаје док машина ради у кратком споју.

Најпре ће се одредити струја I_{SK1} у случају да се побудни намотај машине која нема роторски кавез напаја из струјног извора. Јачина струје I_{SK1} се односи на период непосредно после кратког споја, у времену у коме је утицај пада напона Ri на отпорностима без значајног утицаја на појаве.

Потом ће се израчунати струја I_{SK2} за случај да се побудни намотај напаја из напонског извора.

Коначно, одредиће се струја I_{SK3} синхроне машине која има пригушни намотај и чији се побудни намотај напаја из напонског извора.

Одређивање струје I_{SK1}

Од интереса је одредити струју I_{SK1} кратког споја која постоји у намотајима статора у случају када се побудна струја не мења, $i_P(t) = I_P$. Овакав случај се у пракси ретко јавља. Наиме, побуда се најчешће напаја из реалног напонског извора који има релативно малу унутрашњу импедансу. Из услова $\Psi_d = \Psi_q = 0$, за синхрону машину која нема пригушни намотај, добијају се релације $L_q i_q = 0$, $L_d i_d + L_m I_P = 0$. Компоненте статорске струје I_{SK1}

дате су једначином (5.54), у којој ознака E_0 представља електромоторну силу празног хода. Вредност E_0 би се имала на крајевима статорског намотаја пре настанка кратког споја у условима када је $\underline{I}_S = 0$.

$$i_q = 0, \qquad (5.54)$$

$$i_d = -\frac{L_m I_P}{L_d} = -\frac{\omega_s L_m I_P}{\omega_s L_d} = -\frac{\omega_s L_m I_P}{\omega_s L_d} = -\frac{E_0}{X_d}$$

Дакле, ефективна вредност струје кратког споја је једнака I_{SK1} = 0,707 E_0/X_d. Струја I_{SK1} се не умањује током времена, тако да се задржава и у случају када машина трајно ради у кратком споју. Тренутне вредности фазних струја се могу добити применом инверзне обртне и 3Ф/2Ф трансформације на струје израчунате у једначини (5.54).

Одређивање струје I_{SK2}

У пракси, побуда синхроног генератора се напаја из помоћне машине за једносмерну струју која ради у генераторском раду и зове се *будилица*, или из нарочитог тиристорског претварача снаге. Извор побуде се најчешће може моделирати као напонски извора са релативно малом унутрашњом импедансом. Претпостављајући да је побудни напон константан и да током кратког споја задржава вредност $U_P = R_P I_P$, коју је имао и пре настанка кратког споја, потребно је проценити промену струје кратког споја. Ознака I_P означава вредност струје у устаљеном стању које је претходило кратком споју, док се ознаком $i_P(t)$ означава промена вредности побудне струје током прелазног процеса. У случају када се побуда напаја из напонског извора, могу се јавити промене побудне струје. Усвајајући претпоставку да је пад напона услед отпорности побуде $U_P = R_P I_P$ релативно мали, једначина равнотеже напона у намотају побуде се своди на израз $\mathrm{d}\Psi_P/\mathrm{d}t = 0$. Дакле, у случају када се побуда напаја из напонског извора и када се отпорности у колу могу занемарити, флукс $\Psi_P = L_P i_P + L_m i_d$ тежи да задржи вредност $L_P I_P$ која је постојала пре настанка кратког споја. По настанку кратког споја, флукс статора се своди на вредност блиску нули. Део статорског флукса обухвата и побудни намотај, тако да долази до смањења флукса побудног намотаја. Промена флукса у побудном намотају индукује електромоторну силу која увећава побудну струју $i_P(t)$, стварајући тако услове да се флукс побудног намотаја задржи на почетној вредности. Уз наведена занемарења ($\mathrm{d}\Psi_P/\mathrm{d}t \approx 0$), вредности које флукс статора и побудни флукс имају по настанку кратког споја дате су једначином (5.55).

$$L_q i_q = 0, \;\Rightarrow\; i_q = 0, \tag{5.55}$$

$$\psi_P = L_P i_P + L_m i_d = \psi_{P0} = L_P I_P, \quad \Rightarrow \quad i_P = I_{P0} - \frac{L_m}{L_P} i_d,$$

$$\psi_d = L_d i_d + L_m i_P = 0 = L_d i_d + L_m I_{P0} - \frac{L_m^2}{L_P} i_d \;.$$

Струја i_d је дата једначином (5.56).

$$i_d = -\frac{L_m I_{P0}}{L_d - \dfrac{L_m^2}{L_P}} = -\frac{L_m I_{P0}}{\left(\dfrac{L_d L_P - L_m^2}{L_P}\right)} = -\frac{L_m I_{P0}}{L'_d} \tag{5.56}$$

Индуктивност L'_d из претходне једначине је еквивалентна индуктивност расипања трансформатора чији је примар статорски намотај у оси d, док му је секундар кратко спојени побудни намотај. Заменска шема таквог трансформатора је дата на слици 5.35, где је $L'_{\gamma P} = (N_S/N_P)^2 L_{\gamma P}$ индуктивност расипања побудног намотаја сведена на страну статора, док је $L'_m = (N_S/N_P)L_m$ међусобна индуктивност сведена на страну статора. Свођењем индуктивности на страну статора, сопствена индуктивност статорског намотаја у d оси се може приказати као $L_d = L_{\gamma d} + L'_m$, где је $L_{\gamma d}$ индуктивност расипања. Сопствена индуктивност побудног намотаја сведена на страну статора може се одредити као $L'_P = L'_{\gamma P} + L'_m$.

Слика 5.35: Упрошћена заменска шема кратко спојене синхроне машине без пригушног намотаја и са побудним намотајем који се напаја из напонског извора.

Будући да су расипне индуктивности значајно мање од међусобне, параметар L'_d је приближно једнак збиру индуктивности расипања статорског

намотаја $L_{\gamma d}$ и расипне индуктивности побудног намотаја $(N_S/N_P)^2 L_{\gamma P}$, сведене на страну статора.

$$L'_d = \frac{X'_d}{\omega_s} = \frac{L_d L_P - L_m^2}{L_P} \approx L_{\gamma d} + L'_{\gamma P} \tag{5.57}$$

Индуктивност L'_d зависи од коефицијента спреге k између статорског и побудног намотаја. Практичне вредности индуктивности L'_d су значајно мање од коефицијента сопствене индуктивности L_d. Ефективна вредност струје статора I_{SK2}, која постоји у фазним намотајима статора непосредно по успостављању кратког споја, дата је једначином (5.58). Треба уочити да је $I_{SK1} < I_{SK2}$.

$$i_d = -\frac{L_m I_{P0}}{L'_d}, \qquad I_{SK2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{L_m I_{P0}}{L'_d} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{E_0}{X'_d} \tag{5.58}$$

Уколико кратак спој потраје, струја $I_{SK2} > I_{SK1}$ се неће задржати на иницијалној вредности већ ће постепено опадати ка вредности I_{SK1}, на којој ће се задржати у устаљеном стању. Негативна вредност струје i_d доводи до увећања побудне струје i_P, која настоји да флукс побудног намотају одржи на вредности која је постојала пре настанка кратког споја. Будући да се напон побуде не мења, једначина равнотеже напона у побудном намотају има облик $U_P = R_P I_P = R_P i_P + \mathrm{d}\Psi_P/\mathrm{d}t$, тако да је извод побудног флукса током прелазног процеса $\mathrm{d}\Psi_P/\mathrm{d}t = R_P(I_P - i_P) < 0$. Умањењем побудног флукса смањује се електромоторна сила индукована у статорским намотајима, па тако и струја кратког споја у намотајима статора. Детаљнија анализа показује да се амплитуда флукса мења по експоненцијалном закону, са временском константном τ' коју је могуће одредити из заменске шеме дате на слици 5.35. Ако се у посматраном колу начини кратак спој крајева статора и уврсти ненулта отпорност R'_P, сведена на страну статора, временска константа τ' се добија на основу једначине (5.59).

$$\tau' = \frac{1}{R'_P}\left(L'_{\gamma P} + \frac{L_{\gamma d} L'_m}{L_{\gamma d} + L'_m}\right) \tag{5.59}$$

Временска константа τ' је значајно већа од једног периода $T = 2\pi/\omega_m$ промене статорске струје. Стога је оправдано сматрати да се амплитуда флукса у машини, која експоненцијално опада, има веома мале промене у току једног периода T. Однос $\tau' >> T$ омогућава да статорску струју опишемо као простопериодичну, са амплитудом која постепено опада по експоненцијалном закону.

Из претходне анализе се може сагледати промена струје кратког споја синхроне машине која има побудни намотај прикључен на извор константног напона и нема пригушни намотај. Непосредно по настанку кратког споја, ефективна вредности струје у фазама статора једнака је I_{SK2}, а потом она експоненцијално опада ка вредности I_{SK1} коју достиже у устаљеном стању. Динамика промене ефективне вредности одређена је временском константом τ'.

Спроведена анализа узима у обзир појаве у *d* оси. У посматраном случају, струје и флуксеви у *q* оси машине су непосредно пре квара били једнаки нули. Услед спреге прелазних појава у *d*-оси и *q*-оси, кратак спој доводи до прелазних појава и у *q*-оси. Спрега прелазних појава у ортогоналним осама се може сагледати увидом у диференцијалне једначине равнотеже напона. Прелазне појаве у *q*-оси се разликују утолико што у њој не постоји намотај побуде. На ротору синхроне машине постоји само један побудни намотај, и он је постављен у правцу *d*-осе.

Одређивање струје I_{SK3}

Присуство кратко спојеног роторског кавеза даље увећава вршне вредности струје кратког споја. Кратко спојени роторски кавез има тенденцију да током прелазних процеса одржи флукс на затеченој вредности, што умањује пад флукса при кратком споју, дајући веће вредности електромоторне силе и струје кратког споја. Пригушни намотај, односно кратко спојени роторски кавез представља се помоћу два ортогонална, кратко спојена намотаја. Један од њих је оријентисан у правцу *d*-осе, док је други оријентисан у правцу *q*-осе.

Када се машини описаној у претходном примеру дода кратко спојени роторски кавез, тада у представи машине, начињеној у синхроно ротирајућем *dq* координатном систему, постоје три намотаја који леже у *d*-оси. Један он њих је *d* намотај статора, други је намотај побуде, док је трећи намотај роторског кавеза у *d*-оси. Флукс статорског намотаја обележавамо ознаком Ψ_d, флукс побуде ознаком Ψ_P, док за флукс краткоспојеног пригушног намотаја који лежи у *d*-оси усвајамо ознаку Ψ_K.

Посматрајући намотаје у *d*-оси као тронамотни трансформатор, може се одредити индуктивност L''_d која одређује реактансу X''_d и струју кратког споја I_{SK3}. Индуктивност L''_d је еквивалентна индуктивност расипања трансформатора који има два кратко спојена секундарна намотаја, а то су намотај побуде и пригушни намотај. Заменска шема таквог трансформатора је дато на слици 5.36, док је индуктивности L''_d дата једначином (5.60).

Слика 5.36: Упрошћена заменска шема кратко спојене синхроне машине са пригушним намотајем и са побудним намотајем који се напаја из напонског извора.

$$L''_d = L_{\gamma d} + \left(\frac{1}{L'_m} + \frac{1}{L'_{\gamma P}} + \frac{1}{L'_{\gamma K}} \right) \approx L_{\gamma d} + \frac{L'_{\gamma P} L'_{\gamma K}}{L'_{\gamma P} + L'_{\gamma K}} \tag{5.60}$$

5.46 Одређивање струје квара коришћењем матрице $\underline{L}$

Поред аналогије са трансформатором, индуктивност L''_d се може одредити уз помоћ матрице индуктивности, поређењем вредности три релевантна флукса пре и после успостављања кратког споја. Да би се одредила иницијална вредности струје кратког споја I_{SK3}, потребно је утврдити вредности флуксева пре настанка кратког споја ($\Psi_d(0\text{-}), \Psi_P(0\text{-}), \Psi_K(0\text{-})$) као и вредности које се имају непосредно после кратког споја ($\Psi_d(0^+), \Psi_P(0^+), \Psi_K(0^+)$).

У анализи се претпоставља да кратак спој настаје у стању $i_d(0^-) = i_q(0^-) = 0$, при чему је $i_P(0^-) = I_{P0}$. Будући да је машина радила у устаљеном стању и обртала се синхроном брзином, у кратко спојеном кавезу није било струја, тако да је струја $i_K(0^-)$ пригушног намотаја у d-оси затечена на вредности једнакој нули. Веза струја и флуксних обухвата три намотаја која леже у d-оси је дата следећом матрицом индуктивности

$$[\psi]=\begin{bmatrix}\psi_d\\ \psi_K\\ \psi_P\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}L_d & L_{dK} & L_m\\ L_{dK} & L_K & L_{PK}\\ L_m & L_{PK} & L_P\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_d\\ i_K\\ i_P\end{bmatrix}=[L_{dPK}][i_{dPK}]. \tag{5.61}$$

Елемент матрице L_{dK} означава међусобну индуктивност између d-намотаја статора и пригушног намотаја у d-оси. Елемент L_{PK} означава међусобну индуктивност између побудног намотаја и пригушног намотаја у d-оси, док коефицијент L_m означава међусобну индуктивност између статорског намотаја и намотаја побуде. Коефицијенти L_K, L_d и L_P представљају сопствене индуктивности релевантних намотаја. Будући да су пре квара постојале вредности струја $i_K(0^-) = i_d(0^-) = 0$ и $i_P(0^-) = I_{P0}$, у тренутку настанка квара су затечене вредности флуксних обухвата $\Psi_K(0^-) = L_{PK}I_{P0}$, $\Psi_P(0^-) = L_PI_{P0}$ и $\Psi_d(0^-) = L_mI_{P0}$. Пригушни намотај је кратко спојен, док је побудни прикључен на извор релативно мале унутрашње импедансе.

У кратко спојеним намотајима се индукују електромоторне силе и струје које настоје да очувају затечену вредност флукса. Стога се може сматрати да је $\Psi_K(0^+) = \Psi_K(0^-)$ и $\Psi_P(0^+) = \Psi_P(0^-)$. У погледу статорског намотаја, може се закључити да ће флукс непосредно после успостављања кратког споја задржати ненулту вредност затечену пре квара. Међутим, треба имати у виду да је статорски намотај кратко спојен, као и да је отпорност R_S мала, што доводи до закључка да је извод статорског флукса у трајању кратког споја једнак нули. У случају да је $R_S = 0$, флукс статора би се настанком кратког споја задржао на затеченој вредности која се не би мењала. Будући да одређена отпорност у колу кратког споја ипак постоји, једносмерне компоненте флукса у фазама статора ће релативно брзо бити сведене са иницијалних вредности $\Psi_a(0)$, $\Psi_b(0)$, и $\Psi_c(0)$ на нулу. Стога се током даље анализе полази од става да је флукс у фазама статора после квара једнак $\Psi_a(0^+)=\Psi_b(0^+)=\Psi_c(0^+)=0$, што даје $\Psi_d(0^+)=\Psi_q(0^+)=0$. Сада је струју $i_d(0^+)$ могуће одредити на начин дат у једначини (5.62).

$$\begin{bmatrix}i_d(0^+)\\ i_K(0^+)\\ i_P(0^+)\end{bmatrix}=[L_{dPK}]^{-1}\begin{bmatrix}\psi_d(0^+)\\ \psi_K(0^+)\\ \psi_P(0^+)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}L_d & L_{dK} & L_m\\ L_{dK} & L_K & L_{PK}\\ L_m & L_{PK} & L_P\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ L_{PK}I_{P0}\\ L_PI_{P0}\end{bmatrix}, \tag{5.62}$$

$$i_d(0^+)=-\frac{L_m\left(L_PL_K-L_{PK}^2\right)}{L_dL_KL_P-L_dL_{PK}^2-L_PL_{dK}^2+2L_{dK}L_mL_{PK}-L_KL_m^2}I_{P0}$$

Претходни израз је релативно сложен и потребно је свести га на једноставнију форму. Без губитка на општости, могуће је све коефицијенте ин-

дуктивности свести на статорску страну, множењем са коефицијентом свођења који је одређен односом броја навојака у релевантним намотајима. Ако се при том претпостави да је флукс сваког од намотаја могуће раздвојити на међусобни флукс, који обухвата сва три намотаја која стоје у d-оси, и расипни флукс посматраног намотаја, могуће је записати да је $L'_m = L'_{PK} = L'_{dK}$, као и да је $L_d = L'_m + L_{\gamma S}$, $L'_K = L'_m + L'_{\gamma K}$ и $L'_P = L'_m + L'_{\gamma P}$. Ознаке L'_{PK}, L'_{dK}, L'_K, $L'_{\gamma K}$, L'_P и $L'_{\gamma P}$ означавају релевантне индуктивности сведене на страну статора. Сматрајући да се свака од расипних индуктивности може сматрати значајно мањом од међусобне, израз за струју $i_d(0^+)$ се може добити у прегледнијој форми

$$i_d\left(0^+\right) = -\frac{L_m\left(L'_{\gamma P} + L'_{\gamma K}\right)}{L'_{\gamma P}L'_{\gamma K} + L_{\gamma d}L'_{\gamma K} + L_{\gamma d}L'_{\gamma P}} I_{P0} = -\frac{L_m I_{P0}}{\dfrac{L'_{\gamma P}L'_{\gamma K}}{L'_{\gamma P} + L'_{\gamma K}} + L_{\gamma d}} = -\frac{L_m I_{P0}}{L''_d}.$$

Ефективна вредност струје кратког споја I_{SK3}, дата једначином (5.63), има се у фазним намотајима статора непосредно по настанку квара и већа је од струје I_{SK2}, која постоји у случају да машина нема пригушни намотај (једначина (5.64)).

$$I_{SK3} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{L_m I_{P0}}{L''_d} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{E_0}{L''_d} \tag{5.63}$$

$$I_{SK3} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{L_m I_{P0}}{\dfrac{L'_{\gamma P}L'_{\gamma K}}{L'_{\gamma P} + L'_{\gamma K}} + L_{\gamma S}} > \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{L_m I_{P0}}{L'_{\gamma P} + L_{\gamma S}} = I_{SK2} \tag{5.64}$$

Струје индуковане у пригушном намотају доприносе ефективној вредности струје у фазама статора. Деловање пригушног намотаја смањује еквивалентну индуктивност расипања машине са вредности $L'_{\gamma e} = L_{\gamma S} + L'_{\gamma P}$ на вредност $L''_{\gamma e} = L_{\gamma S} + L'_{\gamma P}L'_{\gamma K}/(L'_{\gamma P} + L'_{\gamma K})$, што увећава струју кратког споја. Струја $i_K(t)$ постоји у штаповима кратко спојеног кавеза. Услед коначне отпорности штапова, струја експоненцијално опада. Временска константа τ'', која дефинише динамику промене струје у штаповима, зависи од отпорности штапова и еквивалентне индуктивности $L'_{\gamma Ke}$ која постоји у колу струје $i_K(t)$. Временска константа τ'' се може одредити из заменске шеме дате на слици 5.36. Ако се у посматраном колу начини кратак спој крајева статора, уврсти ненулта отпорност R'_K, сведена на страну статора, временска константа се добија на основу (5.65).

$$\tau'' = \frac{L''_d}{R'_K} = \frac{1}{R'_K}\left[L_{\gamma d} + \left(\frac{1}{L'_m} + \frac{1}{L'_{\gamma P}} + \frac{1}{L'_{\gamma K}}\right)\right] \approx \tag{5.65}$$

$$\approx \frac{1}{R'_K}\left(L_{\gamma d} + \frac{L'_{\gamma P} L'_{\gamma K}}{L'_{\gamma P} + L'_{\gamma K}}\right)$$

Отпорност штапова пригушног намотаја, сведена на страну статора, најчешће је мања од сведене отпорности побуде, тако да је вредност временске константе τ'' видно мања од вредности τ''. Стога се промена струје кратког споја синхроне машине може поделити на три сукцесивна интервала описана у наредном одељку.

5.47 Транзијентне и субтранзијентне појаве

Интервал 1

Непосредно по настанку кратког споја, у намотајима статора се успоставља струја ефективне вредности I_{SK3}, која је пропорционална струји побуде и обрнуто пропорционална еквивалентној индуктивности машине L''_d. Амплитуда струје експоненцијално опада са временском константом τ''. По истеку 3÷5 τ'', струја се своди на вредност I_{SK2}. На крају овог интервала, сведени су прелазни процеси у пригушном намотају док се струја у штаповима кратко спојеног кавеза експоненцијално смањила.

Интервал 2

Током другог интервала, струја у намотајима статора узима ефективну вредност I_{SK2}, која је пропорционална струји побуде и обрнуто пропорционална еквивалентној индуктивности машине L'_d. Амплитуда струје експоненцијално опада са временском константом τ'. По истеку 3÷5 τ'', ефективна вредност струје статора се своди на вредност I_{SK1}, окончани су прелазни процеси у у побудном намотају и побудна струја је сведена на вредност $I_{P0} = U_P/R_P$, која је постојала и пре поремећаја.

Интервал 3

После смирења прелазних процеса у пригушном и побудном намотају, струја у намотајима статора узима ефективну вредност I_{SK1}, која је пропор-

ционална струји побуде и обрнуто пропорционална индуктивности статора $L_d \approx L_m$. Амплитуда струје се не мења све док заштитни механизми не реагују и раздвоје синхрону машину од места квара.

У литератури која се бави анализом синхроних машина, интервал 1 се зове *субтранзијентни интервал*, док се реактанса $X''_d = \omega_S L''_d$ зове *субтразијентна реактанса*. Интервал 2 се зове *транзијентни интервал*, док се реактанса $X'_d = \omega_S L'_d$ зове *тразијентна реактанса*. Изрази за струју кратког споја у транзијентном и субтранзијентном интервалу су добијени после низа апроксимација, уведених ради извођења приближних израза који омогућују да се начини оквирна веза између параметара машине и амплитуде струје кратког споја. Прецизнији прорачун тражи извођење комплетног математичког модела синхроне машине са свих пет релевантних намотаја.

Код синхроних генератора, практично вредност синхроне реактансе x_d узимају вредност од 0,8 до 2,0. Транзијентна реактанса x'_d се креће у интервалу од 0,2 до 0,4, а субтранзијентна од 0,1 до 0,2. Транзијентна временска константа τ' узима вредности од 1 до 2 s, док субтранзијентни интервал τ'' траје од 20 ms до 50 ms.

5.48 Машине напајане из извора променљиве учестаности

Синхроне машине мањих и средњих снага се користе у применама управљања кретањем, покретања возила, у индустријским роботима и производним машинама. У поменутим применама, синхрона машина има улогу мотора чији је задатак да савлада отпоре кретања радне машине. Синхрони мотор се тада користи као извршни орган, који треба да развије моменат потребан за савладавање отпора кретању и за добијање жељене промене брзине или положаја. Предности синхроних машина у односу на друге врсте електромотора су велика специфична снага и релативно мали губици. Висок степен корисног дејства синхроних мотора са сталном побудом је последица одсуства губитака у ротору. Захваљујући сталним магнетима, флукс ротора се обезбеђује без присуства побудног намотаја, побудне струје и снаге губитака $U_P I_P = R_P I_P^2$, који постоје код машина са намотаним ротором. Поред тога, у ротору синхроне машине не постоје губици у гвожђу. Током рада машине, ротор се обрће у синхронизму са пољем статора, тако да у устаљеном стању нема промене магнетске индукције у магнетском колу ротора. У одсуству губитака у намотају ротора и губитака у магнетском колу ротора, нема ни ослобађања топлоте током рада. Стога је хлађење синхроних мотора са сталном побудом знатно олакшано, тако да постоји могућност за рад са већим густинама струје и већим вредностима

магнетске индукције, што резултује већом специфичном снагом. У односу на асинхрону машину једнаке снаге, синхрона машина са сталним магнетима на ротору има за 20÷30 % мању масу. Биланс снаге стално побуђених синхроних машина је упоредив са билансом снаге асинхроних машина, с тим што код синхроних машина не постоје губици у ротору sP_{ob}, што значајно увећава степен корисног дејства.

У применама контроле кретања, покретања електричних возила и применама индустријске аутоматизације, потребно је остварити континуалну промену брзине обртања. Стога се синхрони мотори морају напајати из засебних извора који дају трофазни систем напона са учестаношћу која одговара потребама мотора. Два синхрона мотора у склопу истог индустријског робота или електричног возила најчешће имају различите брзине обртања. Стога је за сваки од мотора потребан засебан извора променљиве учестаности. Такви извори се најчешће реализују као трофазни инвертори са транзисторским прекидачима снаге. Комутацијом транзистора се стварају напонски импулси променљиве ширине. Техника модулације ширине импулса омогућава да се створи поворка напонских импулса чија средња вредност одговара потребама синхроног мотора.

5.49 Принципи управљања моментом

У применама управљања брзином и/или позицијом, синхрони мотор се користи као *актуатор момента*, односно *извршни орган*. Регулатор брзине (позиције) утврђује одступање управљане величине Ω_m од жељене вредности Ω^*, и израчунава команду електромагнетског момента M_{em}^* која ће у најкраћем времену отклонити грешку $\Delta\Omega = \Omega^* - \Omega_m$. Промена брзине обртања је одређена Њутновом једначином $J\,\mathrm{d}\Omega_m/\mathrm{d}t = M_{em} - M_m$, где је M_m моменат оптерећења (*поремећај*), који омета регулацију брзине, док је M_{em} моменат који ствара синхрони мотор. Брзина и тачност управљања кретањем се ослања на претпоставку да је $M_{em}^* = M_{em}$, односно, да постоји начин да генерисани моменат мотора одговара референтној вредности.

Моменат синхроне машине се може записати као векторски производ роторског флукса и статорске струје. Када на ротору постоји стална побуда, која у статорском намотају ствара флукс Ψ_{Rm}, моменат се може записати као $M_{em} = (3p/2)\,\Psi_{Rm} i_q$. Однос M_{em}/I_S између развијеног момента и ефективне вредности статорске струје је најповољнији у случају када постоји само q-компонента струје. Тада вектори роторског флукса и статорске струје творе угао од $\pi/2$. Флукс сталних магнета се не може мењати. Стога се моментом синхроног мотора са сталним магнетима на ротору управља деловањем на статорску струју. Када треба остварити моменат M_{em}^*, по-

требно је успоставити статорску струју тако да њена d-компонента буде једнака нулу, док је $i_q = (2/(3p))\ M_{em}^{*} / \Psi_{Rm} = K\ M_{em}^{*}$. Дакле, регулација момента синхроних серво мотора се може остварити тако што се регулише струја статора. Брзина и тачност у стварању кретног момента зависи од брзине и тачности у регулисању струје. На следећој слици је приказан трофазни инвертор који напаја статорски намотај синхроног мотора. У форми блок дијаграма, дат је принцип рада кола за регулацију струје. Проблем регулације струје синхроних и асинхроних мотора је сложен проблем који захтева подробније проучавање и превазилази оквире овог поглавља. Стога се у даљем тексту дају само основне информације и принципи.

5.50 Топологија претварача за напајање

На слици 5.37 је дата топологија претварача за напајање трофазног синхроног мотора са сталним магнетима. Претварач омогућује да се оствари управљање струјом статора. Управљање моментом се остварује тако што се задаје струја i_q пропорционална жељеном моменту. Струја i_d не доприноси моменту и најчешће се задржава на нули. Ако је вектор роторског флукса колинеаран са осом d у десном делу слике, тада је услед $i_d = 0$ струја статора нормална на флукс. Поставља се питање начина на који се жељене струје i_d и i_q могу остварити.

Слика 5.37: Топологија енергетског претварача за напајање синхроног мотора са сталним магнетима и принципи управљања струјом.

У левом делу слике дат је регулатор струје. Регулатор струје пореди жељене и мерене вредности струја i_a, i_b и i_c. На основу утврђеног одступања, регулатор управља прекидачима у инвертору на начин који умањује одступања. У идеалном случају, регулатор омогућује да се тренутне вредности фазних струја изједначе са жељеним вредностима. Референтне вредности i_a^*, i_b^* и i_c^* се израчунавају на основу податка о положају ротора и податка M_{em}^* о вредности момента коју је потребно остварити. Положај ротора се мери и добијени податак о положају користи тако да се у машини добију струје које се могу представити вектором нормалним на вектор флукса ротора.

5.51 Промена струје статора

Трофазни инвертор садржи шест транзисторских прекидача. Прекидачи су груписани у три фазе, на слици означене ознакама A, B и C. Инвертор се напаја једносмерним напоном $V_{DC} = 2E$, добијеним из батерије или исправљача који наизменични мрежни напон претвара у једносмерни. Укључењем горњег прекидача у фази A, фазни напон $u_A(t)$ узима вредност $+E$, док укључење доњег прекидача даје $u_A(t) = -E$.

Током једног периода комутације инвертора $T \approx 100\mu s$, горњи прекидач у фази A је укључен за време t_{ON}, док је у преосталом делу периода T-t_{ON} укључен доњи прекидач. Ширина позитивног импулса t_{ON} се може континуално мењати у опсегу од 0 до T. Средња вредност напона током једног периода комутације једнака је $u_{a(sr)} = E(2t_{ON} - T)/T$. Промена фазне струје $i_a(t)$ зависи од разлике између тренутне вредности фазног напона и електромоторне силе индуковане у намотају. Промена струје током једног периода комутације T зависи од средње вредности напона $u_{a(sr)}$. Анализа промене струје тражи увид у једначину равнотеже напона, која повезује фазни напон, пад напона на серијској импеданси намотаја и електромоторну силу $\mathrm{d}\Psi_a/\mathrm{d}t$, одређену променом флукса.

Расподела поља унутар магнетског кола машине зависи од карактеристика и начина уградње сталних магнета, као и од струја које постоје у проводницима статора. Флукс кроз ваздушни зазор $\underline{\Psi}_m = L_m\underline{i}_s + \Psi_{Rm}$ има амплитуду Ψ_m, док му је оријентација θ_m одређена положајем ротора. Компонента Ψ_{Rm} је одређена карактеристикама сталних магнета, док је део флукса $L_m\underline{i}_s$ одређен струјом статора. У анализи промене струје статора у веома кратком интервалу, какав је период комутације T, оправдано је претпоставити да је амплитуда флукса у ваздушном зазору $\underline{\Psi}_m$ константна, премда једнакост $\underline{\Psi}_m = L_m\underline{i}_s + \Psi_{Rm}$ сугерише промене пропорционалне струји $\underline{i}_s$. Наиме, линије магнетског поља које чини флукс $\underline{\Psi}_m$ постоје у ламинираном

магнетском колу статора, у магнетском колу ротора, у телу сталних магнета као и у челичној кошуљици која убухвата ротор и учвршћује његове магнете. Имајући у виду електромагнетске појаве на фреквенцији од $f = 1/T \approx 10$ kHz, наведени метални делови се могу моделирати као низ кратко спојених контура. Промена флукса доводи до индуковања електромоторних сила и струја у кратко спојеним контурама. Индуковане струје се противе промени флукса, и теже да га одрже на првобитној вредности. Стога је оправдано претпоставити да у времену T нема значајнијих промена флукса у ваздушном зазору.

При константној брзини обртања Ω_m, оријентација поља је одређена углом $\theta_m = \theta_0 + p\Omega_m t$. Део флукса који обухвата фазни намотај a једнак је $\Psi_m \cos(\theta_m)$. Флукс расипања статора у фази a је једнак $L_{\gamma S} i_a$, тако да је укупни флукс фазе једнак $\Psi_a = \Psi_m \cos(\theta_m) + L_{\gamma S} i_a$. Једначина напонске равнотеже у намотају гласи $u_a = R_S i_a + L_{\gamma S}\, \mathrm{d}i_a/\mathrm{d}t - \omega_m \Psi_m \sin(\theta_m)$. Занемарењем пада напона на статорској отпорности и усвајањем ознаке $e_a = -\omega_m \Psi_m \sin(\theta_m)$, добија се израз $u_a = L_{\gamma S}\, \mathrm{d}i_a/\mathrm{d}t + e_a$. Промена струје статора се сада може одредити коришћењем следећег израза

$$\frac{\mathrm{d}i_a}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{L_{\gamma S}}\left(u_a - e_a\right) = \frac{1}{L_{\gamma S}}\left(\pm E - e_a\right). \tag{5.66}$$

Уз услов да је $E \geq |e_a|$, могуће је у свим условима рада постићи пораст или смањење струје статора. Другим речима, постоји могућност да се оствари регулација струје. Ако фазна струја не одговара референтној вредности, детектује се одступање $\Delta i_a = i_a^* - i_a$ различито од нуле. Тада је потребно деловати на прекидаче инвертора тако да се грешка умањи и отклони. У случају да се има грешка $\Delta i_a > 0$, потребно је укључити горњи прекидач. Позитиван фазни напон ће довести до пораста струје и смањења одступања. У супротном случају, укључује се доњи прекидач. Приказана слика објашњава принципе рада. У пракси, одступања струје $\Delta i_d = i_d^* - i_d = 0 - i_d$ и $\Delta i_q = i_q^* - i_q$ се одређују у синхроном dq координатном систему. Регулатор струје израчунава напоне u_d и u_q које треба остварити како би се елиминисала детектована одступања у струји. Напони u_d и u_q се трансформишу у стационарни координатни систем помоћу инверзне Паркове трансформације и доводе на прикључке статорског намотаја уз помоћ инвертора и ширинске модулације. Алгоритам који дефинише функционалну зависност управљачке променљиве $\underline{u}_{dq} = u_d + \mathrm{j}u_q$ од утврђене грешке у регулацији $\Delta \underline{i}_{dq} = \Delta i_d + \mathrm{j}\Delta i_q$ зове се *алгоритам управљања*, док се *регулатором* назива направа која га имплементира. Регулациони алгоритми се најчешће примењују у дигиталној форми, у виду програма које извршава дигитални

сигнални процесор. Регулатор се често може описати функцијом преноса. Он одлучујуће утиче на брзину и квалитет динамичког одзива.

Трофазни прекидачки мост, из кога се напаја статорски намотај, представља напонски извор. Уколико постоји повратна спрега по струји и струјни регулатор који обезбеђује једнакости $i_a^*=i_a$, $i_b^*=i_b$ и $i_c^*=i_c$, одзив напајане машине ће бити једнак ономе који би се имао код напајања из струјног извора. Рад синхроног мотора са сталном побудом и регулацијом струје статора је аналоган раду машине за једносмерну струју са константном побудом и регулисаном арматурном струјом. Брзина и тачност у генерисању момента у свему зависе од карактеристика струјног регулатора.

5.52 Рад синхроне машине у области слабљења поља

Регулација струје је остварива уз услов да електромоторна сила, индукована у намотајима не превазилази расположиви фазни напон. Дакле, у сваком тренутку мора бити испуњена неједнакост $E = V_{DC}/2 \geq |e_a| = |\omega_m \Psi_m \sin(\theta_m)|$. Током рада у режиму $i_d = 0$, међусобни флукс који постоји у d-оси машине је једнак

$$\psi_d = \psi_{Rm} + L_d i_d = \psi_{Rm} \tag{5.67}$$

док је међусобни флукс у q-оси $\Psi_q = L_q i_q$. Будући да је индуктивност статорског намотаја код синхроних машина са сталним магнетима веома мала (0,01 ÷ 0,05 p.j.), флукс q-осе је знатно мањи од флукса Ψ_{Rm}. Стога се узима да је амплитуда флукса у ваздушном зазору приближно једнака $\Psi_m \approx \Psi_{Rm} + L_m i_d = \Psi_{Rm} = \Psi_{nom}$. При достизању номиналне брзине обртања $\Omega_{nom} = \omega_{nom}/p \approx E/\Psi_{Rm}/p = E/\Psi_{nom}/p$, индукована електромоторна сила достиже расположиви напон напајања. Рад у режиму $i_d = 0$ са брзинама већим од номиналне није могућ, стога што не постоји могућност да се регулише статорска струја. Другим речима, не постоји могућност да се у намотају статора успостави струја неопходна за стварање жељеног момента. Рад при брзинама већим од номиналне захтева слабљење поља. Да би се електромоторна сила $\omega_m \Psi_m$ одржала у границама расположивог напона, магнетски флукс Ψ_m који постоји у ваздушном зазору треба мењати у функцији брзине. Ако се флукс мења по закону $\Psi_m(\Omega_m) = \Psi_{nom}(\Omega_{nom}/\Omega_m) = \Psi_{Rm}(\omega_{nom}/\omega_m)$, индукована електромоторна сила при брзинама већим од номиналне задржава номиналну вредност. Треба уочити да је флукс $L_q i_q$ у q-оси значајно мањи од флукса сталних магнета зато што су индуктивности синхроних мотора са сталним магнетима врло мале. Будући да је $\Psi_{Rm} >> \Psi_q$ и $\Psi_m \approx \Psi_d$, жељена промена флукса Ψ_m одређује и промену флукса Ψ_d,

$$\psi_d(\Omega_m)\big|_{\Omega_m>\Omega_{nom}} = \psi_{Rm}\frac{\Omega_{nom}}{\Omega_m} = \psi_{Rm}\frac{\omega_{nom}}{\omega_m}\,. \tag{5.68}$$

Будући да је $\Psi_m \approx \Psi_{Rm} + L_d i_d$, може се закључити да слабљење поља тражи стварање негативне вредности струје i_d,

$$i_d(\omega_m)\big|_{|\omega_m|\geq\omega_{nom}} = -\frac{\psi_{Rm}}{L_m}\left(1-\frac{\omega_{nom}}{\omega_m}\right) \approx -\frac{\psi_{Rm}}{L_d}\left(1-\frac{\omega_{nom}}{\omega_m}\right). \tag{5.69}$$

Слика 5.38: Промена струје i_d у области слабљења поља.

<u>Питање (5.10):</u>

Изотропна синхрона машина са сталним магнетима на ротору има индуктивност статора L_S = 0,05. Одредити највећу брзину којом се машина може обртати у трајном раду у случају да нема оптерећења на вратилу.

Одговор (5.10):

При раду са брзинама обртања које превазилазе номиналну, неопходно је имати негативну вредност струје i_d, како би се остварило слабљење поља, неопходно за одржавање електромоторне силе у границама расположивог напона напајања. Одсуство оптерећења омогућује рад са i_q = 0, што значи да се сва расположива статорска струја може посветити слабљењу поља. У трајном раду, могуће је имати номиналну струју у статорским намотајима, тако да је i_d = -1 р.ј. Коришћењем израза за струју $i_d(\omega_m)$ у области слабљења поља, добија се да је (1- ω_{nom}/ω_m) = L_S/Ψ_{Rm}= L_S/Ψ_{nom}. Релативна вредност номиналног флукса је једнака један, тако да се израчунава ω_{nom}/ω_m = 1 – 0,05 = 0,95, што даје ω_m = 1,0526 ω_{nom}.

Претходни пример показује да мотори који имају површинску монтажу магнета и веома малу индуктивност статора у пракси не могу радити у области слабљења поља. Овај недостатак је разлог да се у употреби задрже асинхрони серво мотори. Услед губитака у ротору $P_{Cu2} = sP_{ob}$, асинхроне машине имају значајно веће губитке од синхроних. Постоје, међутим, примене електричних актуатора у којима је од велике важности способност мотора да раде у области слабљења поља и вишеструко премаше номиналну брзину. У таквим применама је потребно одабрати асинхрони мотор.

Синхрони мотори са површинском монтажом магнета имају примену у индустријским роботима и манипулаторима. Површинска уградња магнета даје веома малу индуктивност статора. Остварива брзина промене статорске струје $\mathrm{d}i_a/\mathrm{d}t = (u_a - e_a)/L_S$ је веома велика и достиже вредности $\mathrm{d}i_a/\mathrm{d}t \approx 7000\, I_{nom}/s$, што даје веома велику брзину промене момента $M_{em} = k\,|\Psi_{Rm} \times i_S|$. Увећање момента од нулте до номиналне вредности се може остварити у времену од 100-200 μs. Стога се синхрони мотори са површинском монтажом магнета користе у индустријској аутоматизацији, роботици и контроли кретања, где је потребно управљати брзином и позицијом, те је од велике користи имати могућност брзе промене момента. У поменутим применама, одсуство слабљења поља не представља велики недостатак.

5.53 Експлоатациона и транзијентна карактеристика

Услед веома мале индуктивности статорског намотаја $L_S^{rel} = 0{,}01 \div 0{,}05$ р.ј., рад синхроних мотора са површинском монтажом сталних магнета је ограничен на опсег брзина $\Omega_m \in [-\Omega_{nom}..+\Omega_{nom}]$. Пресек експлоатационе карактеристике и апсцисе M-Ω дијаграма постоји при брзини обртања једнакој $\omega_{max(exp)} = \omega_{nom}/(1- L_S^{rel})$ која је већа од номиналне брзине за свега неколико процената. У погледу момента, екплоатациона карактеристика је ограничена вредностима $M = \pm M_{nom}$, где је M_{nom} номинални моменат који се остварује при раду са номиналном струјом статора.

Транзијентна карактеристика зависи од вршне вредности струје која се може достићи током рада. Управљање кретањем се најчешће обавља у циклусима, током којих се тражи краткотрајно развијање великих вредности момента, како би се постигла потребна убрзања или успорења, после чега следе релативно дуги интервали мировања, са веома малим моментом. Стога је однос између вршне и ефективне вредности момента веома велики. Синхрони мотори се пројектују и израђују тако да имају преоптерећљивост $I_{max}^{rel} = I_{max}/I_{nom}$ од 5 до 10.

Ограничења у погледу максималне тренутне вредности струје која се може постићи даје сам серво мотор, али и транзисторски претварач из кога се мотор напаја. Полупроводнички прекидачи имају релативно мали термички капацитет. У случају да густина струје унутар полупроводника превазиђе дозвољене границе, пораст температуре споја доводи до трајног оштећења прекидача. До оштећења може доћи и у самом синхроном мотору. Код превелике струје, може доћи до оштећења магнета. Наиме, велика јачина статорске струје може померити радну тачку у B_{PM}-H_{PM} дијаграму према пресеку са апсцисом, чије су координате $B_{PM} = 0$, $H_{PM} = H_C < 0$. Достизање коерцитивног поља H_C најчешће доводи до трајног оштећења магнета, чија се реманентна индукција може услед тога смањити два до три пута.

Максимални моменат који дефинише оквире транзијентне карактеристике одређен је струјном преоптеретљивошћу I_{max}^{rel}. Највећа брзина коју може достићи неоптерећена машина у краћим интервалима времена одређена је изразом $\omega_{max(tran)}=\omega_{nom}/(1-I_{max}^{rel}L_S^{rel})$.

Слика 5.39: Транзијентна и експлоатациона карактеристика двополне синхроне машине са сталним магнетима ($\omega_m = \Omega_m$).

<u>Питање (5.11):</u>

Изотропна синхрона машина са сталним магнетима на ротору има индуктивност статора $L_S = 0{,}05$. Одредити највећу брзину која се може краткотрајно достићи, уколико је познат коефицијент струјне преоптеретљивости $I_{max}^{rel} = 5$. Машина нема оптерећења на вратилу.

Одговор (5.11):

Коришћењем израза за струју $i_d(\omega_m)$ у области слабљења поља, добија се да је $(1- \omega_{nom}/\omega_m) = I_{max}^{rel} L_S/\Psi_{Rm} = I_{max}^{rel} L_S/\Psi_{nom}$. Релативна вредност номиналног флукса је једнака један, тако да се однос номиналне и максималне брзине одређује као $\omega_{nom}/\omega_m = 1 - 5 \times 0{,}05 = 0{,}75$, што даје $\omega_m = 1{,}33\ \omega_{nom}$.

У применама где није потребно имати брзе промене момента, али је потребан рад у зони слабљења поља, користе се синхроне машине са сталним магнетима уграђеним у унутрашњост магнетског кола ротора. Индуктивност статора је код ових мотора знатно већа, што рад у зони слабљења поља чини остваривим. Услед одсуства губитака у ротору, синхроне са унутрашњом уградњом магнета се примењују у свим случајевима где је степен корисног дејства од великог значаја. Неки од примера су генератори у малим алтернативним изворима електричне енергије, као и аутономна електрична возила.

Литература

[1] A. E. Fitzgerald, C. Kingsley, Električne mašine za naizmeničnu i za jednosmernu struju, (1962), Naučna Knjiga (prevod)

[2] P. L. Alger, Induction Machines, (1965), Gordon and Breach, New York

[3] B. J. Chalmers, Electric Motor Handbook, (1988), Butterworth, London

[4] Милош Петровић, Електромеханичко претварање енергије, (1985), Научна књига

[5] Владан Вучковић, Општа теорија електричних машина, Научна књига

[6] P. Krause, Analysis of Electrical Machines

[7] Милош Петровић, Електричне машине и постројења, (1986), Научна књига

[8] J. D. Edwards, Electrical Machines: Introduction to Principles and Characteristics, Intertext Books

[9] G.R. Slemon, A. Straughen, Electrical Machines. Addison Wesley

[10] Милош Петровић, Испитивање електричних машина, (1987), Научна књига

[11] Slobodan N. Vukosavić, Digital Control of Electrical Drives, Springer, New York, 2007.

[12] Theodor Wildie, Electrical machines, drives and power systems

[13] Samuel Seeley, Electromechanical Energy Conversion, McGraw Hill

[14] D. Brown, E.P. Hamilton, Electromechanical Energy Conversion, McMillan

Исправке у књизи *Електричне машине*

У првом издању књиге постоје грешке. Ова листа наводи места у књизи на којима постоје грешке и даје корекције. Ради лакшег рада, често се наводе делови текста или комплетне реченице у којима треба унети корекције. **Корекције су означене масним словима (bold).**

1. Страна 14, фуснота 4 треба да гласи: „Рад силе је $W=Fl$ под условом да је сила константна, да је померај **праволинијски и да се правац и смер вектора силе поклапају са правцем и смером померaја.**“
2. Страна 15, друга реченица: „Листа коришћених јединица је дата у **засебном** прилогу". Напомена - прилог са листом коришћених јединица и ознака није одштампан у првом издању књиге али се може наћи на сајту masine.etf.rs.
3. Страна 20, трећа реченица треба да се завршава са: „недостатака и најчешћих **примена.**“ У следећој реченици „Изводе се изрази за мегнетопобудну силу...“ нема измена.
4. Страна 24, трећи пасус, у шестом реду треба да стоји: „...може се одредити **тако да се** тражена снага...“.
5. Страна 31, трећи пасус, друга реченица треба да гласи „Индуковано електрично поље **је** могуће одредити...“
6. Страна 32, први пасус, друга реченица треба да гласи: „Будући да се индуковано електрично поље не мења дуж проводника, електромоторна **сила** се може израчунати на основу једначине (2.7).
7. Страна 32, једначина 2.7 треба да гласи $e=\vec{l}\cdot\vec{E}_{ind}=\vec{l}\cdot\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)$
8. Страна 56, у последњем пасусу, претпоследња реченица треба да гласи: „На сликама 2.15. и **2.16.** нормала на контуру је означена вектором *n.“*
9. Страна 58, одељак 2.12.3, последња реченица првог пасуса треба да се завршава са: „ ...у сваком од **случајева.**”
10. Страна 59, последња реченица претпоследњег пасуса треба да гласи: „Стога је флукс кроз кратко спојену суперпроводну контуру **константан (непромењив)**“.
11. Страна 71, у првом пасусу прва реченица треба да гласи: „У посматраном случају, референтни смер флукса Ψ_1, означен ортом n_1 на **слици 2.23**, сагласан је са усвојеним смером обиласка контуре *c*, који је на слици означен ортом нормале *n*, и који се **назива** *референтним смером магнетског кола*.“
12. Страна 71, слика 2.23, графички приказ намотаја у коме постоји струја i_2 није исправан. Грешку је лако уочити поређењем са намотајем N_1.
13. Страна 72, у одељку 2.14, трећа реченица почиње са: „**Промена** индукције *B*...“.

14. Страна 74, једначина 2.54. треба да гласи: $e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-S\,B_m \sin\omega t\right) = \omega\, S\, B_m \cos\omega t.$

    где је *S* површ која се ослања на контуру *C*.
15. Страна 76, трећи пасус, последња реченица треба да почиње речима: „Ламинирано магнетско коло **се** не прави .... “
16. Страна 77, први пасус, трећа реченица у целости треба да гласи: „**Ферит садржи мале изоловане честице гвожђа. Производња ферита почиње потискивањем истопљене легуре гвожђа у бризгаљку са узаним отвором.“**
17. Страна 87, први пасус, трећа реченица треба да гласи: „По изласку из жлебова, проводници који припадају једном навојку **спојени су нарочитим проводником који стоји изван жлебова, и који је на слици 2.33 означен словом (D)**[4]“.
18. Страна 87, Трећи пасус, последња реченица треба да гласи: „Електричне машине могу **да имају** већи број намотаја **од којих некимогу бити** на статору **а други на ротору**. “
19. Страна 88, у првом реду треба да стоји „ ... **2.15.3**. *Намотаји.* “.
20. Страна 94, одељак 2.15.8. други пасус, осма реченица треба да почне са: „Слика **2.30.** ....“
21. Страна 94, одељак 2.15.8., други пасус треба да се завршава са: „...описан у одељку **2.11.4** *Циклус претварања*.“
22. Страна 95, у делу А и делу В слике 2.39. уместо симбола W_e треба да стоји $\boldsymbol{W_m}$.
23. Страна 98, први пасус, четврти ред, у изразу за $W_{m(max)}$ треба уклонити фактор 1/2
24. Страна 105, одељак 2.16.4., прва реченица треба да почиње са: „У одељку **2.12.3** *Контра-електромоторна сила...*
25. Страна 107, једначина 2.73 треба да гласи

$$\begin{bmatrix} R_1 & & & \cdots & & 0 \\ & R_2 & & & \iddots & \\ & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & R_k & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ 0 & & & \cdots & & R_N \end{bmatrix}$$

26. Страна 107, једначина на дну стране треба да гласи

$$\psi_k = L_{k1} i_1 + L_{k2} i_2 + \ldots + L_{kk} i_k + \ldots + L_{kN} i_N$$

27. Страна 108, једначина 2.75 треба да гласи

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1k} & \cdots & L_{1N} \\ L_{21} & L_{22} & \cdots & L_{2k} & \cdots & L_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ L_{k1} & L_{k2} & \cdots & L_{kk} & \cdots & L_{kN} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \\ L_{N1} & L_{N2} & & L_{Nk} & & L_{NN} \end{bmatrix}$$

28. Страна 115, трећи пасус, друга реченица, где стоји позив на слику 2.33, треба да стоји позив на слику **2.35**.
29. Страна 115, трећи пасус, друга реченица, где стоји позив на слику 2.34, треба да стоји позив на слику **2.36**
30. Страна 116, трећи пасус, последња реченица треба да почиње са: „Преостала снага се, према **слици 2.36**, претвара...“
31. Страна 118, одговор (2.13), претпоследња реченица треба да се завршава са: „...више није једнак **0 већ узима вредност θ_m**“.
32. Страна 119, први ред, треба да стоји: „... флукс одређен **косинусом** овог угла...“.
33. Страна 119, одговор (2.14), другу, трећу и четврту реченицу треба заменити следећим текстом: „**Магнетско коло ротора је углавном цилиндричног облика и има кружни попречни пресек. Уклањањем бочних делова, попречни пресек ротора узима издужен облик који подсећа на елипсу. Услед уклањања бочних делова магнетског кола ротора, ваздушни зазор између цилиндричног статора и бокова ротора је увећан. Зато флукс у бочном правцу наилази на већу магнетску отпорност. Кад се ротор обрће, флукс непомичног статорског намотаја наилази на променљиву магнетску отпорност па се мења и сопствена индуктивност намотаја.**“.
34. Страна 133, у другој реченици треба да стоји: „...функцији **sin(2$\Omega_m t$)** и има средњу...“.
35. Страна 137, на слици 2.49, уместо $L_{12}(\theta_m) = L_m\sin(\theta_m)$ треба да стоји $\boldsymbol{L_{12}(\theta_m) = -L_m \sin(\theta_m)}$, узимајући у обзир усвојени смер магнетског поља који ствара намотај 2.
36. Страна 138, једначина на дну стране треба да гласи

$$\underline{\psi} = \underline{L}\underline{i} \Rightarrow \underline{i} = \underline{L}^{-1}\underline{\psi},$$

37. Страна 142, одељак 2.17.8, цео други пасус заменити са: „ **Као што је показано, развијање момента који има средњу вредност различиту од нуле захтева да кружна учестаност струја статора ω_1, кружна учестаност струја ротора ω_2 и брзина обртања ротора Ω_m задовољавају услов[10] $\omega_1 \pm \omega_2 \pm \Omega_m = 0$.**“
38. Страна 145, последња реченица треба да се завршава: „...вектором чији **је правац одређен вектором магнетске индукције (као што је приказано у одељку 2.13.2 *Вектор флукса*).**“
39. Страна 146, друга реченица треба да се завршава са: „...једнак Φ_m **док му је оријентација одређена векторским производом нормале n_1 и вектора магнетске индукције**“.
40. Страна 147, у четвртом реду испод слике 2.51 треба заменити израз "$\Delta\theta = \Omega_m t$" изразом **"$\Delta\theta = \theta_{\Psi S} - \Omega_m t - \theta_{\Psi S}(0)$ "**
41. Страна 165, слика 2.59, у потпису испод слике уместо „граничне равни“ треба да пише „**граничне површи**“.
42. Страна 171, у једначини 2.126 треба уклонити R, она треба да гласи

$$H_\theta^S(\theta) = J_{S0}\cos\theta$$

43. Страна 181, у једначини 2.130 треба изменити границе одређеног интеграла. Једначина 2.130 треба да гласи

$$\oint_{EFGHE} \vec{H}\mathrm{d}\vec{l} = \int_{\theta_{FE}}^{\theta_{GH}} J_R(\theta)R\mathrm{d}\theta \approx J_R(\theta)\cdot R\cdot\Delta\theta,$$

44. Страна 185, први пасус испод наслова 2.18.7 је грешком одштампан два пута (пасус испод слике 2.67 је исти као и пасус изнад слике).
45. Страна 188, последњи пасус, друга реченица, на месту позива на одељак 2.13.4 треба да стоји **2.13.2**
46. Страна 190, четврти пасус треба да почне са: „Коришћењем једначина (2.127) и **(2.139)**, које...“.
47. Страна 190, једначина 2.140 треба да гласи

$$w_m(\theta) = \frac{\mu_0}{2}\left(\frac{R}{\delta}\right)^2 \left[J_{R0}\sin(\theta-\theta_m) + J_{s0}\sin\theta\right]^2$$

48. Страна 196, одељак 2.18.11, други пасус, друга реченица треба да почне са: „У одељку **2.13.2** је показано...“.
49. Страна 198, други пасус, последња реченица треба да се заврши са: „ ...једначином **(2.124)**,“.
50. Страна 201, трећи пасус, треба да стоји: „ ...дискутован у одељку **2.13.2** и сажето приказан сликама ...“.
51. Страна 203, други пасус, у другој реченици треба да стоји: „ ...која на слици **2.68** спаја...“.
52. Страна 203, једначина 2.152 треба да гласи

$$\psi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} N'(\theta)\Phi(\theta)R\mathrm{d}\theta$$

53. Страна 205, трећи пасус, почетак реченице треба да гласи: „У одељку **2.13.2** дата је...“.
54. Страна 208, трећи пасус, у последњој реченици треба да стоји: „на основу једначина **2.148 и 2.149**, амплитуде...“.
55. Страна 219, питање (2.35), прва реченица треба да гласи: „Претпоставити да су струје у намотајима статора датог на слици 2.76 **једнаке јачине, исте учестаности и да струја i_α фазно предњачи за угао φ**.“
56. Страна 227, други пасус, прва реченица треба да почиње са: „Према изразу **(2.171)**...“.
57. Страна 229, прва реченица у одговору на питање треба да почиње речима: „У складу са једначинама **(2.175) и (2.177)**...“.
58. Страна 230, други пасус, трећа реченица треба да почиње речима: „Ефективна вредност **електромоторне силе** у једном навојку...“
59. Страна 235, симбол ω_m у једначини 2.182 треба заменити симболом Ω_m. Дакле, једначина треба да се завршава са

$$= E_m \sin(\frac{\alpha}{2} - \Omega_m t)$$

60. Страна 237, други пасус, прва реченица треба да се завршава: „... дат је на слици **2.80**.“
61. Страна 239, на дну странице, коефицијент k_p треба да се рачуна по следећем изразу

$$k_p = \frac{\left|\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3\right|}{\left|\vec{E}_1\right| + \left|\vec{E}_2\right| + \left|\vec{E}_3\right|}$$

62. Страна 266, други пасус, претпоследња реченица, уместо P6-P7 треба да стоји **P7-P8.**

63. Страна 267, први пасус, прва реченица треба да се завршава са: „... док је ламела **L4** повезана проводницима P6-P7.“
64. Страна 280, трећи пасус треба да почиње реченицом: „Проводници P3, P4, P7 и P8 **(слика 3.18)**, се налазе...“.
65. Страна 288, одговор (3.4), друга реченица треба да почиње са: „У неутралним **зонама не постоји**...“.
66. Страна 293, трећи пасус, друга реченица, уместо „L2 и L3“ треба да пише „**L2 и L4**“
67. Страна 294, последњи пасус, четврти ред одоздо, треба да стоји: „... представља арматурни намотај **на сликама 3.22 и 3.23,** једнака...“.
68. Страна 296, одељак 3.19, први пасус, последња реченица почиње са: „Потребно је утврдити **везу** између...“.
69. Страна 299, непосредно пред једначином (3.11), на место речи "силе" треба да стоји **сила**.
70. Страна 305, једначина 3.19, у изразу за момент M_{em}, уместо k_e треба да стоји $\boldsymbol{k_m}$.
71. Страна 306, у изразу за момент M_{em}, уместо k_e треба да стоји $\boldsymbol{k_m}$.
72. Страна 308, у другом пасусу, део претпоследње реченице треба да гласи „ ...(1) на слици **3.28.** је...“
73. Страна 311, слика која је нумерисана са 2.29 треба да буде нумеисана са **3.29**
74. Страна 314, други пасус, трећа реченица треба да гласи: „Будући да се устаљено **стање достиже** при...“
75. Страна 319, питање (3.10) прва реченица треба да гласи: „Радна машина се **опире** кретању моментом $\boldsymbol{M_m = k_1\,\Omega^2}$**, где је** $\boldsymbol{k_1 = 0{,}001}$ **[Nm s²/rad²]**.“
76. Страна 321, питање (3.11), у другој реченици, уместо „између четкица“ треба да стоји „**на генератор**“.
77. Страна 321, питање (3.11), израз за P_T треба да гласи $\boldsymbol{P_T = M_T\Omega_m}$.
78. Страна 326, на слици 3.37, поред ознаке за индуктивност L треба додати индекс „*a*“ што даје $\boldsymbol{L_a}$. На истој слици треба додати на ред повезани отпорник R_a
79. Страна 331, у другом реду испод наслова *Средња вредност поворке импулса* уместо U_{sr} треба да стоји $\boldsymbol{U_i}$
80. Страна 331, последњи пасус, треба да стоји: „ ...могуће је мењати брзину ортања у опсегу од $\boldsymbol{-E/(k_e\Phi_p)}$ до $+E/(k_e\Phi_p)$.“
81. Страна 334, у последњем пасусу треба да стоји: „На основу једначине **(3.35)**...“
82. Стрнаа 335, последња реченица трећег пасуса треба да се указује на **(3.34)** уместо на (3.35)
83. Страна 337, слика 3.41, вршне вредности струја i_a и i_u треба да буду једнаке.
84. Страна 337, питање (3.13), на крају питања треба да стоји: „ ...док су познате величине $\boldsymbol{L_a}$**,** $\boldsymbol{T}$**,** $\boldsymbol{E}$ **и** $\boldsymbol{t_{on}=T/2}$**.** *“*
85. Страна 337, одговор (3.13) на дну одговора треба да стоји $\boldsymbol{\Delta I = ET/(4L_a)}$
86. Страна 339, девети ред, уместо "У доњем делу ..." реченица треба да почиње са: „**На слици 3.43 је дат приказ**...“
87. Страна 341, друга реченица треба да се завршава са: „... номиналног **момента, номиналног флукса и номиналне снаге**.“
88. Страна 345, слика 3.44, отпорник и кондензатор на слици треба замене места
89. Страна 345, последњи пасус, прва реченица треба да се завршава са: „ ... одређеним кашњењем **које зависи од временске константе** $\boldsymbol{\tau = R_TC_T}$ **(слика 3.45).**“

90. Страна 354, у другом пасус, у последња 2 пасуса треба да стоји: „Биланс снаге је **приказан на слици 3.49.** Овде су наведени и објашњени поједини**...**“
91. Страна 359, трећи пасус треба да се завршава са $\boldsymbol{\Omega_n = (U_n - R_a I_n)/k_e \Phi_n}$.
92. Страна 360, претпоследња реченица треба да се завршава са $\boldsymbol{\Omega_n = (U_n - R_a I_n)/k_e \Phi_n}$.
93. Страна 361, други пасус, друга реченица треба да се завршава са: „ ...машина са **намотаним** ротором.“
94. Страна 376, избрисати претпоследњу реч "се" у петом реду одозго
95. Страна 378, у првој реченици другог пасуса треба да стоји: „ ...намотајима **оријентисаним у правцу јединичних вектора**...“
96. Страна 381, пети ред одозго треба да гласи **"сваком од три напојна вода струје имају исту ефективну вредност"**
97. Страна 382, избрисати речцу "се" у четвртој реченици трећег пасуса.
98. Страна 384, у четвртом реду одозго треба да стоји: „ ...индукована електромоторна сила ***e*** **значајно већа** од пада напона...“
99. Страна 386, четврти ред одоздо, реченица треба да почиње са: „Будући **да је** ...“
100. Страна 390, једначине 4.33 и 4.34 треба да стоје без водећих коефицијената, без 3/2.
101. Страна 393, одговор (4.7) треба да гласи: „Тражене струје су одређене пројекцијом вектора $\boldsymbol{F_S/N_S}$ на осе α_S и β_S непомичног координатног система.“
102. Страна 393, одељак 4.16, у првој реченици уместо „u_a, u_b, u_b,“ и „Ψ_a, Ψ_b, Ψ_b,“ треба да стоји „$\boldsymbol{u_a, u_b, u_c}$,“ и „$\boldsymbol{\Psi_a, \Psi_b, \Psi_c}$,“
103. Страна 393, одељак 4.16 други пасус треба да се завршава са „... $\boldsymbol{\Psi_a, \Psi_b, \Psi_c}$.“
104. Страна 393, последња реченица треба да почне са: „Једначине равнотеже **напона**...“
105. Страна 395, избрисати реч "је" у претпоследњем реду
106. Страна 396, последња реченица првог пасуса треба да се завршава са: „ ...то јест **по** један роторски штап.“
107. Страна 400, у петом реду испод наслова 4.22 L_{jk} треба заменити са $\boldsymbol{L_{kj}}$...“
108. Страна 401, одељак 4.23, у првом реду треба да стоји: „ ...**дате једначином 4.41**...“
109. Страна 403, последња реченица на страни треба да се завршава са: „(4.53), **(4.54) и (4.55)**.“
110. Страна 404, једначину 4.54 треба заменити и она треба да гласи

$$J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = M_{em} - M_m$$

111. Страна 405, реченица која почиње у другом реду одозго треба да гласи: „**Уколико би ротор био заустављен у положају $\boldsymbol{\theta_m = 0}$, једначина напонске равнотеже узела би следећи облик**“
112. Страна 405, последња једначина на страници треба да гласи

$$U_{\alpha S}(\mathrm{j}\omega) = R_s I_{\alpha S}(\mathrm{j}\omega) + \mathrm{j}\omega L_s I_{\alpha S}(\mathrm{j}\omega) + \mathrm{j}\omega L_m I_{\alpha R}(\mathrm{j}\omega),$$

113. Страна 408, одељак 4.27, у првој реченици треба да стоји: „... су **одређене пројекцијама** вектора магнетопобудне силе статора $\boldsymbol{F_S}$ на осе...“
114. Страна 408, одељак 4.27, први пасус треба да се завршава са: „.. систему који **ротира** синхроно са обртним пољем.“